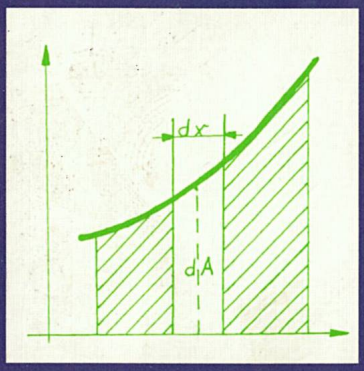


Leupold u.a.

MATHEMATIK

ein Studienbuch für Ingenieure

Band 1

Algebra – Geometrie – Analysis für eine Variable

Fachbuchverlag Leipzig - Köln

Mathematik – ein Studienbuch für Ingenieure, Band 1

Federführung: Prof. Dr. Wilhelm Leupold

Autoren: Prof. Dr. Manfred Andrié
Prof. Dr. Gerhard Große
Prof. Dr. Wilhelm Leupold
Dr. Heinz Nickel

Mathematik –

ein Studienbuch für Ingenieure

Band 1:
Algebra – Geometrie – Analysis für eine Variable

mit 349 Bildern, 404 Beispielen
und 397 Aufgaben mit Lösungen

Fachbuchverlag Leipzig - Köln

Autoren

Prof. Dr. Manfred Andrié (Abschnitt 5)
Prof. Dr. Gerhard Große (Abschnitte 4 und 6)
Prof. Dr. Wilhelm Leupold (Abschnitt 2)
Dr. Heinz Nickel (Abschnitte 1 und 3)

CHLORFREI
Gedruckt auf Papier, das nicht mit Chlor gebleicht wurde. Bei der Produktion entstehen keine chlorkohlenwasserstoffhaltigen Abwässer.

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Mathematik : ein Studienbuch für Ingenieure / [Federführung: Wilhelm Leupold]. - Leipzig ; Köln : Fachbuchverl.
NE: Leupold, Wilhelm [Hrsg.]

Bd. 1. Algebra - Geometrie - Analysis für eine Variable : mit ca. 404 Beispielen und 397 Aufgaben mit Lösungen / [Autoren: Manfred Andrié ...]. - 1994
ISBN 3-343-00870-2

ISBN 3-343-00870-2

© Fachbuchverlag Leipzig GmbH 1994

Alle Rechte vorbehalten. Dieses Werk sowie einzelne Teile desselben sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen ist ohne vorherige schriftliche Zustimmung des Verlages nicht zulässig.

Gesamtherstellung: Chemnitzer Verlag und Druck GmbH, Zwickau
Printed in Germany

Vorwort

Das zweibändige Lehrbuch der Mathematik wendet sich vor allem an Ingenieurstudenten von Fachhochschulen und Technischen Universitäten und enthält die für die mathematische Grundausbildung erforderlichen Stoffgebiete.
Es werden die Theorien, Gesetze, Methoden und Verfahren vermittelt, die ein rationelles und effektives Arbeiten in den technischen, naturwissenschaftlichen und betriebswirtschaftlichen Studiengängen ermöglichen.
Gestützt auf langjährige Erfahrungen bei der Ausbildung von Diplomingenieuren haben die Autoren die wissenschaftliche Behandlung des Stoffes mit einer ausgeprägt anschaulichen Darstellung verbunden. Wichtige Definitionen und Sätze sind eingerahmt. Die große Zahl von durchgerechneten Beispielen dient zum besseren Verständnis und soll zu sicheren Rechenfertigkeiten führen. Die 400 Aufgaben, deren Lösungen sich am Ende des Buches befinden, erlauben ein intensives Üben; auch zum Selbststudium und zur Prüfungsvorbereitung ist das Buch bestens geeignet.
Da die Studienanfänger über sehr unterschiedliche mathematische Grundkenntnisse verfügen, werden im ersten Kapitel nochmals die für das Ingenieurstudium notwendigen mathematischen Grundlagen dargestellt.
Allen Fachkollegen, die durch wertvolle Ratschläge zum Gelingen des Buches beigetragen haben, sei an dieser Stelle herzlich gedankt.
Verfasser und Verlag hoffen, mit diesem Lehrbuch den Studenten eine wertvolle Studienhilfe bereitzustellen. Hinweise, Erfahrungen und Anregungen, besonders auch aus dem Kreis der Studenten, nehmen die Autoren gern entgegen.

Verfasser und Verlag

Zahlenmengen und Intervalle (nach DIN 1302)

$\mathbb{N}$ oder $\mathbf{N}$	Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen, Menge der natürlichen Zahlen (N enthält die Zahl 0)
$\mathbb{Z}$ oder $\mathbf{Z}$	Menge der ganzen Zahlen (auch: Menge der ganzrationalen Zahlen)
$\mathbb{Q}$ oder $\mathbf{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$ oder $\mathbf{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$ oder $\mathbf{C}$	Menge der komplexen Zahlen

Die Herausnahme der Null aus einer dieser Mengen wird durch das Hochzeichen * gekennzeichnet, z.B. ist $\mathbb{N}^*$ die Menge der natürlichen Zahlen ausschließlich 0.
Die Einschränkung auf die positiven Zahlen der Menge wird durch das Hochzeichen $^+$ gekennzeichnet, z.B. ist $\mathbb{Q}^+$ die Menge positiven rationalen Zahlen.

(a, b)	offenes Intervall von a bis b, z.B. $x \in (a, b) \Longleftrightarrow \{x \,\vert\, a < x < b\}$.
(a, ∞)	offenes Intervall ab a, z.B. $x \in (a, \infty) \Longleftrightarrow \{x \,\vert\, a < x\}$. Das Intervall $(-\infty, b)$ ist analog definiert.
$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall von a bis b, z.B. $x \in [a, b] \Longleftrightarrow \{x \,\vert\, a \leq x \leq b\}$.
$[a, b)$	linksseitig abgeschlossenes und rechtsseitig offenes Intervall von a bis b, z.B. $x \in [a, b) \Longleftrightarrow \{x \,\vert\, a \leq x < b\}$. Das Intervall $(a, b]$ ist analog definiert.
$[a, \infty)$	abgeschlossenes unbeschränktes Intervall ab a, z.B. $x \in [a, \infty) \Longleftrightarrow \{x \,\vert\, a \leq x\}$. Das Intervall $(-\infty, b]$ ist analog definiert.

Weitere mathematische Zeichen und Begriffe siehe DIN 1302, DIN 1303, DIN 1315, DIN 5473, DIN 5487.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen ... 13

1.1 Logik, Mengen, Rechenoperationen ... 13
1.1.1 Grundbegriffe der Logik ... 13
1.1.1.1 Aussage und Aussagenform ... 13
1.1.1.2 Aussagenfunktionen ... 14
1.1.1.3 Beweismethoden ... 19
1.1.2 Mengen ... 22
1.1.2.1 Definition und Darstellung von Mengen ... 22
1.1.2.2 Relationen zwischen Mengen ... 23
1.1.2.3 Operationen mit Mengen ... 25
1.1.3 Zahlenbereiche und Rechenoperationen ... 28
1.1.3.1 Zahlenbereiche ... 28
1.1.3.2 Rechenoperationen der ersten und zweiten Stufe ... 30
1.1.3.3 Potenzen und Wurzeln ... 33
1.1.3.4 Logarithmen ... 35
1.1.3.5 Binomischer Satz ... 39
1.2 Gleichungen, Ungleichungen, Beträge ... 42
1.2.1 Allgemeines über Gleichungen ... 42
1.2.2 Arten von Gleichungen ... 44
1.2.3 Absolute Beträge ... 52
1.2.4 Intervalle ... 54
1.2.5 Ungleichungen ... 55
1.3 Funktionen ... 58
1.3.1 Abbildungen ... 58
1.3.2 Allgemeines über Funktionen ... 59
1.3.2.1 Begriff der Funktion ... 59
1.3.2.2 Darstellungsarten von Funktionen ... 60
1.3.2.3 Einteilung und Eigenschaften der Funktionen ... 65
1.3.2.4 Umkehrfunktion ... 68
1.3.2.5 Spezielle Abbildungen ... 70
1.3.3 Spezielle Funktionen ... 71
1.3.3.1 Ganzrationale Funktionen ... 71
1.3.3.2 Gebrochenrationale Funktionen ... 75
1.3.3.3 Wurzelfunktionen ... 76
1.3.3.4 Exponential- und Logarithmusfunktionen ... 77

1.4 Goniometrie und Trigonometrie 80
1.4.1 Winkelmaße 80
1.4.2 Trigonometrische Funktionen 82
1.4.2.1 Definition und Darstellung 82
1.4.2.2 Quadrantenrelationen 88
1.4.2.3 Zusammenhang zwischen den Funktionswerten eines Winkels 89
1.4.2.4 Additionstheoreme 91
1.4.2.5 Die allgemeine Sinusfunktion 94
1.4.3 Dreiecksberechnung 96
1.4.3.1 Rechtwinklige Dreiecke 96
1.4.3.2 Berechnung schiefwinkliger Dreiecke 101
1.5 Aufgaben 108

2 Komplexe Zahlen 118

2.1 Imaginäre Zahlen 118
2.2 Arithmetische Form komplexer Zahlen 119
2.2.1 Definition der komplexen Zahl 119
2.2.2 Gaußsche Zahlenebene 121
2.2.3 Rechenoperationen der ersten und zweiten Stufe mit komplexen Zahlen 122
2.3 Goniometrische Form komplexer Zahlen 125
2.3.1 Goniometrische Form 125
2.3.2 Multiplikation und Division 127
2.3.3 Potenzieren und Radizieren 130
2.3.4 Binomische Gleichungen 132
2.4 Exponentialform komplexer Zahlen 134
2.4.1 Exponentialform 134
2.4.2 Multiplikation und Division 135
2.4.3 Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren 136
2.5 Komplexe Funktionen einer reellen Variablen, Ortskurven 137
2.5.1 Komplexe Funktionen einer reellen Variablen 137
2.5.2 Ortskurven und ihre Inversion 140
2.6 Aufgaben 148

3 Vektorrechnung und analytische Geometrie 150

3.1 Koordinaten 150
3.2 Vektoralgebra 154
3.2.1 Vektorbegriff 154
3.2.2 Addition und Subtraktion von Vektoren 155
3.2.3 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar 157
3.2.4 Darstellung von Vektoren im Koordinatensystem 159
3.2.5 Lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit 162
3.2.6 Skalarprodukt 164

3.2.7 Vektorprodukt ... 167
3.2.8 Mehrfache Produkte von Vektoren ... 169
3.3 Analytische Geometrie der Ebene ... 171
3.3.1 Kurvengleichungen ... 171
3.3.2 Die Gerade ... 174
3.3.3 Kreis ... 178
3.3.4 Parabel ... 181
3.3.5 Ellipse ... 185
3.3.6 Hyperbel ... 189
3.3.7 Ergänzungen zu den Kegelschnitten ... 192
3.4 Analytische Geometrie des Raumes ... 194
3.4.1 Gerade ... 194
3.4.2 Ebene ... 199
3.4.3 Flächen 2.Ordnung ... 207
3.5 Aufgaben ... 211

4 Lineare Algebra ... 220

4.1 Systeme linearer Funktionen und Gleichungen ... 220
4.1.1 Einführung ... 220
4.1.2 Umformung linearer Gleichungssysteme ... 222
4.1.2.1 Austauschverfahren ... 222
4.1.2.2 Gaußscher Algorithmus ... 226
4.2 Linearer Vektorraum ... 229
4.2.1 Grundlagen ... 229
4.2.2 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren ... 232
4.3 Matrizen ... 238
4.3.1 Matrizenbegriff ... 238
4.3.2 Addition und Subtraktion von Matrizen ... 242
4.3.3 Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl ... 244
4.3.4 Matrizenmultiplikation ... 245
4.3.5 Lineare Abbildung ... 251
4.3.6 Matrizeninversion ... 252
4.3.7 Matrizengleichungen ... 254
4.3.8 Blockmatrizen ... 255
4.4 Determinanten ... 257
4.4.1 Definition und Berechnung von Determinanten ... 257
4.4.2 Eigenschaften von Determinanten ... 262
4.4.3 Ausgewählte Anwendungen ... 267
4.4.3.1 Cramersche Regel ... 267
4.4.3.2 Berechnung der inversen Matrix ... 268
4.4.3.3 Vektorielles Produkt zweier Vektoren ... 270
4.4.3.4 Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte ... 271
4.5 Theorie der Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme ... 272
4.5.1 Rang einer Matrix ... 272

4.5.2 Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme ... 275
4.5.2.1 Grundlagen ... 275
4.5.2.2 Inhomogene lineare Gleichungssysteme ... 277
4.5.2.3 Homogene lineare Gleichungssysteme ... 278
4.5.3 Allgemeine Lösung ... 279
4.6 Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme ... 282
4.6.1 Auswahl eines Lösungsverfahrens ... 282
4.6.2 Konditionierungsprobleme ... 283
4.7 Anwendungen der linearen Algebra ... 285
4.7.1 Matrizeneigenwertprobleme ... 285
4.7.2 Verflechtungsbilanzen in der Betriebswirtschaft ... 290
4.8 Aufgaben ... 295

5 Differentialrechnung für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen ... 298

5.1 Folgen, Reihen, Grenzwerte ... 298
5.1.1 Grenzwerte von Folgen ... 298
5.1.1.1 Begriff der Zahlenfolge ... 298
5.1.1.2 Spezielle Zahlenfolgen ... 304
5.1.1.3 Grenzwert einer Folge ... 308
5.1.1.4 Grenzwertsätze ... 313
5.1.1.5 Geometrische Folgen und Reihen ... 316
5.1.1.6 Die Eulersche Zahl e als Grenzwert von Folgen ... 322
5.1.1.7 Wurzelfunktionen und Berechnung von Wurzeln ... 325
5.1.2 Grenzwerte von Funktionen ... 331
5.1.2.1 Grenzwert einer Funktion für $x \to x_0$ ... 331
5.1.2.2 Grenzwerte von Funktionen für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ ... 338
5.1.3 Stetigkeit von Funktionen ... 340
5.1.3.1 Begriff der Stetigkeit ... 340
5.1.3.2 Unstetigkeitsstellen und Lücken ... 341
5.2 Ableitung einer Funktion ... 344
5.2.1 Begriff der Ableitung ... 344
5.2.2 Bedeutung der Tangente ... 346
5.2.3 Differential und Differentialquotient ... 349
5.2.4 Differenzierbarkeit und Stetigkeit ... 350
5.2.5 Differentiationsregeln ... 351
5.2.5.1 Faktorregel ... 351
5.2.5.2 Summenregel ... 352
5.2.5.3 Produktregel ... 352
5.2.5.4 Quotientenregel ... 353
5.2.5.5 Ableitung der Umkehrfunktion ... 354
5.2.5.6 Kettenregel: Ableitung zusammengesetzter Funktionen ... 356
5.2.6 Ableitungen von Grundfunktionen ... 358
5.2.6.1 Trigonometrische Funktionen ... 359

5.2.6.2 Zyklometrische Funktionen oder Arcusfunktionen ... 360
5.2.6.3 Logarithmusfunktionen ... 363
5.2.6.4 Exponentialfunktionen ... 365
5.2.6.5 Potenzfunktionen mit beliebigen Exponenten ... 366
5.2.6.6 Hyperbelfunktionen ... 366
5.2.6.7 Areafunktionen ... 368
5.2.7 Extremwerte und Mittelwertsätze der Differentialrechnung ... 370
5.2.7.1 Extremwerte von Funktionen ... 371
5.2.7.2 Mittelwertsätze der Differentialrechnung ... 373
5.2.8 Uneigentliche Grenzwerte: Regel von Bernoulli und de l'Hospital ... 376
5.2.9 Extrem- und Wendepunkte ... 380
5.2.9.1 Monotonie- und Krümmungsverhalten ... 380
5.2.9.2 Extrempunkte ... 385
5.2.9.3 Wendepunkte ... 388
5.2.10 Kurvendiskussionen ... 391
5.2.10.1 Checkliste ... 391
5.2.10.2 Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen) ... 392
5.2.10.3 Gebrochenrationale Funktionen ... 398
5.2.10.4 Exponentialfunktionen ... 403
5.2.10.5 Trigonometrische Funktionen ... 408
5.2.11 Extremwertprobleme ... 414
5.2.12 Bestimmung von Nullstellen: Iterationsverfahren nach Newton ... 417
5.3 Aufgaben ... 421

6 Integralrechnung für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen ... 432

6.1 Integralbegriff und Integrierbarkeit ... 432
6.1.1 Unbestimmtes Integral ... 432
6.1.2 Bestimmtes Integral ... 438
6.1.3 Eigenschaften integrierbarer Funktionen ... 440
6.1.4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ... 444
6.1.5 Uneigentliche Integrale ... 451
6.2 Integrationsverfahren ... 453
6.2.1 Vorbemerkungen ... 453
6.2.2 Integration durch Substitution ... 454
6.2.2.1 Allgemeines Prinzip des Verfahrens ... 454
6.2.2.2 Integrale der Form $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$ ... 456
6.2.2.3 Substitution trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen ... 462
6.2.2.4 Integrale der Form $\int R(\sin x; \cos x; \tan x; \cot x)\mathrm{d}x$ ... 464
6.2.3 Partielle Integration ... 465
6.2.4 Integration nach Partialbruchzerlegung ... 469
6.2.4.1 Vorbemerkungen ... 469

6.2.4.2 Nenner mit nur einfachen reellen Nullstellen ... 471
6.2.4.3 Nenner mit mehrfachen reellen Nullstellen ... 472
6.2.4.4 Nenner mit einfachen komplexen Nullstellen ... 474
6.2.4.5 Nenner mit mehrfachen komplexen Nullstellen ... 475
6.2.5 Gebrauch von Integraltafeln ... 477
6.2.6 Numerische Integration ... 478
6.3 Anwendungen der Integralrechnung aus der Geometrie ... 484
6.3.1 Flächeninhalte ... 484
6.3.1.1 Flächen zwischen einer Kurve und der x-Achse ... 484
6.3.1.2 Flächen zwischen zwei Kurven ... 488
6.3.1.3 Betrachtungen zum Flächenelement ... 490
6.3.2 Rauminhalt von Rotationskörpern ... 492
6.3.3 Bogenlängen ... 495
6.3.4 Mantelflächen ... 497
6.4 Anwendungen der Integralrechnung aus anderen Gebieten ... 499
6.4.1 Statisches Moment und Schwerpunkt ... 499
6.4.1.1 Vorbemerkungen ... 499
6.4.1.2 Statische Momente und Schwerpunkt einer ebenen Fläche ... 500
6.4.1.3 Statische Momente und Schwerpunkt eines Körpers ... 503
6.4.1.4 Statische Momente und Schwerpunkt eines ebenen Kurvenstücks ... 504
6.4.1.5 Guldinsche Regeln ... 505
6.4.2 Trägheitsmomente ... 507
6.4.3 Balken auf zwei Stützen mit ungleichmäßig verteilter Streckenlast ... 511
6.4.4 Arbeit ... 514
6.4.4.1 Arbeit bei der Ausdehnung einer Schraubenfeder ... 514
6.4.4.2 Ausdehnungsarbeit eines Gases ... 515
6.4.4.3 Arbeit des Wechselstroms ... 516
6.4.5 Berechnung von Mittelwerten mit Hilfe des bestimmten Integrals ... 517
6.4.5.1 Linearer Mittelwert ... 517
6.4.5.2 Quadratischer Mittelwert ... 519
6.5 Aufgaben ... 520

Lösungen ... 526

Integraltafel ... 571

Sachwortverzeichnis ... 575

1 Grundlagen

1.1 Logik, Mengen, Rechenoperationen

1.1.1 Grundbegriffe der Logik

1.1.1.1 Aussage und Aussagenform

Eine bedeutende Grundlage der Mathematik ist die Logik. Sie ist die Wissenschaft von den Gesetzen des richtigen Denkens. In diesem Abschnitt werden einige Grundbegriffe der Aussagenlogik behandelt und besonders mathematische Schlußweisen erklärt.
Unter einer Zeichenreihe soll im folgenden eine sinnvolle (d.h. nach bekannten Regeln erfolgte) Zusammenstellung von Wörtern oder z.B. mathematischen Zeichen verstanden werden.

Definition

Eine **Aussage** ist ein durch eine Zeichenreihe beschriebener Sachverhalt, der die objektive Realität widerspiegelt und einen *Wahrheitswert* hat, das heißt wahr oder falsch ist.

Eine Aussage ist wahr und hat den Wahrheitswert w, wenn sie die objektive Realität richtig widerspiegelt. Im anderen Fall ist die Aussage falsch und hat den Wahrheitswert f.
Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch. Es gibt also keine Möglichkeit, daß eine Aussage zugleich wahr und falsch ist bzw. weder wahr noch falsch ist. Auf diesem **Satz der Zweiwertigkeit** baut die sogenannte "zweiwertige Logik" oder "binäre Logik" auf, die unserem Realitätsempfinden entspricht. Theoretisch kann auch eine mehrwertige Logik entwickelt werden.
Aussagen werden im folgenden durch kleine lateinische Buchstaben wie p, q, r, ... bezeichnet.

Beispiel 1.1

Aussagen sind:

a) p: "Euler war ein Mathematiker", Wahrheitswert w
b) q: "Jedes Dreieck hat eine Symmetrieachse", Wahrheitswert f
c) r: "$5 + 3 < 10$", Wahrheitswert w
d) s: "Die Zahl 39101 ist eine Primzahl", Wahrheitswert f
(die Zahl hat z.B. den Teiler 61)

Keine Aussagen sind die folgenden Zeichenreihen:

"Es regnet." Der Wahrheitswert ist nicht feststellbar, da Ort und Zeitpunkt nicht fixiert sind.
"Man löse die Gleichung."
"$\sqrt{3} - \sqrt{2}$"

Definition

Eine **Aussagenform** ist eine Zeichenreihe, die eine oder mehrere Variable enthält und zu einer Aussage wird, wenn für die Variablen geeignete Objekte eingesetzt werden.

Aussagenformen werden mit $p(x)$, $q(x, y)$, ... bezeichnet, wenn x, y, ... die Variablen sind.

Beispiel 1.2

Aussagenformen sind

a) $p(x)$: "x ist ein Mathematiker."
Geeignete Objekte, die für x eingesetzt werden können, sind Personen.
Für x = Gauß entsteht eine wahre, für x = Rubens eine falsche Aussage.

b) $q(y)$: "y ist ein Polyeder."
Geeignete Objekte sind geometrische Körper. Für y = Quader liegt eine wahre Aussage vor, für y = Kegel eine falsche Aussage.

c) $r(x, y)$: "$x^2 + xy = 10$"
Wahre Aussagen entstehen z.B. für die Zahlenpaare
$(x; y) = (1; 9)$ oder $\left(3; \frac{1}{3}\right)$.

1.1.1.2 Aussagenfunktionen

Aus gegebenen Aussagen lassen sich neue Aussagen bilden, indem sie z.B. durch Wörter wie "und" bzw. "oder" miteinander verbunden werden. Damit wird die Menge der Aussagen auf sich abgebildet, und bei einer eindeutigen Abbildung spricht man von einer **Aussagenfunktion**. Im folgenden werden die fünf wichtigsten Aussagenfunktionen behandelt. Dabei muß der Zusammenhang zwischen den Wahrheitswerten der gegebenen Aussagen und dem Wahrheitswert der neu gebildeten Aussage hergestellt werden.

Definition

Die **Negation** einer Aussage p ist die Verneinung der Aussage, d.h. die Aussage "**nicht** p", geschrieben $\overline{p}$ (oder $\neg p$).

Die Negation einer Aussage ist genau dann wahr, wenn die Aussage falsch ist.

Beispiel 1.3

a) p : "Die Zahl 623 ist durch 7 teilbar" w
$\overline{p}$: "Die Zahl 623 ist nicht durch 7 teilbar" f
b) q : " $-1000 > 0,1$ " f
$\overline{q}$: " $-1000 \leq 0,1$ " w

Durch eine **Wahrheitswerttabelle** wird der Zusammenhang zwischen den Wahrheitswerten einer Aussage und ihrer Negation dargestellt:

p	$\overline{p}$
w	f
f	w

Mit Hilfe des Bindewortes "und" kann zwei Aussagen eindeutig eine neue Aussage zugeordnet werden.

Definition

Unter der **Konjunktion**[1] zweier Aussagen p und q versteht man die Aussage "***p* und *q***" und bezeichnet sie mit $p \wedge q$ (oder $p \cdot q$).

Die Konjunktion zweier Aussagen ist genau dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind. Durch das Wort "und" wird nämlich verlangt, daß beide durch die Aussagen p und q beschriebenen Sachverhalte richtig sind.
Wahrheitswerttabelle der Konjunktion:

p	q	$p \wedge q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Beispiel 1.4

a) p : "Ein Rechteck hat vier rechte Winkel", w
q : "Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180°" , w
$p \wedge q$: "Ein Rechteck hat vier rechte Winkel und die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180°" , w
b) $p \wedge q$: "Ein Fünfeck hat fünf Diagonalen (w) und ein Sechseck hat sechs Diagonalen (f)", f
c) $p \wedge q$: "9/7 ist ein endlicher Dezimalbruch (f) und 9/7 ist eine ganze Zahl (f)". f

[1] lat. Verbindung

Definition

Unter der **Disjunktion**[1] zweier Aussagen p, q versteht man die Aussage "***p* oder *q***" und bezeichnet sie mit $p \vee q$ (oder $p + q$).

Die Disjunktion zweier Aussagen ist wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist. Durch das Wort "oder" wird nur verlangt, daß wenigstens einer der beiden Sachverhalte, die durch p und q beschrieben werden, richtig ist. Es können aber auch beide Sachverhalte richtig sein, d.h., das Wort "oder" wird bei der Disjunktion im "nicht ausschließenden" Sinn gebraucht. Wahrheitswerttabelle der Disjunktion:

p	q	$p \vee q$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Beispiel 1.5

a) $p \vee q$: "Die Zahlen 15 und 56 sind teilerfremd (w) oder 840 ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 15 und 56 (w)", w

b) $p \vee q$: "Ein Würfel hat 12 Kanten (w) oder ein Würfel hat 8 Seitenflächen (f)", w

c) $p \vee q$: "Im Drachenviereck halbieren sich die Diagonalen (f) oder im Drachenviereck sind die Gegenseiten gleich (f)", f

Unter der **Alternative** versteht man die Verknüpfung von zwei Aussagen durch das "ausschließende oder", auch gesprochen als "entweder – oder". Im Gegensatz zur Disjunktion ist die Alternative auch falsch, wenn beide Aussagen wahr sind. Z.B. sind die Aussagen p : "Der Mars ist ein Planet" und q : "Der Mars ist kleiner als die Erde" wahr, aber die Alternative "Entweder ist der Mars ein Planet oder der Mars ist kleiner als die Erde" ist falsch.

Definition

Unter der **Implikation**[2] aus zwei Aussagen p und q versteht man die Aussage "**wenn *p* , so *q***" und bezeichnet sie mit $p \Longrightarrow q$.

Die Aussage p heißt *Voraussetzung* oder *Prämisse*, die Aussage q heißt *Schluß*, *Folgerung* oder *Konklusion*. Für $p \Longrightarrow q$ wird auch formuliert: "aus p folgt q".
Die Implikation aus zwei Aussagen ist genau dann falsch, wenn die Voraussetzung wahr und die Behauptung falsch ist. Daher ist die Wahrheitswerttabelle der Implikation:

[1] lat. Trennung
[2] Verflechtung

p	q	$p \Longrightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Es ist also jede Implikation wahr, deren Schluß wahr ist, gleichgültig, ob die Voraussetzung wahr oder falsch ist. Ebenso ist jede Implikation wahr, deren Voraussetzung falsch ist, unabhängig vom Wahrheitswert der Behauptung. Die letzten zwei Zeilen der Wahrheitswerttabelle bedeuten: es ist wahr, aus Falschem zu wahrer oder falscher Schlußfolgerung zu kommen.

Beispiel 1.6

a) Für ein gegebenes Viereck seien die folgenden Aussagen wahr:
p : "Das Viereck hat vier rechte Winkel"
q : "In dem Viereck halbieren sich die Diagonalen gegenseitig."
Dann ist die Implikation $p \Longrightarrow q$ wahr.
Wenn das Viereck vier rechte Winkel hat, so halbieren sich die Diagonalen gegenseitig.

b) Für eine gegebene Zahl z sei p : "z ist durch 6 teilbar" wahr und q : " z ist durch 2 teilbar" falsch. Die Implikation $p \Longrightarrow q$ ist falsch:
"Wenn z durch 6 teilbar ist, so ist z durch 2 teilbar."
(Da q falsch ist, soll aus der Teilbarkeit durch 6 die Nichtteilbarkeit durch 2 geschlußfolgert werden, was falsch ist).

c) Die Implikationen:
"Wenn $8 < 4$, so $5 < 8$ " und "wenn $2 < 1$, so $3 < 2$ "
sind nach der Wahrheitstabelle wahr.

Die Implikation $p \Longrightarrow q$ muß von ihrer Umkehrung $q \Longrightarrow p$ unterschieden werden. Wenn z.B. $p \Longrightarrow q$ wahr ist, kann $q \Longrightarrow p$ falsch sein. So lautet die Umkehrung von Beispiel 1.6a):

$q \Longrightarrow p$: Wenn sich in dem Viereck die Diagonalen gegenseitig halbieren, so hat das Viereck vier rechte Winkel. Diese Implikation ist falsch, wenn das Viereck ein Parallelogramm ist.

Den gleichen Wahrheitswert wie die Implikation $p \Longrightarrow q$ hat aber ihre **Kontraposition** $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$. Denn $p \Longrightarrow q$ ist nach der Wahrheitswerttabelle genau dann falsch, wenn p wahr und q falsch ist. Dann ist aber $\overline{p}$ falsch und $\overline{q}$ wahr, und die Implikation $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ ist genau für diesen Fall nach der Wahrheitswerttabelle falsch.

In der Implikation $p \Longrightarrow q$ heißt

p eine **hinreichende Bedingung** für q und

q eine **notwendige Bedingung** für p .

Die erste Bezeichnung besagt, daß aus der Wahrheit von p die Wahrheit von q folgt und die Wahrheit von p Voraussetzung für die Wahrheit von q ist. Nach der zweiten Bezeichnung ist die Wahrheit von q notwendig, damit p wahr ist, denn wenn q nicht wahr ist, dann ist auch p nicht wahr.

Beispiel 1.7

Es sei z eine ganze Zahl
$p \Longrightarrow q$: "Wenn z durch 10 teilbar ist, so ist z durch 5 teilbar."
Wenn p wahr ist, also durch 10 teilbar, z.B. für $z = 60$, so ist auch q wahr, d.h. z durch 5 teilbar. Wenn q wahr ist, so kann p wahr sein, muß es aber nicht. So ist $z = 25$ durch 5 teilbar, aber nicht durch 10.
Ist schließlich q nicht wahr, z.B. ist $z = 24$ nicht durch 5 teilbar, dann ist z auch nicht durch 10 teilbar, also p ist falsch.

Bei gewissen wahren Implikationen $p \Longrightarrow q$ ist auch die Umkehrung $q \Longrightarrow p$ wahr.

Definition

Unter der **Äquivalenz**[1] der beiden Aussagen p und q versteht man die Aussage " p **genau dann, wenn** q " und bezeichnet sie mit $p \Longleftrightarrow q$.

Die Äquivalenz zweier Aussagen ist genau dann wahr, wenn die Aussagen entweder beide wahr oder beide falsch sind.
Wahrheitswerttabelle für die Äquivalenz:

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Für $p \Longleftrightarrow q$ wird auch formuliert: " p dann und nur dann, wenn q " oder "aus p folgt q und umgekehrt" oder " p ist notwendig und hinreichend für q ".

Beispiel 1.8

Für ein gegebenes Dreieck seien die folgenden Aussagen wahr
p : "Das Dreieck hat drei gleichlange Seiten"
q : "Das Dreieck hat drei gleichgroße Winkel"
$p \Longleftrightarrow q$: "Das Dreieck hat genau dann drei gleichlange Seiten, wenn es drei gleichgroße Winkel hat."

Die Aussagen p und q sind gleichwertig, es gilt $p \Longrightarrow q$ und $q \Longrightarrow p$.

Die behandelten Aussagenfunktionen sind auch für Aussagenformen gültig. Nach der Belegung der Variablen ergeben sich dann in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der Aussagen die Wahrheitswerte der Aussagenfunktionen.
Die Aussagenfunktionen können selbst wieder miteinander verknüpft werden, so daß nun neue Aussagenfunktionen entstehen, die z.B. in der Schaltalgebra verwendet werden. Dabei ist von Bedeutung, daß zwei Aussagenfunktionen logisch gleichwertig, also äquivalent sind, wenn ihre vollständigen Wahrheitswerttabellen übereinstimmen.

[1] Gleichwertigkeit

Beispiel 1.9

Für die beiden Aussagefunktionen $\overline{p \wedge q}$ ("es gilt nicht die Verknüpfung p und q") und $\overline{p} \vee \overline{q}$ ("es gilt nicht p oder es gilt nicht q") werden schrittweise die Wahrheitswerttabellen aufgestellt.

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$
w	w	w	f
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	w

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$
w	w	f	f	f
w	f	f	w	w
f	w	w	f	w
f	f	w	w	w

Die Funktionen $\overline{p \wedge q}$ und $\overline{p} \vee \overline{q}$ haben gleiche Wahrheitswerttabellen, sie sind also äquivalent:

$$\overline{p \wedge q} \Longleftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}.$$

Weitere Äquivalenzen von Aussagefunktionen sind zum Beispiel

$$\overline{p \vee q} \Longleftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$$

oder $(p \wedge (q \vee r)) \Longleftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

1.1.1.3 Beweismethoden

Um einen mathematischen Satz zu beweisen, wird die Wahrheit dieses Satzes aus anderen bereits als wahr erkannten Sätzen geschlußfolgert. Je nach dem Vorgehen bei der Schlußfolgerung unterscheidet man verschiedene Beweismethoden.

Direkter Beweis

Es wird von einem bereits als richtig bewiesenen Satz (Voraussetzung p) ausgegangen und daraus die Wahrheit des zu beweisenden Satzes (Behauptung q) abgeleitet. In der Implikation $p \Longrightarrow q$ folgt aus der Wahrheit der Voraussetzung die Wahrheit der Behauptung entsprechend der ersten Zeile der Wahrheitswerttabelle.

Beispiel 1.10

Man beweise die Ungleichung

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \quad \text{für} \quad a > 0, b > 0$$

Beweis:

Voraussetzung ist die als richtig erkannte binomische Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Durch Subtraktion von 4ab folgt

$$(a+b)^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0$$

Addition von $4ab$ ergibt

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

Radizieren unter Beschränkung auf das positive Vorzeichen wegen a >0, b>0 und Division durch 2 führt auf

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, was zu beweisen war.

Zur direkten Beweismethode gehört auch der Beweis durch sogenanntes **Verifizieren** (Nachweis der Wahrheit). Man geht von der Wahrheit der Behauptung q aus und zeigt die Wahrheit der Voraussetzung p, was nur bei einer Äquivalenz $p \Longleftrightarrow q$ möglich ist. Praktisch bedeutet dies, daß alle Rechenoperationen, die q in p überführen, eindeutig umkehrbar sein müssen.

Beispiel 1.11

Man beweise die Ungleichung

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^n < \frac{1}{1-a} \quad \text{für} \quad 0 < a < 1. \tag{I}$$

Beweis:

Durch Multiplikation der Gleichung mit $1 - a$ (wegen $1 - a > 0$ bleibt das Ungleichheitszeichen bestehen) folgt

$$1 - a + a - a^2 + a^2 - a^3 + \ldots + a^n - a^{n+1} < 1$$
$$1 - a^{n+1} < 1 \tag{II}$$

Wegen $0 < a^{n+1} < 1$ ist diese Gleichung richtig. Da die durchgeführten Rechenoperationen eindeutig umkehrbar sind, sind die Gleichungen (I) und (II) äquivalent und die Wahrheit von (I) ist bewiesen.

Beispiel 1.12

Als einfaches Beispiel für einen falschen Beweis durch Verifikation diene der Beweis der (falschen) Gleichung

$$1 - x = x - 1 \qquad \text{für} \qquad x \neq 1$$

Durch Quadrieren folgt die richtige Gleichung

$$(1 - x)^2 = (x - 1)^2.$$

Da die Umkehrung des Quadrierens das nicht eindeutige Radizieren mit dem Wurzelexponenten 2 ist, ist die Wahrheit der Ausgangsgleichung nicht bewiesen.

Indirekter Beweis

Um die Behauptung q zu beweisen, geht man von der Negation $\overline{q}$ aus und schließt von $\overline{q}$ auf eine falsche Aussage r: $\overline{q} \Longrightarrow r$. Dann muß aber $\overline{q}$ auch falsch sein, da man nach der 4. Zeile der Wahrheitswerttabelle der Implikation nur von einer falschen Voraussetzung zu einer falschen Behauptung kommt. Wenn aber $\overline{q}$ falsch ist, muß q wahr sein.

Beispiel 1.13

Zu beweisen ist der Satz: Wenn die Stufenwinkel α und β (Bild 1.1a)) gleich groß sind, dann sind die Geraden g_1 und g_2 zueinander parallel.
Indirekter Beweis: Voraussetzung: $\alpha = \beta$. Behauptung q: $g_1 \parallel g_2$.
Negation der Behauptung ist $\overline{q}$: $g_1 \nparallel g_2$. Wenn aber beide Geraden nicht parallel sind, dann schneiden sie sich. Der Schnittpunkt sei S (Bild 1.1b)). Im Dreieck AMB ist β als Außenwinkel gleich der Summe der nicht anliegenden Innenwinkel,

also $\beta = \alpha + \gamma$ oder $\beta > \alpha$. Das ist eine falsche Aussage r, nämlich ein Widerspruch zur Voraussetzung $\alpha = \beta$. Folglich ist $\overline{q}$ falsch, damit q wahr und der Satz ist bewiesen.

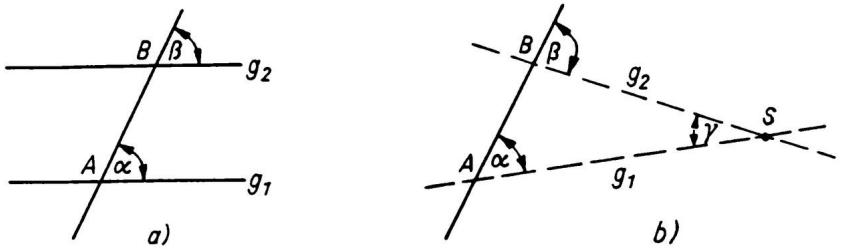


Bild 1.1

Beweis durch vollständige Induktion

Mit dem Beweis durch vollständige Induktion werden Sätze oder Formeln bewiesen, in denen natürliche Zahlen vorkommen, die in gewissem Umfang frei wählbar sind: Dem Beweis liegt das **Prinzip der vollständigen Induktion** zugrunde:

Ist eine Aussage für eine natürliche Zahl n_0 wahr und folgt aus der Wahrheit der Aussage für eine beliebige natürliche Zahl $n \geq n_0$ die Wahrheit der Aussage für $n + 1$, so ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ gültig.

Der Beweis erfolgt danach in folgenden Schritten:

1. Als *Induktionsanfang* wird die Wahrheit der Aussage für $n = n_0$ gezeigt (meist ist $n_0 = 1$).
2. *Induktionsannahme*, daß die Aussage für n wahr ist (Voraussetzung p)
3. *Induktionsbehauptung* (q), die Aussage sei wahr für $n + 1$.
4. *Beweis* der Implikation $p \Longrightarrow q$.

Die Schritte 3. und 4. werden zusammengefaßt als *Induktionsschluß* bezeichnet.

Beispiel 1.14

Man beweise:
Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist eine Quadratzahl und zwar n^2.
Z.B. gilt: $1 + 3 = 4 = 2^2, 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$ usw. Allgemein ist
$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Beweis:
1. Die Aussage ist für $n = n_0 = 1$ wahr: $1 = 1$.
2. Es wird angenommen, die Aussage sei für n wahr:
$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.
3. Die Behauptung, die Aussage gelte auch für $n + 1$, lautet:
$1 + 3 + 5 + \ldots + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$.
4. Die Behauptung wird bewiesen. Zu der Gleichung für n wird die auf $2n - 1$ folgende ungerade natürliche Zahl $2n + 1$ addiert:
$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1$.
Die Umformung $2n + 1 = 2n + 2 - 1 = 2(n + 1) - 1$
und die Formel $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ ergeben die unter 3. aufgeschriebene Behauptung.

1.1.2 Mengen

1.1.2.1 Definition und Darstellung von Mengen

In diesem Abschnitt werden kurz die wichtigsten Definitionen, Relationen und Operationen der Mengenlehre behandelt, soweit sie für die folgenden mathematischen Betrachtungen von Bedeutung sind.
Die Verwendung des Mengenbegriffs in Sätzen wie "die Menge der Bücher in einem Bücherschrank", "die Menge der Einwohner einer Stadt" oder "die Menge der natürlichen Zahlen" führt zu der von GEORG CANTOR (1845-1918), dem Begründer der Mengenlehre, gegebenen Erklärung.

> Eine **Menge** ist die Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens mit gemeinsamen Eigenschaften zu einem Ganzen. Die Objekte heißen *Elemente* der Menge.

Nach dieser Erklärung gehören Begriffe wie "Wärmemenge" oder "Flüssigkeitsmenge" nicht zum mathematischen Mengenbegriff.
Der Mengenbegriff kann auch mit Hilfe einer Aussagenform $p(x)$ erklärt werden.

> Gegeben ist eine Aussagenform $p(x)$. Alle Objekte x , die diese Aussagenform zu einer wahren Aussage machen, bilden eine Menge und sind deren Elemente.

$p(x)$ heißt die *definierende Aussagenform* der Menge, die Menge heißt die *Lösungs-* oder *Erfüllungsmenge* von $p(x)$.

Mengen werden durch große lateinische Buchstaben A , B, ..., M, N, ..., ihre Elemente durch kleine lateinische Buchstaben a , b , ..., m , n , ... bezeichnet.
Eine Menge kann beschrieben werden durch Angabe der Elemente, die in einer geschweiften Klammer stehen:

$A = \{a, b, c, d\}$ gesprochen: "A ist die Menge der Elemente a, b, c, d ",

oder man beschreibt die Menge mit Hilfe der definierenden Aussagenform:

$A = \{x | p(x)\}$ gelesen: "A ist die Menge aller x, die die Aussagenform $p(x)$ erfüllen."

Beispiel 1.15

a) Die Menge der Primzahlen zwischen 1 und 10 läßt sich beschreiben durch

$A = \{z | z$ ist eine Primzahl zwischen 1 und $10\}$ oder durch
$A = \{2, 3, 5, 7\}$

b) $B = \{x | x$ ist eine gerade Zahl $\} = \{... -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$

Wie Beispiel 1.15 zeigt, gibt es *endliche* und *unendliche* Mengen. Eine Menge mit nur einem Element heißt **Einermenge**: $A = \{a\}$.
Es ist notwendig, auch eine Menge zu definieren, die kein Element enthält. Sie heißt **leere Menge** und wird dargestellt durch: $A = \{\} = \emptyset$.

(Man unterscheide die leere Menge von der Einermenge $A = \{0\}$, deren Element die Zahl Null ist.)

Beispiel 1.16

a) $L = \{x|2x - 6 = 0\}$. Die Aussagenform (Gleichung) $p(x) : 2x - 6 = 0$ wird nur von $x = 3$ erfüllt. Die Lösungsmenge der Gleichung ist eine Einermenge: $L = \{3\}$.

b) $L = \{x|x^2 - 4x + 5 = 0$ und x ist reell$\}$. Es gibt keine reelle Zahl x, die die Gleichung erfüllt. Die Lösungsmenge der Gleichung ist leer: $L = \emptyset$.

Weiterhin bedeuten:
$a \in A$: " a ist Element der Menge A "
$b \notin A$: " b ist nicht Element der Menge A "
Eine anschauliche Darstellung von Aufgaben der Mengenalgebra ergibt sich, wenn man die Elemente der Menge als Punkte einer Ebene betrachtet, die von einer Kurve umschlossen werden (Venn-Diagramm).

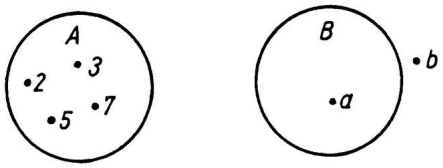


Bild 1.2 a) b)

Bild 1.2a) zeigt die Menge aus Beispiel 1.15a). Bei einer unendlichen Menge bedeutet jeder Punkt innerhalb der Kurve ein Mengenelement.
In Bild 1.2b ist z.B. $a \in B$, $b \notin B$. Man nennt diese Mengen auch *Punktmengen.*

1.1.2.2 Relationen zwischen Mengen

Entsprechend den Relationen zwischen zwei Zahlen wie z.B. $a = b$ oder $a < b$ können zwei Mengen miteinander verglichen werden.

Definition

Zwei Mengen A und B heißen **gleich** genau dann, wenn jedes Element von A auch Element von B ist und umgekehrt jedes Element von B auch Element von A ist. Man schreibt: $\boldsymbol{A = B}$, gelesen: "A gleich B ".

Mit den Symbolen der Logik lautet die Definition.

$$(a \in A \Longleftrightarrow a \in B) \Longleftrightarrow (A = B).$$

Die Gleichheit verlangt also, daß beide Mengen die gleichen Elemente enthalten. Es reicht nicht die gleiche Anzahl von Elementen aus.

Beispiel 1.17

$A = \{x|p(x)\} = \{x|x$ ist eine durch 3 teilbare ganze Zahl$\}$
$B = \{x|q(x)\} = \{x|x$ ist eine ganze Zahl, deren Quersumme durch 3 teilbar ist$\}$
Da für jede durch 3 teilbare Zahl auch die Quersumme durch 3 teilbar ist und umgekehrt, ist $A = B$.

Der Gleichheit der Mengen entspricht die Äquivalenz ihrer definierenden Aussagenformen.

Für $A = \{x|p(x)\}$, $B = \{x|q(x)\}$ gilt:

$$(p(x) \Longleftrightarrow q(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad (A = B).$$

Definition

Eine Menge A heißt **Teilmenge** oder **Untermenge** der Menge B genau dann, wenn jedes Element von A auch Element von B ist. Man schreibt: $\boldsymbol{A \subseteq B}$, gelesen: " A ist Teilmenge von B " oder " A ist enthalten in B ".

B heißt *Obermenge* von A . Mit den Symbolen der Logik lautet die Definition:

$$(a \in A \Longrightarrow a \in B) \Longleftrightarrow (A \subseteq B).$$

Die Definition läßt auch zu, daß beide Mengen gleich sind. Gibt es mindestens ein Element von B, das nicht zu A gehört, so heißt A **echte Teilmenge** von B, und man schreibt $A \subset B$ oder $A \subsetneq B$.
Die leere Menge ist Teilmenge jeder beliebigen Menge: $\emptyset \subseteq A$, und jede Menge ist in sich selbst enthalten: $A \subseteq A$.

Beispiel 1.18

a) $A = \{a, b, e\}, B = \{a, b, c, d, e, f\}$. $A \subset B$

b) $P = \{x|p(x)\} = \{x|x \text{ ist ein Parallelogramm}\}$
$Q = \{x|q(x)\} = \{x|x \text{ ist ein Quadrat}\}$
Da jedes Quadrat ein Parallelogramm ist, aber nicht jedes Parallelogramm ein Quadrat, ist die Menge aller Quadrate eine echte Teilmenge der Menge aller Parallelogramme: $Q \subset P$.

Ist $A = \{x|p(x)\}$ Teilmenge von $B = \{x|q(x)\}$, so muß jedes Element, das $p(x)$ erfüllt, auch $q(x)$ erfüllen, das heißt, die Teilmengenrelation entspricht der Implikation $p(x) \Longrightarrow q(x)$, und man kann schreiben:

$$(p(x) \Longrightarrow q(x)) \Longleftrightarrow (A \subseteq B).$$

Nach Abschn. 1.1.1.2 ist $p(x)$ hinreichend für $q(x)$ und $q(x)$ notwendig für $p(x)$. Die Begriffe lassen sich jetzt anschaulich am Bild der Mengen A und B deuten (Bild 1.3).

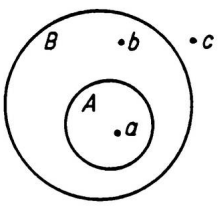


Bild 1.3

Die Aussage $a \in A$ ist hinreichend für $a \in B$. Gehört ein Element zu B, kann nicht hinreichend daraus geschlossen werden, daß es zu A gehört. Es kann Element von

A sein wie a oder auch nicht wie b . Die Bedingung, "Element von B" ist aber notwendig für "Element von A". Z.B. gilt $c \notin B$ und daraus folgt $c \notin A$.
Zwei Mengen A und B heißen **disjunkt**, wenn sie kein gemeinsames Element haben.

1.1.2.3 Operationen mit Mengen

Durch eine Rechenoperation wird zwei Zahlen eine dritte zugeordnet, z.B. $a+b=c$. Ebenso entsteht durch eine Mengenoperation aus zwei gegebenen Mengen eine neue Menge.

Definition

Unter der **Vereinigung** der Mengen A und B versteht man die Menge C derjenigen Elemente, die zu A **oder** zu B gehören. Man schreibt $A \cup B = C$, gelesen: " A vereinigt mit B ist C " oder " C ist die Vereinigungsmenge von A und B ".

Die Definition besagt:

$$(a \in A \vee a \in B) \Longleftrightarrow (a \in A \cup B)$$

Das verwendete "oder" ist das "nicht ausschließende oder" (vgl. 1.1.1.2), d.h. zur Menge C gehören auch Elemente, die zu A und zu B gehören.

Beispiel 1.19

a) $A = \{a, b, c, d\}, B = \{e, f, g\}, C = A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
b) $A = \{a, b, c, d\}, B = \{c, d, e\}, C = A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$
c) $A = \{a, b, c, d\}, B = \{a, b, c, d, e, f\}, C = A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\} = B$

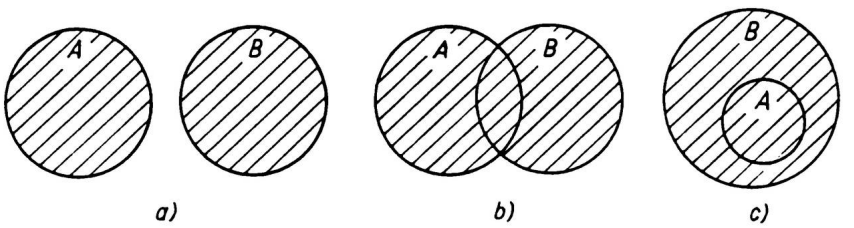


Bild 1.4

Den Beispielen 1.19a) bis c) entsprechen die Punktmengen in den Bildern 1.4a) bis c). $C = A \cup B$ wird durch die Grauflächen dargestellt.
Es gilt stets $A \cup \emptyset = A$ und $A \cup B = B \cup A$ (Kommutativgesetz). Die Vereinigung ist auch für mehr als zwei Mengen erklärt. Bei drei Mengen gilt z.B.

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C \text{ (Assoziativgesetz).}$$

Mit $A = \{x|p(x)\}, B = \{x|q(x)\}$ gilt

$$C = A \cup B = \{x|p(x) \vee q(x)\}.$$

Die Vereinigung zweier Mengen entspricht der Disjunktion ihrer definierenden Aussagenformen.

Definition

Unter dem **Durchschnitt** der Mengen A und B versteht man die Menge C derjenigen Elemente, die zu A **und** zu B gehören. Man schreibt: $\boldsymbol{A \cap B = C}$, gelesen: "der Durchschnitt von A und B ist C " oder: " A geschnitten mit B ist C ".

Nach der Definition gilt:

$$(a \in A \wedge a \in B) \iff (a \in A \cap B)$$

Beispiel 1.20

a) $A = \{a, b, c, d\}, B = \{c, d, e, f\}, C = A \cap B = \{c, d\}$

b) $A = \{a, b, c, d\}, B = \{e, f, g\}, C = A \cap B = \emptyset$

c) $A = \{a, b, c, d\}, B = \{a, b, c, d, e, f\}, C = A \cap B = \{a, b, c, d\} = A$

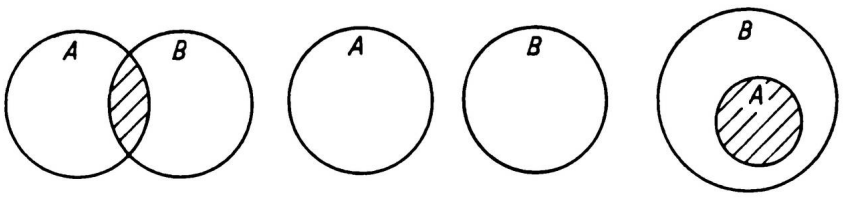


Bild 1.5 a) b) c)

Den Beispielen 1.20a) bis c) entsprechen die Punktmengen in den Bildern 1.5a) bis c).

Mit $A = \{x|p(x)\}$, $B = \{x|q(x)\}$ gilt

$$C = A \cap B = \{x|p(x) \wedge q(x)\} .$$

Der Durchschnitt zweier Mengen entspricht der Konjunktion ihrer definierenden Aussagenformen.

Beispiel 1.21

$A = \{x|x$ ist ein Trapez$\}$, $B = \{x|x$ ist ein Drachenviereck$\}$

Das Trapez hat ein Paar paralleler Gegenseiten, im Drachenviereck stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander. Für die Menge $A \cap B$ muß die erste und die zweite Bedingung erfüllt sein, das tritt ein beim Rhombus.

$C = A \cap B = \{x|x$ ist ein Rhombus$\}$

Analog zu den Formeln für die Vereinigung gilt für den Durchschnitt:

$$A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap B = B \cap A, A \cap (B \cap C)) = (A \cap B) \cap C .$$

Definition

Unter der **Differenz** der Mengen A und B versteht man die Menge C derjenigen Elemente, die zu A , aber nicht zu B gehören. Man schreibt: $\boldsymbol{A \setminus B = C}$, gelesen: "die Differenzmenge von A und B ist C ".

Die Definition besagt:

$$((a \in A) \wedge (a \notin B)) \iff (a \in A \setminus B) .$$

Beispiel 1.22

a) $A = \{a, b, c, d\}, B = \{c, d, e, f\}, C = A \setminus B = \{a, b\}$
b) $A = \{a, b, c, d\}, B = \{e, f, g\}, C = A \setminus B = \{a, b, c, d\} = A$
c) $A = \{a, b, c, d\}, B = \{a, b, c, d, e, f\}, C = A \setminus B = \emptyset$

Man vergleiche zu Beispiel 1.22a) bis c) die Punktmengen in den Bildern 1.6a) bis c).

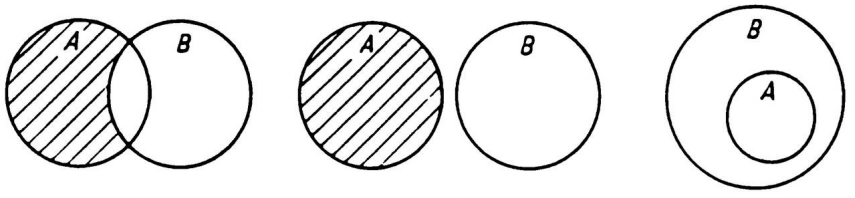


Bild 1.6 a) b) c)

Beispiel 1.23

$A = \{x | x \text{ ist Teiler von } 24\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
$B = \{x | x \text{ ist Teiler von } 42\} = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$
$C = A \setminus B = \{x | x \text{ ist Teiler von 24 und nicht Teiler von 42}\} = \{4, 8, 12, 24\}$

Mit $A = \{x | p(x), B = \{x | q(x)\}$ gilt $C = A \setminus B = \{x | p(x) \wedge \overline{q(x)}\}$.

Definition

Gegeben sind eine Menge M und eine Teilmenge A von M. Unter der **Komplementärmenge** von A bezüglich M versteht man die Menge $\overline{A}$ der Elemente von M, die nicht zu A gehören.

$\overline{A}$ wird auch kurz als **Komplement** von A bezüglich M bezeichnet.
Für jedes $a \in M$ gilt: $(a \in \overline{A}) \Longleftrightarrow (a \notin A)$ (Bild 1.7). Es ist $\overline{\overline{A}} = A$.

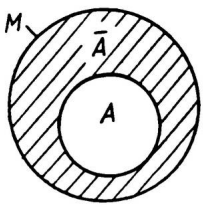


Bild 1.7

Beispiel 1.24

$M = \{x | x \text{ ist eine natürliche Zahl von 1 bis 20}\}$
$A = \{x | x \text{ ist Primzahl aus } M\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
$\overline{A} = \{x | x \text{ ist keine Primzahl aus } M\} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$
Weitere Formeln und Sätze zu Mengenoperationen, wie Distributivgesetze, z.B. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, Gesetze von DE MORGAN usw., findet man in den Formelsammlungen.

Aufgaben 1.1 bis 1.14

1.1.3 Zahlenbereiche und Rechenoperationen

1.1.3.1 · Zahlenbereiche

Mathematischen Aufgaben und Überlegungen müssen häufig unterschiedliche Zahlenbereiche zugrunde gelegt werden. Man schreibt für die

Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ und
$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, ...\}$, für die

Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$, und für die

Menge der rationalen[1] Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ z | z = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

In $\mathbb{N}$ sind Addition, Multiplikation und Potenzieren, in $\mathbb{Z}$ zusätzlich Subtraktion und in $\mathbb{Q}$ außerdem die Division (mit Ausnahme der Division durch Null) unbeschränkt ausführbar. Rationale Zahlen sind nicht eindeutig darstellbar. Z.B. ist $z = 1/7 = 8/56 = ...$ Man vereinbart, bei der Darstellung einer rationalen Zahl Zähler a und Nenner b als teilerfremd anzugeben. Jede ganze Zahl ist wegen $z = z/1$ auch eine rationale Zahl. Rationale Zahlen sind entweder endliche (abbrechende) Dezimalbrüche wie $9/4 = 2,25$ oder unendliche periodische Dezimalbrüche wie $1/3 = 0,333... = 0,\overline{3}$, $8/33 = 0,2424... = 0,\overline{24}$, $29/22 = 1,31818... = 1,3\overline{18}$.
Um auch unbeschränkt aus rationalen Zahlen die Wurzel ziehen zu können, sind noch zwei Erweiterungen des Zahlenbereiches $\mathbb{Q}$ notwendig.
Die Wurzel aus einer Zahl $z \in \mathbb{Q}$, für die nicht $z = a^2$, $a \in \mathbb{Q}$ gilt, ist keine rationale Zahl, z.B. $\sqrt{2}$, $\sqrt{7/3}$, $\sqrt{-5}$. Für die erste Erweiterung sei $z > 0$.

Beispiel 1.25

Es ist zu beweisen, daß $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

Beweis:
Es wird ein indirekter Beweis geführt (vgl. Abschn. 1.1.1.3).
Behauptung q: $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.
Negation der Behauptung $\overline{q}$: $\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl, d.h.
$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ und p, q teilerfremd.

Durch Quadrieren folgt: $2 = \frac{p^2}{q^2}$ oder $2q^2 = p^2$. (I)

Damit sind p^2 und folglich p gerade, also $p = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$.
Eingesetzt in (I) ergibt $2q^2 = (2m)^2 = 4m^2, q^2 = 2m^2$. Damit sind auch q^2 und q gerade, d.h. $q = 2n, n \in \mathbb{Z}$. p und q haben den gemeinsamen Teiler 2, sind also nicht teilerfremd, im Widerspruch zur Behauptung $\overline{q}$. Deshalb ist $\overline{q}$ falsch und die Behauptung q richtig.

[1] lat. vernünftig

Die nichtrationalen Zahlen heißen **irrationale**[1] **Zahlen**. Sie sind unendliche, nicht periodische Dezimalbrüche. Dazu gehören die meisten Funktionswerte der Wurzelfunktionen, logarithmischen Funktionen oder trigonometrischen Funktionen, auch die Zahlen π und e. Irrationalzahlen können bei praktischen Aufgaben durch rationale Zahlen nur angenähert werden.
Alle rationalen und irrationalen Zahlen ergeben zusammen die

Menge der reellen Zahlen

$$\mathbb{R} = \{z | z \text{ ist ein Dezimalbruch}\}.$$

Die reellen Zahlen lassen sich in bekannter Weise eineindeutig den Punkten einer *Zahlengeraden* zuordnen (Bild 1.8).

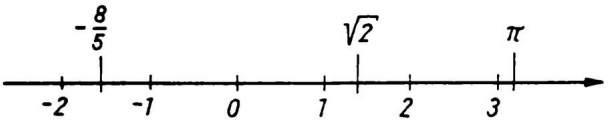


Bild 1.8

Die den reellen Zahlen entsprechenden Punkte bedecken die Zahlengerade lückenlos. In der Menge der reellen Zahlen gibt es eine *Ordnungsrelation*, d.h. für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt stets entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$.
Um auch aus negativen reellen Zahlen die Wurzel ziehen zu können, wird der Zahlbereich nochmals erweitert. Z.B. hat die Gleichung $x^2 + 4 = 0$ im Bereich der reellen Zahlen wegen $x_{1,2} = \pm\sqrt{-4}$ keine Lösung. Es wird eine neue Zahl j definiert, in der Mathematik auch i genannt, für die gilt

$$\boxed{\mathrm{j}^2 = -1} \tag{1.1}$$

j heißt **imaginäre**[2] **Einheit**. Alle Zahlen $b \cdot \mathrm{j}$ mit $b \in \mathbb{R}$ heißen **imaginäre Zahlen**, z.B. $3\mathrm{j}, -\frac{5}{2}\mathrm{j}, \sqrt{7} \cdot \mathrm{j}$. Für $\sqrt{-4}$ läßt sich jetzt schreiben $\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2\mathrm{j}$. Die Zusammenfassung einer reellen Zahl a und einer imaginären Zahl $b\mathrm{j}$ heißt **komplexe Zahl**:

$$z = a + b\mathrm{j}.$$

a heißt *Realteil*, b *Imaginärteil* von z. Beispiele für komplexe Zahlen sind $2 + 4\mathrm{j}$, $1 - \frac{3}{2}\mathrm{j}$. Zwei komplexe Zahlen mit gleichem Realteil a, deren Imaginärteile sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, heißen *konjugiert komplexe Zahlen*: $z = a + b\mathrm{j}$, $\overline{z} = a - b\mathrm{j}$. Z.B. hat die quadratische Gleichung $x^2 - 10x + 34 = 0$ die konjugiert komplexen Lösungen: $x_1 = 5 + 3\mathrm{j}$, $x_2 = 5 - 3\mathrm{j}$. In der Mathematik wird bewiesen, daß für komplexe Zahlen die gleichen Rechengesetze gelten wie für die reellen Zahlen, hinzu kommt das Radizieren bei negativen Radikanden.

[1] lat. mit dem Verstand nicht faßbar
[2] lat. fr. eingebildet, unwirklich

Menge der komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} = \{z| \quad z = a + b\mathrm{j}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{j}^2 = -1\}$$

Wegen $a = a + 0 \cdot \mathrm{j}$ läßt sich jede reelle Zahl als komplexe Zahl darstellen. Für die behandelten Zahlenmengen gilt

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Man nennt $\mathbb{C}$ *algebraisch abgeschlossen*, da jede algebraische Gleichung im Bereich $\mathbb{C}$ lösbar ist.
In Abschnitt 2 werden die komplexen Zahlen ausführlich behandelt.

Die reellen Zahlen werden in einem **Positionssystem** dargestellt, d.h. die verwendeten Ziffern haben neben dem Zahlenwert auch einen Stellenwert. Verwendet werden eine natürliche Zahl $b \geq 2$ als *Basis* und b *Grundziffern*. Eine reelle Zahl z hat dann die Darstellung

$$z_{(b)} = \sum_{i=-m}^{n} z_i b^i \qquad \text{mit den Grundziffern } z_i.$$

Dezimalsystem

$b = 10$, Grundziffern: 0, 1, 2,...,9

Beispiel: $z_{(10)} = 3405,27$
$= 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}$

Binärsystem

$b = 2$, Grundziffern: 0, 1

Beispiel: $z_{(2)} = 110101$
$= 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 53_{(10)}$

Hexagesimalsystem

$b = 16$, Grundziffern: $0, 1, 2, ..., 9, A, B, ..., F$
(mit $A = 10$, $B = 11$,..., $F = 15$).
Beispiel: $z_{(16)} = 5B8 = 5 \cdot 16^2 + B \cdot 16^1 + 8 \cdot 16^0 = 1464_{(10)}$

Binär- und Hexagesimalsystem werden in der Rechentechnik verwendet. Die **Konvertierung**, d.h. die Umrechnung von einem System in ein anderes, kann mit dem Hornerschema (vgl. 1.3.3.1) erfolgen.

1.1.3.2 Rechenoperationen der ersten und zweiten Stufe

Diese Rechenoperationen werden als bekannt vorausgesetzt. Ihre sichere Anwendung, z.B. bei der Umformung von Termen oder bei der Lösung von Gleichungen, muß gewährleistet sein. Abschn. 1.5 enthält hierzu einige Aufgaben zur Wiederholung und Festigung.

Die wichtigsten Gesetze und Bezeichnungen sind kurz zusammengestellt.

Addition:	$a+b=c$,	a, b: Summanden, c: Summe
Subtraktion:	$a-b=c$,	a : Minuend, b: Subtrahend, c: Differenz
Multiplikation:	$a\cdot b=c$,	a, b: Faktoren, c: Produkt (oder a : Multiplikand, b : Multiplikator)
Division:	$a:b=c$,	a: Dividend, b: Divisor, c: Quotient

Für die Addition und Multiplikation gelten die Eigenschaften der

Kommutativität:	$a+b=b+a$,	$a\cdot b=b\cdot a$	
Assoziativität:	$(a+b)+c=a+(b+c)$,	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$	(1.2)
Distributivität:	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$		

Häufig wird der folgende **Satz** gebraucht:

Ein Produkt ist gleich null genau dann, wenn mindestens ein Faktor gleich null ist:

$$a\cdot b=0 \Longleftrightarrow a=0 \vee b=0 \tag{1.3}$$

So können z.B. für die Gleichung $(x-5)(x^2-9)=0$ durch Aufspalten in $x-5=0$, $x^2-9=0$ die drei Lösungen $x_1=5$, $x_2=3$, $x_3=-3$ sofort gewonnen werden.

Für das **Rechnen mit Brüchen** gelten die Gesetze (Nenner stets $\neq 0$)

Erweitern:	$\dfrac{a}{b}=\dfrac{a\cdot c}{b\cdot c}$,	Kürzen:	$\dfrac{a}{b}=\dfrac{a:c}{b:c}$
Addition:	$\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}=\dfrac{a+c}{b}$		(1.4)
Multiplikation:	$\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\cdot c}{b\cdot d}$,	Division:	$\dfrac{a}{b}:\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Man beachte besonders bei Doppelbrüchen

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{b\cdot c} \quad , \qquad \frac{a}{\frac{b}{c}}=\frac{a\cdot c}{b}.$$

Die Bruchgleichung $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ läßt sich auch als Proportion schreiben. Es gilt

$$a:b=c:d \Longleftrightarrow ad=bc \tag{1.5}$$

d.h. in der Proportion ist das Produkt der inneren Glieder gleich dem Produkt der äußeren Glieder:

Die Sonderrolle der Null zeigt sich in den Gleichungen

$$a + 0 = a\,, \quad a \cdot 0 = 0, \quad \frac{a}{0} \text{ nicht definiert}, \quad \frac{0}{b} = 0 \quad (b \neq 0).$$

Die letzte Beziehung wird ebenfalls häufiger gebraucht:

Ein Bruch ist genau dann gleich null, wenn der Zähler gleich null (und der Nenner ungleich null) ist:

$$\frac{a}{b} = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \qquad (b \neq 0) \tag{1.6}$$

Oft sind mehrere Zahlen zu summieren, deren Summanden die Glieder a_k einer Zahlenfolge sind, d.h. nach einem Bildungsgesetz von natürlichen Zahlen k abhängen. Zum Beispiel ist:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 5 + 8 + 11 + 14,$$
$$\text{Bildungsgesetz: } a_k = 2 + 3k, \qquad k = 1, 2, 3, 4$$

In diesem Fall gibt es eine kurze Schreibweise durch Verwendung des **Summenzeichens** $\sum$ (griechischer Buchstabe Sigma).

Definition

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \tag{1.7}$$

gelesen: "Summe aller Zahlen a_k für k von 1 bis n"
k heißt *Summationsindex*, 1 ist die *untere*, n die *obere Summationsgrenze.*

Die Summationsgrenzen können beliebige ganze Zahlen sein.

Beispiel 1.26

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}(2k+1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^{k-1}k}{k+1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5}$

c) $\displaystyle\sum_{i=-2}^{2} 2^i = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4$

Für das Summenzeichen gelten die Formeln

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$
$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \sum_{k=1}^{n} c = nc \tag{1.8}$$

Man beachte aber

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k \neq \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k, \text{ denn es ist}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \quad \text{und}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$$

Für das Produkt der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gilt unter Verwendung des **Produktzeichens** Π (griechischer Großbuchstabe Pi) die

Definition

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \tag{1.9}$$

gelesen: "Produkt aller Zahlen a_k für k von 1 bis n "

Bezeichnungen und Formeln entsprechen denen des Summenzeichens.

Beispiel 1.27

$$\prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Definition

Das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n heißt **n-Fakultät**

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \tag{1.10}$$

1.1.3.3 Potenzen und Wurzeln

Potenzen und Wurzeln werden ebenfalls als bekannt vorausgesetzt, und es werden nur die wichtigsten Aussagen zusammengefaßt. Abschnitt 1.5 enthält Aufgaben zur Wiederholung und Festigung.

Definition

Das Produkt aus n gleichen Faktoren a heißt **n-te Potenz von a** :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ Faktoren}}, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad a \in \mathbb{R}, \tag{1.11}$$

a heißt *Basis*, n heißt *Potenzexponent*

Der angegebene eingeschränkte Bereich für n wird erweitert durch die

Definition

$$a^1 = a, \quad a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{1.12}$$

Die Potenzrechnung gilt nun für $n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (denn für $a = 0$ müßte bei $a^{-n}, n \in \mathbb{N}^*$ durch Null dividiert werden).
Man beachte: 0^0 ist nicht definiert.
Die Potenzrechnung hat zwei Umkehrungen. Die Auflösung der Gleichung $b^n = a$ nach b führt zur Wurzelrechnung, die Auflösung nach n zur Logarithmenrechnung

Definition

Es sei $a \in \mathbb{R}, a \geq 0, n \in \mathbb{N}^*$. Die nicht negative reelle Zahl b, deren n-te Potenz gleich a ist, heißt ***n*-te Wurzel aus *a***:

$$b^n = a \Longleftrightarrow b = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \tag{1.13}$$

a heißt *Radikand*, n heißt *Wurzelexponent*

Die Berechnung des Wurzelwertes nennt man *Radizieren*[1] oder das "*Ziehen der n-ten Wurzel*". Bei der 2ten Wurzel kann der Wurzelexponent weggelassen werden: $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.
Durch die letzte Definition kann jede Wurzel als Potenz mit einem Bruch als Exponent geschrieben werden. Allgemein ist:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \tag{1.14}$$

Eine nochmalige Erweiterung des Potenz- und Wurzelbegriffs läßt reelle Exponenten zu und zwar in (1.14): $m \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Zur Veranschaulichung diene das folgende Beispiel.

$$4^{\sqrt{3}} \approx 4^{1,732} = 4^{\frac{1732}{1000}} = \sqrt[1000]{4^{1732}}$$

Die eigentliche Berechnung erfolgt im Taschenrechner mit der Taste $\boxed{y^x}$, wobei im internen Programm Logarithmen verwendet werden. Es gelten folgende Potenz- und Wurzelgesetze:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \tag{1.15a}$$

$a^n \cdot b^n = (ab)^n$	$\longleftrightarrow$	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\longleftrightarrow$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\longleftrightarrow$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

(1.15b)

[1] Radix, lat. Wurzel

Aus der Bruchrechnung folgt

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m \cdot k}{n \cdot k}}} \longleftrightarrow \boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}} \qquad (1.16a,b)$$

Bemerkung:
Potenzen lassen sich nur addieren, wenn sie die gleiche Basis und den gleichen Exponenten haben. Entsprechendes gilt für Wurzeln. Alle Aufgaben der Wurzelrechnung lassen sich wegen (1.14) auch mit Potenzgesetzen lösen.

Beispiel 1.28

a) $\dfrac{1-2a^2}{a^n} - \dfrac{3a-2}{a^{n-2}} + \dfrac{3}{a^{n-3}} = \dfrac{1-2a^2-3a^3+2a^2+3a^3}{a^n} = \underline{\underline{\dfrac{1}{a^n}}}$

b) $\left(\dfrac{x^3}{y^{-1}}\right)^{-2} \cdot \dfrac{x^5}{y^{-3}} = \dfrac{x^{-6} \cdot x^5}{y^2 \cdot y^{-3}} = \dfrac{x^{-1}}{y^{-1}} = \underline{\underline{\dfrac{y}{x}}}$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} \cdot \sqrt[2]{\dfrac{b}{a}} = \sqrt[6]{\dfrac{a^2}{b^2}} \cdot \sqrt[6]{\dfrac{b^3}{a^3}} = \sqrt[6]{\dfrac{a^2 b^3}{b^2 a^3}} = \underline{\underline{\sqrt[6]{\dfrac{b}{a}}}}$

d) $\sqrt[n-1]{\dfrac{a}{\sqrt[n]{a}}} = \sqrt[n-1]{\sqrt[n]{\dfrac{a^n}{a}}} = \sqrt[n-1]{\sqrt[n]{a^{n-1}}} = \sqrt[n]{\sqrt[n-1]{a^{n-1}}} = \underline{\underline{\sqrt[n]{a}}}$

oder $= \left(\dfrac{a^1}{a^{\frac{1}{n}}}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(a^{1-\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(a^{\frac{n-1}{n}}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \underline{\underline{a^{\frac{1}{n}}}}$

e) $\dfrac{5\sqrt{6}+6}{5\sqrt{3}+3\sqrt{2}} = \dfrac{(5\sqrt{6}+6)(5\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{(5\sqrt{3}+3\sqrt{2})(5\sqrt{3}-3\sqrt{2})}$

$= \dfrac{25\sqrt{9 \cdot 2} - 15\sqrt{4 \cdot 3} + 30\sqrt{3} - 18\sqrt{2}}{75-18} = \dfrac{75\sqrt{2} - 30\sqrt{3} + 30\sqrt{3} - 18\sqrt{2}}{57}$

$= \dfrac{57\sqrt{2}}{57} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$ (Rationalmachen des Nenners).

1.1.3.4 Logarithmen[1]

Die zweite Umkehrung der Potenzrechnung, d.h. die Berechnung von n aus der Gleichung $b^n = a$, führt zur Logarithmenrechnung.

Definition

Sind $b \neq 1$ und a positive reelle Zahlen, so heißt die reelle Zahl n , für die $b^n = a$ gilt, der **Logarithmus von a zur Basis b**:

$$b^n = a \Longleftrightarrow n = \log_b a \qquad (1.17)$$

b heißt *Logarithmenbasis*, a heißt *Numerus* oder Logarithmand.

[1] griech. logos arithmos, Verhältniszahl

Beispiel 1.29

$$5^3 = 125 \iff 3 = \log_5 125$$
$$10^4 = 10000 \iff 4 = \log_{10} 10000$$
$$4^{-3} = \frac{1}{64} \iff -3 = \log_4 \frac{1}{64}$$
$$256^{\frac{1}{2}} = 16 \iff \frac{1}{2} = \log_{256} 16$$

Da Logarithmieren und Potenzieren inverse Rechenoperationen sind, gilt:

$$\boxed{b^{\log_b a} = a} \qquad (1.18) \qquad \boxed{\log_b(b^n) = n} \qquad (1.19)$$

Wegen $b > 0$ ist $b^n = a > 0$, d.h. der Logarithmus ist nur für positive Numeri definiert, also auch nicht für $a = 0$.
Sonderfälle sind:

$$b^1 = b \iff \boxed{\log_b b = 1} \qquad (1.20)$$

$$b^0 = 1 \iff \boxed{log_b 1 = 0} \qquad (1.21)$$

Es sei

$$u = b^m \iff \log_b u = m$$
$$v = b^n \iff \log_b v = n$$
$$u \cdot v = b^{m+n} \iff \log_b(u \cdot v) = m + n = \log_b u + \log_b v.$$

Entsprechende Beziehungen ergeben sich für weitere Rechenoperationen und bilden die

Logarithmengesetze

$$\begin{aligned} \log_b(u \cdot v) &= \log_b u + \log_b v \\ \log_b \frac{u}{v} &= \log_b u - \log_b v \\ \log_b(u^n) &= n \log_b u \\ \log_b \sqrt[n]{u} &= \frac{1}{n} \log_b u \end{aligned} \qquad (1.22)$$

Diese Gesetze führen die Rechenoperationen der 2. und 3. Stufe auf die 1. und 2. Stufe zurück. Vor der Entwicklung der Rechentechnik waren deshalb die Logarithmen bei umfangreichen Rechnungen, z.B. in der Astronomie, ein wichtiges Rechenhilfsmittel. Für die Beschreibung mathematischer und naturwissenschaftlicher Gesetze, z.B. für das Lösen von Exponentialgleichungen, sind sie unentbehrlich.

Beispiel 1.30

a) Die folgenden Logarithmen werden zusammengefaßt:

$$\log_b a + \frac{1}{2}\log_b c - 3\log_b d = \log_b \frac{a \cdot \sqrt{c}}{d^3}$$

b) Der folgende Logarithmus wird weitgehend zerlegt:

$$\log_b \frac{\sqrt[3]{m(p-q)}}{(m+n)^2} = \frac{1}{3}(\log_b m + \log_b(p-q)) - 2\log_b(m+n)$$

Ein **Logarithmensystem** ist die Menge der Logarithmen der positiven reellen Zahlen zu einer festen Basis b. Bedeutung haben die Logarithmensysteme mit der Basis $b = 10$ und $b = \mathrm{e}$.

Dekadische Logarithmen (Briggssche[1] Logarithmen)

$$b = 10, \quad 10^n = a \Longleftrightarrow \boxed{\log_{10} a = \lg a} \tag{1.23}$$

Z.B. ist $10^{0,301\ldots} = 2 \Longleftrightarrow \lg 2 = 0,301\ldots$ Die Logarithmen sind i.allg. irrationale Zahlen und werden durch unendliche Reihen berechnet.
Die dekadischen Logarithmen waren besonders als Rechenhilfsmittel geeignet durch die Anpassung an das Dezimalsystem. Die *Gleitkommadarstellung* einer reellen Zahl $a > 0$ ist nämlich

$$a = m \cdot 10^k \quad \text{mit} \quad 1 \le m < 10, k \in \mathbb{Q}.$$

Dann ist $\lg a = \lg m + k \lg 10 = \lg m + k$

Aus den Grenzen für m folgt: $0 \le \lg m < 1$.
$\lg m$ heißt *Mantisse*, k heißt *Kennziffer.*

Reelle Zahlen, die sich nur in der Kommastellung unterscheiden, haben gleiche Mantissen und verschiedene Kennziffern. Die Mantissen wurden in Logarithmentafeln zusammengefaßt und den positiven reellen Zahlen zugeordnet.

Beispiel 1.31

$a = 3182,4 = 3,1824 \cdot 10^3$, $\lg a = \lg 3,1824 + \lg 10^3 = 0,50275 + 3 = 3,50275$
$a = 31,824 = 3,1824 \cdot 10^1$, $\lg a = 1,50275$
$a = 0,031824 = 3,1824 \cdot 10^{-2}$, $\lg a = 0,50275 - 2 = -1,49725$

Natürliche Logarithmen

$$b = \mathrm{e}, \mathrm{e}^n = a \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\log_{\mathrm{e}} a = \ln a} \tag{1.24}$$

gelesen "Logarithmus naturalis a" oder kurz "l - n - a". Die Zahl $\mathrm{e} = 2,718281\ldots$ ist eine Irrationalzahl und eine der wichtigsten Konstanten der Mathematik. Sie wurde nach EULER[2] benannt. Die natürlichen Logarithmen sind den Bedürfnissen der höheren Mathematik besser angepaßt als andere Logarithmen.

[1] HENRY BRIGGS, 1561-1630, engl. Mathematiker, gab 1617 die erste Tafel dekadischer Logarithmen heraus

[2] LEONHARD EULER, 1707-1783, Schweizer Mathematiker, Physiker und Astronom

Es ist $e^{0,693} = 2 \Longleftrightarrow \ln 2 = 0,693...$

Die dekadischen bzw. natürlichen Logarithmen einer positiven reellen Zahl $a(= x)$ werden mit den Tasten $\boxed{\lg x}$ bzw. $\boxed{\ln x}$ bestimmt. Das Aufsuchen des Numerus a zu einem gegebenen Logarithmus (x) erfolgt mit den Tasten $\boxed{10^x}$ bzw. $\boxed{e^x}$.

Beispiel 1.32

a) Es ist x aus der Gleichung $25,31^x = 30,16$ zu berechnen.
Lösung:
Die Gleichung wird logarithmiert, z.B. nach dem natürlichen Logarithmus:
$x \ln 25,31 = \ln 30,16$

$$x = \frac{\ln 30,16}{\ln 25,31} = \underline{\underline{1,054}}$$

b) Für den Luftdruck p in der Höhe h gilt die *barometrische Höhenformel*
$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}}$, p_0, ρ_0, g sind Konstante
Die Formel ist nach h umzustellen.
Lösung:
Logarithmieren der Gleichung ergibt
$\ln p = \ln p_0 - \frac{\rho_0 g h}{p_0} \ln e$ und nach Umstellen ($\ln e = 1$):

$$h = \frac{p_0}{\rho_0 g}(\ln p_0 - \ln p) = \underline{\underline{\frac{p_0}{\rho_0 g} \ln \frac{p_0}{p}}}$$

Die Logarithmen zweier Systeme sind proportional zueinander.
Sind b_1, b_2 die Basen zweier Systeme, so ist für eine reelle Zahl $a > 0$:

$$a = b_1^n \qquad \text{(I)} \qquad \text{und damit} \qquad n = \log_{b_1} a \qquad \text{(II)}$$

(I) wird logarithmiert zur Basis b_2

$$\log_{b_2} a = n \cdot \log_{b_2} b_1 \text{ oder } n = \frac{\log_{b_2} a}{\log_{b_2} b_1}$$

und für n wird der Wert aus (II) eingesetzt:

$$\boxed{\log_{b_1} a = \frac{\log_{b_2} a}{\log_{b_2} b_1}} \tag{1.25}$$

Für $b_1 = e, b_2 = 10$ folgt

$$\ln a = \frac{\lg a}{\lg e} = 2,30258... \cdot \lg a \quad \text{und umgekehrt}$$

$$\lg a = \frac{\ln a}{\ln 10} = 0,43429... \cdot \ln a$$

Der Logarithmus zur Basis $b = 2$ heißt **binärer Logarithmus** und wird $\mathrm{lb}\, a$ geschrieben. Nach (1.25) läßt er sich berechnen aus

$$\mathrm{lb} a = \frac{\ln a}{\ln 2} = 1,44269... \cdot \ln a$$

1.1.3.5 Binomischer Satz

Ein **Binom** ist ein zweigliedriger Ausdruck der Form $a+b$ oder $a-b$.
Sehr oft werden die folgenden Formeln gebraucht, die als

erste binomische Formel $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ (1.26)

zweite binomische Formel $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ (1.27)

dritte binomische Formel $\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$ (1.28)

bekannt sind.
Es soll eine Formel für $(a+b)^n$ mit beliebigem $n \in \mathbb{N}$ aufgestellt werden. Für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ergibt sich nach dem Start mit $n = 0$, Multiplikation des Ergebnisses jeweils mit $a+b$ und Ordnen:

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned} \tag{I}$$

Man erkennt folgende Gesetzmäßigkeiten: Die Potenzen von a erscheinen in den Summanden (von links nach rechts gelesen) in der Reihenfolge $a^n, a^{n-1}, \ldots, a^1$, $a^0 = 1$, die Potenzen von b in der Reihenfolge $b^0 = 1, b^1, \ldots, b^{n-1}, b^n$. Die Summe der Exponenten in einem Summand ist stets gleich n. Um eine Gesetzmäßigkeit für die Koeffizienten zu finden, werden diese in der durch (I) gegebenen Anordnung als sogenanntes **Pascalsches**[1] **Dreieck** herausgeschrieben:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array} \tag{II}$$

Am linken und rechten Rand steht in jeder Zeile die Zahl 1. Jeder andere Koeffizient ist gleich der Summe der beiden schräg über ihm stehenden Koeffizienten, z.B. $1+2=3$, $3+3=6$.

[1] BLAISE PASCAL, 1623 bis 1662, französischer Mathematiker

Diese Koeffizienten einer entwickelten Binompotenz lassen sich auch unabhängig vom Pascalschen Dreieck berechnen und werden als **Binomialkoeffizienten** wie folgt definiert:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k}} \tag{1.29}$$

gelesen "n über k".

Der Binomialkoeffizient ist ein Bruch, dessen Zähler und Nenner je ein Produkt aus n Faktoren ist. Der erste Faktor im Zähler ist n, jeder folgende ist um eins verringert. Der erste Faktor im Nenner ist eins, jeder folgende ist um eins vergrößert. Nach (1.10) ist $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Zusätzlich wird festgelegt

$$\boxed{0! = 1} \tag{1.30}$$

Damit ist der Binomialkoeffizient zunächst für $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ erklärt und läßt sich in der Form schreiben

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{n!\,(n-k)!} \tag{III}$$

Mit (1.30) folgen aus (III) die Sonderfälle

$$\binom{0}{0} = 1\,, \quad \binom{n}{0} = 1\,, \quad \binom{n}{n} = 1\,.$$

Beispiel 1.33

$$\binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10\,, \quad \binom{7}{2} = \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2} = 21\,, \quad \binom{7}{5} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 21$$

In der n-ten Zeile des Pascal-Dreiecks stehen alle Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ mit $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Zum Beispiel stehen in der 3. Zeile (vgl. (II)) die Binomialkoeffizienten

$$\binom{3}{0} = 1\,, \quad \binom{3}{1} = 3\,, \quad \binom{3}{2} = 3\,, \quad \binom{3}{3} = 1$$

Aus diesen Überlegungen ergibt sich der **Binomische Satz**:

$$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n} \tag{1.31}$$

oder kurz $$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k} \tag{1.31a}$$

Auf einen Beweis wird verzichtet.

Beispiel 1.34

$$\begin{aligned}(2+x)^5 &= \binom{5}{0} 2^5 x^0 + \binom{5}{1} 2^4 x^1 + \binom{5}{2} 2^3 x^2 + \binom{5}{3} 2^2 x^3 + \binom{5}{4} 2^1 x^4 + \binom{5}{5} 2^0 x^5 \\ &= 1 \cdot 32 + 5 \cdot 16x + 10 \cdot 8x^2 + 10 \cdot 4x^3 + 5 \cdot 2x^4 + 1 \cdot 1x^5 \\ &= 32 + 80x + 80x^2 + 40x^3 + 10x^4 + x^5.\end{aligned}$$

Es werden noch einige Eigenschaften der Binomialkoeffizienten behandelt:

Symmetrieeigenschaft: $$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}} \tag{1.32}$$

Z.B. ist $\binom{7}{2} = \binom{7}{7-2} = \binom{7}{5} = 21$ (vgl. Beisp. 1.33).

Diese Eigenschaft ist verantwortlich für die Symmetrie im Pascal-Dreieck.

Summeneigenschaft: $$\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}} \tag{1.33}$$

Z.B. ist $\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2}$ oder $3 + 3 = 6$ (vgl. (II)).

Diese Formel ist das obengenannte Bildungsgesetz für das Pascal-Dreieck.

Bemerkungen: Für $k > n$, $k, n \in \mathbb{N}$ ist stets $\binom{n}{k}$ gleich null, da im Zähler des Bruches die Null als Faktor auftritt.

Während stets $k \in \mathbb{N}$ gilt, ist auch $n \in \mathbb{R}$ möglich. Zum Beispiel ist nach (1.29):

$$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{16}$$

Auch der binomische Satz gilt für $n \in \mathbb{R}$ und ergibt dann eine unendliche Reihe (vgl. Abschn. 7).

In der Kombinatorik gibt $\binom{n}{k}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$ die Anzahl der Möglichkeiten an, aus n Elementen Teilmengen von k Elementen zu bilden (vgl.

Band 2, Abschn. 12).

Aufgaben 1.15 bis 1.29

1.2 Gleichungen, Ungleichungen, Beträge

1.2.1 Allgemeines über Gleichungen

Für die folgenden Betrachtungen wird stets (wenn auch nicht immer extra erwähnt) ein **Grundbereich** festgelegt, das ist z.B. die Menge der reellen oder komplexen Zahlen bzw. eine Menge, deren Elemente Größen wie Temperatur, Druck usw. sind.

Eine **Variable** ist das Zeichen für ein Element des Grundbereiches, das während der Betrachtungen (Beweis, Lösen einer Aufgabe usw.) veschiedene Werte annehmen kann. Variable werden meist mit den letzten Buchstaben des Alphabets bezeichnet: $x, y, z, t, u, v, \ldots$ Eine **Konstante** ist das Zeichen für ein Element des Grundbereiches, das während der durchzuführenden Aufgaben einen festen Wert behält. Konstanten werden meist mit den ersten Buchstaben des Alphabets bezeichnet: $a, b, c, \ldots$

Definition

Ein **Term** ist eine aus Buchstaben, Zahlen und Rechenzeichen gebildete mathematisch sinnvolle Zeichenfolge.

Terme sind z.B.

$$a^2 + 2b - 5\,, \quad \frac{x}{x^2+1}\,, \quad \sqrt{2p^2 - 5q}\,,$$

während die Zeichenfolge $x : (^2a$ keinen Term darstellt.

Für einen Term mit einer Variablen x schreibt man $T(x)$ (gelesen: "t von x"), einen Term mit zwei Variablen bezeichnet man durch $T(x; y)$ usw. Beispiele seien

$$T(x) = \sqrt{4 - x^2}\,, \quad T(x; y) = ax^2 + bxy + cy^2\,.$$

Werden in einen Term $T(x)$ für die Variable x Zahlen aus dem Grundbereich eingesetzt, dann kann der Term einen Zahlenwert aus dem Grundbereich annehmen oder auch nicht. Alle Zahlen des Grundbereiches, mit denen die Variable x belegt werden kann, so daß der erste Fall eintritt, bilden den **Definitionsbereich des Terms**.

Zum Beispiel ergeben sich mit dem Grundbereich $\mathbb{R}$ und dem Term $T(x) = \sqrt{x-3}$ für $x = 5$ der Wert $T(5) = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ und für $x = 1$ der Wert $T(1) = \sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$. Der Definitionsbereich des Terms ist $D = \{x \,|\, x \geq 3\}$. Für den Grundbereich $\mathbb{C}$ ist der Definitionsbereich dagegen $D = \mathbb{C}$.

Definition

Eine **Gleichung** ist die Verbindung von zwei Termen durch das Gleichheitszeichen:

$$T_1 = T_2$$

Man unterscheidet:

Identische Gleichungen (Identitäten), z.B.: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Diese Gleichungen sind für jede Belegung von a und b gültig.

Funktionsgleichungen, z.B.: $y = 4x^2 - 6x + 1$

Jedem Wert für x aus einem gegebenen Bereich wird durch die Funktionsgleichung ein Wert für y zugeordnet.

Bestimmungsgleichungen, z.B.: $x^3 - 5x = 6 - 2x^2$

Diese Gleichungen sind nur für bestimmte x-Werte erfüllt, die aus der Gleichung zu ermitteln sind.

Im folgenden werden **Bestimmungsgleichungen mit einer Unbekannten** (Variablen) betrachtet:

$$T_1(x) = T_2(x)$$

Jede derartige Gleichung ist eine Aussageform. Durch Belegung der Variablen mit Zahlen aus dem Grundbereich entstehen wahre oder falsche Aussagen. Jede Zahl, die die Gleichung zu einer wahren Aussage macht, ist eine **Lösung** der Gleichung. Alle Lösungen bilden die **Lösungsmenge**.

So wird z.B. die Gleichung

$$x^3 - 5x = 6 - 2x^2$$

$$\begin{array}{lllll} & \text{für} & x_1 = -3 & \text{wegen} & -27 + 15 = 6 - 18 \\ & \text{für} & x_2 = -1 & \text{wegen} & -1 + 5 = 6 - 2 \\ \text{und} & \text{für} & x_3 = 2 & \text{wegen} & 8 - 10 = 6 - 8 \end{array}$$

zu einer wahren Aussage. Man kann beweisen, daß keine weiteren Lösungen existieren. Daher ist die Lösungsmenge

$$L = \{-3; -1; 2\}.$$

Der **Definitionsbereich D einer Gleichung** $T_1(x) = T_2(x)$ ist gleich dem Durchschnitt der Definitionsbereiche D_1, D_2 der beiden Terme: $D = D_1 \cap D_2$ (vgl. Beispiel 1.47). Die Lösungsmenge L ist Teilmenge des Definitionsbereiches D : $L \subseteq D$. Die Lösung einer Gleichung mit einer Unbekannten erfolgt im allgemeinen durch schrittweises Umformen der Gleichung, bis die Unbekannte *isoliert* auf einer Seite der Gleichung steht. Bei jeder Umformung entsteht eine neue Gleichung.

Definition

Zwei Gleichungen heißen bezüglich eines gemeinsamen Grundbereiches **äquivalent** zueinander, wenn sie die gleiche Lösungsmenge haben. Entsprechend heißen Umformungen, die die Lösungsmenge einer Gleichung nicht ändern, **äquivalente Unformungen**.

Zu den äquivalenten Umformungen zählt die Addition bzw. Subtraktion eines Terms auf beiden Seiten der Gleichung. Die Multiplikation bzw. Division der beiden Seiten einer Gleichung mit dem gleichen Term ist nur dann eine äquivalente Umformung, wenn dieser Term ungleich null ist bzw., falls er eine Variable enthält, bei keiner Belegung der Variablen den Wert null annimmt. Das Quadrieren einer Gleichung ist im allgemeinen keine äquivalente Umformung, da sich der Definitionsbereich der Gleichung erweitert und damit auch meist die Lösungsmenge. Es können *Scheinlösungen* auftreten, die die Ausgangsgleichung nicht erfüllen.

Schlußfolgerung:
Müssen bei dem Lösen einer Gleichung nichtäquivalente Umformungen vorgenommen werden, so muß mit den "vorläufigen Lösungen" die Probe durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung erfolgen, um Scheinlösungen auszuschalten.

Beispiel 1.35

Die Gleichung

$$\frac{3}{x-2} + 5(x+1) = \frac{x+1}{x-2}$$

hat den Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Durch Multiplikation mit dem Term $x-2$ (nichtäquivalente Umformung) entsteht die Gleichung

$$3 + 5(x+1)(x-2) = x+1$$

mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$. Weitere äquivalente Umformungen führen auf eine quadratische Gleichung mit den Lösungen $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{4}{5}$.
x_1 gehört nicht zu D, ist also keine Lösung, was auch die Probe zeigt, da die Division durch Null nicht definiert ist. Die Lösungsmenge ist daher $L = \left\{-\frac{4}{5}\right\}$.

Der folgende Abschnitt bringt hierzu weitere Beispiele.

1.2.2 Arten von Gleichungen

Die Gleichungsarten unterscheiden sich durch den Aufbau der Terme, aus denen sie gebildet werden. Im folgenden werden die verschiedenen Gleichungsarten behandelt und an Beispielen die Lösungswege gezeigt. Zwei Hauptgruppen bilden die algebraischen Gleichungen und die transzendenten Gleichungen.
Bei einer **algebraischen Gleichung** werden auf die Unbekannte x nur die sechs algebraischen Rechenoperationen (Addition bis Radizieren) angewendet. Jede algebraische Gleichung läßt sich durch schrittweise Umformung auf die Gestalt (1.34) einer *ganzrationalen Gleichung* bringen. Die höchste Potenz von x gibt den *Grad*

der Gleichung an. Die Darstellung (1.34) heißt **Normalform der Gleichung n-ten Grades**

$$\boxed{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0} \tag{1.34}$$

Den folgenden Betrachtungen wird als Grundbereich die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen zugrunde gelegt. Die *Koeffizienten* a_i seien im folgenden reelle Zahlen.

Fundamentalsatz der Algebra

Eine Gleichung n-ten Grades hat genau n Lösungen. Dabei können Lösungen mehrfach auftreten.

Dieser Satz wurde von C. F. GAUSS[1] 1799 in seiner Dissertation erstmalig bewiesen. Die Lösungen werden auch als *Wurzeln* der Gleichung bezeichnet. Es werden einige wichtige *Eigenschaften* der Gleichungen n-ten Grades aufgeführt.

Hat eine Gleichung n-ten Grades die Lösungen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dann läßt sich die Gleichung in der Form

$$(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = 0 \tag{1.35}$$

darstellen. Gleichung (1.35) heißt die **Produktdarstellung** der Gleichung n-ten Grades.

Die Bedeutung der Produktdarstellung liegt in folgendem: wurde eine Lösung der Gleichung bestimmt, z.B. x_1, dann läßt sich der *Linearfaktor* $x - x_1$ abspalten, d.h. die Gleichung läßt sich in der Form

$$(x - x_1)(x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0) = 0$$

schreiben. Die Koeffizienten b_i ergeben sich durch Partialdivision oder mit dem Hornerschema (vgl. Beispiel 1.61). Für die *reduzierte Gleichung* $(n-1)$-ten Grades bestimmt man wieder eine Lösung usw.

Komplexe Lösungen einer Gleichung n-ten Grades treten stets paarweise als konjugiertkomplexe Zahlen auf.

Daraus folgt, daß eine Gleichung n-ten Grades mit ungeradem n mindestens eine reelle Lösung hat.

Zwischen den Lösungen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und den Koeffizienten $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ bestehen Beziehungen; sie heißen die

[1] CARL FRIEDRICH GAUSS, 1777–1855, einer der bedeutendsten Mathematiker, Astronom, Physiker und Geodät.

Wurzelsätze von Vieta[1]

$$\boxed{\begin{array}{lll} x_1+x_2+\ldots & +x_n & = -a_{n-1} \\ x_1x_2+x_1x_3+\ldots & +x_{n-1}x_n & = a_{n-2} \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+ & \ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n & = -a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & x_1x_2\ldots x_{n-1}x_n & = (-1)^n a_0 \end{array}} \tag{1.36}$$

Aus der Normalform (1.34) ergibt sich für

$n = 1$ die **Normalform der Gleichung 1. Grades** oder **linearen Gleichung**

$x + a_0 = 0$ mit der Lösung $x_1 = -a_0$

$n = 2$ die **Normalform der Gleichung 2. Grades** oder **quadratischen Gleichung**

$x^2 + a_1x + a_0 = 0$ oder mit der üblichen Bezeichnung $a_1 = p$, $a_0 = q$:

$x^2 + px + q = 0$.

Für $p \neq 0$, $q \neq 0$ ergeben sich die Lösungen nach der Formel

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}} \tag{1.37}$$

Je nach Größe der *Diskriminante* $\Delta = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ erhält man für

$\Delta > 0$ 2 reelle Lösungen

$\Delta = 0$ 2 zusammenfallende reelle Lösungen

$\Delta < 0$ 2 konjugiert komplexe Lösungen.

Für $p = 0$ ergibt sich die *reinquadratische Gleichung*

$x^2 + q = 0$

mit den Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{-q}$, die für

$q \leq 0$ reell, für $q > 0$ imaginär sind.

Für $q = 0$, $p \neq 0$ folgt

$x^2 + px = 0$ oder $x(x + p) = 0$ mit den Lösungen $x_1 = 0$, $x_2 = -p$.

Für den Wurzelsatz von VIETA folgt mit $n = 2$:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q} \tag{1.36a}$$

Entsprechend erhält man für $n = 3$ die **Normalform der Gleichung dritten Grades** oder **kubischen Gleichung**

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad \text{usw.}$$

[1] FRANCOIS VIETA, 1540–1603, franz. Mathematiker.

Beispiel 1.36

Von der Gleichung 3. Grades $x^3 - 6x^2 + 21x - 26 = 0$ (I)

ist eine Lösung $x_1 = 2$ bekannt, die restlichen Lösungen werden gesucht.

Lösung:

Auf der linken Seite von (I) muß sich wegen (1.35) der Linearfaktor $x - 2$ abspalten lassen. Die Partialdivision ergibt

$(x^3 - 6x^2 + 21x - 26) : (x - 2) = x^2 - 4x + 13.$

Damit hat die Gleichung (I) die Darstellung

$(x - 2)(x^2 - 4x + 13) = 0$ (II)

Nun wird der Term in der zweiten Klammer gleich null gesetzt und ergibt die reduzierte Gleichung

$x^2 - 4x + 13 = 0$ mit den Lösungen

$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3\mathrm{j}.$

Die Gleichung (I) hat damit die Lösungsmenge

$\underline{\underline{L = \{2; 2 + 3\mathrm{j}; 2 - 3\mathrm{j}\}}}$

Beispiel 1.37

Es sei bekannt, daß die Lösungen der Gleichung 4. Grades

$x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 28x - 15 = 0$

ganzzahlig sind. Die Lösungen sind zu bestimmen.

Lösung:

Wegen $x_i \in \mathbb{Z}$ müssen die Lösungen nach der letzten Gleichung von (1.36) Teiler von 15 sein, das sind die Zahlen ± 1, ± 3, ± 5, ± 15.

Durch Einsetzen der Teiler in die Gleichung erhält man bereits für $x = -1$:

$1 - 4 - 10 + 28 - 15 = 0$, d.h. $x_1 = -1$ ist eine Lösung.

Auch $x_2 = 3$ ist eine Lösung wegen

$81 + 108 - 90 - 84 - 15 = 0$

Die Partialdivision der Gleichung 4. Grades durch

$(x + 1)(x - 3) = x^2 - 2x - 3$ ergibt die (zweimal) reduzierte Gleichung

$x^2 + 6x + 5 = 0.$

Sie hat die Lösungen $x_3 = -1$, $x_4 = -5$.

$x_1 = x_3 = -1$ ist eine Doppellösung. Die Lösungsmenge ist

$\underline{\underline{L = \{-5; -1; 3\}}}$

Die Produktdarstellung der Gleichung lautet

$(x + 5)(x + 1)^2(x - 3) = 0$

Allgemein ist x_i eine *k-fache Lösung,* wenn in der Produktdarstellung der Linearfaktor $x - x_i$ in der k-ten Potenz erscheint:

$$(x - x_i)^k$$

Es ist noch die Frage zu beantworten, wie Lösungen der Gleichungen 3. und höheren Grades allgemein berechnet werden. Für Gleichungen 3. und 4. Grades gibt es ähnliche Formeln wie Formel (1.37) für die quadratische Gleichung. Diese Formeln sind wesentlich komplizierter. Für Gleichungen 5. und höheren Grades

existieren keine allgemeingültigen Formeln, was im vorigen Jahrhundert bewiesen werden konnte.
Deshalb werden für die Lösung von Gleichungen 3. und höheren Grades Näherungsverfahren verwendet. Das Wort Näherung bedeutet aber nicht, daß die Lösungen ungenau sind. Die Näherungsverfahren gestatten es, durch mehrfache Anwendung schrittweise jede gewünschte Genauigkeit der Lösungen zu erreichen. Auf graphischem Weg oder durch Wertetabellen werden erste Näherungswerte für die Lösungen ermittelt und dann entsprechend den Genauigkeitsforderungen weiter verbessert.
Diese Verfahren werden in Abschn. 5.2.10.3 erklärt.

Im folgenden werden zwei Arten algebraischer Gleichungen anhand von Beispielen behandelt.
Bei **gebrochenrationalen Gleichungen** oder **Bruchgleichungen** tritt die Unbekannte x im Nenner der in der Gleichung enthaltenen Brüche auf.

Beispiel 1.38

$$\frac{12x}{x^2+x-6} - 2 = \frac{x+1}{x-2}$$

Lösung:

Wegen $x^2+x-6 = (x+3)(x-2)$ ist dieser Term der Hauptnenner. Multiplikation mit ihm und weitere Umformungen ergeben

$$12x - 2\left(x^2 + x - 6\right) = (x+1)(x+3)$$

$$12x - 2x^2 - 2x + 12 = x^2 + 3x + x + 3$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

und als Normalform der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Ihre Lösungen sind

$$x_1 = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2,\ x_1 = 3,\ x_2 = -1$$

Die (wegen nichtäquivalenter Umformung) notwendige Probe ergibt für

$$x_1:\ \frac{36}{6} - 2 \stackrel{?}{=} \frac{4}{1} \quad \text{oder} \quad 4 = 4$$

$$x_2:\ \frac{-12}{-6} - 2 \stackrel{?}{=} \frac{0}{-3} \quad \text{oder} \quad 0 = 0.$$

Die Lösungsmenge ist daher $\underline{\underline{L = \{-1; 3\}}}$.

Irrationale Gleichungen oder **Wurzelgleichungen** enthalten x im Radikanden von Wurzeltermen. Mehrere derartige Wurzeln in der Gleichung werden auf beide Seiten der Gleichung verteilt, bevor die Gleichung quadriert wird. Einzelne Wurzeln in der Gleichung werden isoliert.

Beispiel 1.39

$$\sqrt{2x+10} - \sqrt{4x-8} = 2.$$

Lösung:

$$\sqrt{2x+10} = 2 + \sqrt{4x-8}.$$

Quadrieren (unter Beachtung der binomischen Formel) ergibt

$2x + 10 = 4 + 4\sqrt{4x - 8} + 4x - 8$

Die Wurzel wird isoliert:

$-x + 7 = 2\sqrt{4x - 8}$

Die Gleichung wird nochmals quadriert:

$x^2 - 14x + 49 = 16x - 32$

$x^2 - 30x + 81 = 0$

$x_{1,2} = 15 \pm \sqrt{225 - 81} = 15 \pm 12$

$x_1 = 27\,,\ x_2 = 3.$

Das Quadrieren der Gleichung ist möglicherweise eine nichtäquivalente Umformung, deshalb muß die Probe gemacht werden.

x_1 : $\sqrt{2 \cdot 27 + 10} - \sqrt{4 \cdot 27 - 8} \stackrel{?}{=} 2\,, \quad 8 - 10 \neq 2$

x_2 : $\sqrt{2 \cdot 3 + 10} - \sqrt{4 \cdot 3 - 8} \stackrel{?}{=} 2\,, \quad 4 - 2 = 2$

x_1 ist keine Lösung. Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{3\}}}$.

Nichtalgebraische Gleichungen werden als **transzendente Gleichungen** bezeichnet. Dazu gehören im allgemeinen die Exponentialgleichungen, die logarithmischen Gleichungen und die goniometrischen Gleichungen. Eine Gleichung heißt **Exponentialgleichung**, wenn die Unbekannte mindestens in einem Exponenten auftritt. Nur einige Typen von Exponentialgleichungen können nach x aufgelöst werden. Im allgemeinen müssen Näherungsverfahren angewendet werden. Die folgenden Beispiele zeigen drei unterschiedliche Typen von Exponentialgleichungen.

Beispiel 1.40

$2^{2x+1} \cdot 8^{x-5} = 2^{x-2}$

Lösung:

Mit $8 = 2^3$ folgt

$2^{2x+1} \cdot 2^{3(x-5)} = 2^{x-2}$ oder

$2^{5x-14} = 2^{x-2}$

Da auf beiden Seiten der Gleichung Potenzen mit gleicher Basis stehen, müssen auch die Exponenten gleich sein:

$5x - 14 = x - 2 \implies x_1 = 3$

$\underline{\underline{L = \{3\}}}$

Beispiel 1.41

$5^{x-1} = 2^x$

Lösung:

Diese Exponentialgleichung wird gelöst, indem sie logarithmiert wird:

$$\begin{aligned} (x-1)\ln 5 &= x \ln 2 \\ x(\ln 5 - \ln 2) &= \ln 5 \\ x_1 &= \frac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 2} = 1{,}756 \end{aligned}$$

$\underline{\underline{L = \{1{,}756\}}}$

Beispiel 1.42

$2^x - 3x + 1 = 0$

Lösung:

Da x nicht nur als Exponent in der Gleichung vorkommt, kann dieser Gleichungstyp nur mit Näherungsverfahren gelöst werden (vgl. Abschn. 5.2.10.3).

Logarithmische Gleichungen enthalten mindestens einen Logarithmus der Unbekannten.

Beispiel 1.43

$10 \ln(2x) = 3$

Lösung:

$$\begin{aligned} \ln(2x) &= 0,3 \\ 2x &= e^{0,3} \\ x_1 &= \frac{1}{2} e^{0,3} = 0,675 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{L = \{0,675\}}}$$

Goniometrische Gleichungen enthalten die Unbekannte als Argument trigonometrischer Funktionen. Es gibt zahlreiche Formen goniometrischer Gleichungen und deshalb keine allgemeine Methode der Auflösung. Meist erreicht man durch äquivalente Umformungen, daß in der Gleichung
1. nur noch eine der vier trigonometrischen Funktionen erscheint
2. diese Funktion nur mit ein und demselben Argument auftritt.

Durch eine Substitution kann dann die goniometrische Gleichung in eine algebraische Gleichung überführt werden.

Beispiel 1.44

$\sqrt{3} \cos x = 1 - \sin x$

Lösung:

Damit die Gleichung nur noch eine trigonometrische Funktion enthält, ersetzt man $\cos x$ nach (1.50):

$\pm \sqrt{3} \sqrt{1 - \sin^2 x} = 1 - \sin x.$

Durch Substitution $u = \sin x$ entsteht eine algebraische Gleichung und zwar eine Wurzelgleichung für die Unbekannte u:

$\pm \sqrt{3} \sqrt{1 - u^2} = 1 - u.$

Durch Quadrieren und Umformen ergibt sich

$3(1 - u^2) = 1 - 2u + u^2$

$4u^2 - 2u - 2 = 0$

$u^2 - \frac{1}{2} u - \frac{1}{2} = 0$

$u_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$

$u_1 = 1 \qquad u_2 = -\frac{1}{2}$

Im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ folgt durch Rücksubstitution:

aus $u_1 = 1 = \sin x$: $x_1 = \frac{\pi}{2}$

aus $u_2 = -\frac{1}{2} = \sin x$: $x_2 = \frac{7}{6}\pi$, $x_3 = \frac{11}{6}\pi$

(Die Lösungen werden in Radiant angegeben. Das Einheitenzeichen rad wird weggelassen.)

Da eine Wurzelgleichung vorliegt, muß die Probe gemacht werden:

$x_1 = \frac{\pi}{2}$: $\sqrt{3} \cdot 0 \stackrel{?}{=} 1 - 1$ oder $0 = 0$, Lösung

$x_2 = \frac{7}{6}\pi$: $\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \stackrel{?}{=} 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)$ oder $-\frac{3}{2} \neq \frac{3}{2}$, keine Lösung

$x_3 = \frac{11}{6}\pi$: $\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \stackrel{?}{=} 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)$ oder $\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$, Lösung

Die im Intervall $0 \leq x < 2\pi$ liegenden Lösungen $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \frac{11}{6}\pi$ heißen *Hauptwerte* der Lösungen. Wegen der Periodizität der Sinusfunktion ist die Menge der *allgemeinen Lösungen*:

$$L = \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ \frac{11}{6}\pi + k \cdot 2\pi\right\},\ k \in \mathbb{Z}$$

Beispiel 1.45

$3 \sin 2x = 5 \tan x$

Lösung:

Mit den goniometrischen Formeln (1.58) und (1.51):

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

erhält man

$6 \sin x \cos x = \frac{5 \sin x}{\cos x}$ und umgeformt

$6 \sin x \cos^2 x = 5 \sin x$ (III)

$\sin x \left(6 \cos^2 x - 5\right) = 0$

Durch Nullsetzen der einzelnen Faktoren entstehen zwei Gleichungen

$\sin x = 0$, $\qquad 6 \cos^2 x - 5 = 0$

$\cos x = \sqrt{\frac{5}{6}} \qquad \cos x = -\sqrt{\frac{5}{6}}$

mit den Lösungen

$x_1 = 0$, $\qquad x_3 = 0,421$, $\qquad x_5 = 2,721$

$x_2 = \pi$, $\qquad x_4 = 5,863$, $\qquad x_6 = 3,562$

Unter Beschränkung auf die Hauptwerte lautet die Lösungsmenge:

$L = \{0; 0{,}421; 2{,}721; \pi; 3{,}562; 5{,}863\}$

Bemerkung: In (III) darf nicht durch $\sin x$ dividiert werden, ohne vorher den Fall $\sin x = 0$ zu untersuchen, da sonst Lösungen verlorengehen. Besser ist es, $\sin x$ auszuklammern.

Beispiel 1.46

Gesucht werden die Hauptwerte der Lösungen der Gleichung

$4\cos 3x - 1 = 0$

Lösung:

$\cos 3x = 0,25$

Wegen des Arguments $3x$ muß gleich die Periodizität berücksichtigt werden, um alle Hauptwerte zu erhalten:

$$\begin{aligned} 3x &= 1,318 + k \cdot 2\pi \,, \quad 3x = 4,965 + k \cdot 2\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \\ x &= 0,439 + k \cdot \frac{2}{3}\pi \,, \quad x = 1,655 + k \cdot \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

Man erhält für

$k = 0: \quad x_1 = 0,439\,, \quad x_4 = 1,655$

$k = 1: \quad x_2 = 2,534\,, \quad x_5 = 3,749$

$k = 2: \quad x_3 = 4,628\,, \quad x_6 = 5,844$

Für $k \geq 3$ ergeben sich keine weiteren Hauptwerte der Lösungen.

Lösungsmenge der Hauptwerte:

$L = \{0,439; 1,655; 2,534; 3,749; 4,628; 5,844\}$.

1.2.3 Absolute Beträge

Den *entgegengesetzten Zahlen* a und $-a$ entsprechen Punkte auf der Zahlengeraden, die gleichweit vom Ursprung entfernt sind (Bild 1.9). Häufig interessiert nur dieser Abstand eines Zahlpunktes vom Nullpunkt.

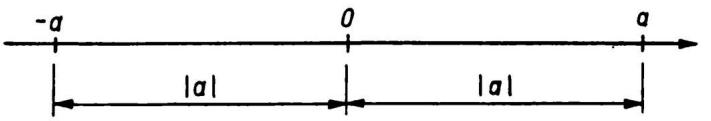


Bild 1.9

Definition

Der **absolute Betrag** einer Zahl a, im Zeichen $|a|$, ist die nichtnegative der beiden Zahlen a und $-a$:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Oft sagt man nur kurz: *Betrag von a.*

Zum Beispiel ist $|8| = 8$, $|-3| = 3$, $|0| = 0$.

Aus der Definition ergeben sich die *Folgerungen*:

1. Der Betrag einer Zahl ist nie negativ:
   $|a| \geq 0$, dabei gilt $|a| = 0$ nur für $a = 0$
2. Es ist stets $|a| \geq \pm a$
3. Stets gilt $|-a| = |a|$ und allgemein $|a - b| = |b - a|$
4. Für $z > 0$ und $|a| = z$ folgt $a = \pm z$

Für das Rechnen mit absoluten Beträgen sind die folgenden Formeln wichtig:

$$\boxed{|a \cdot b| = |a| \cdot |b|} \tag{1.38}$$

$$\boxed{\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}} \quad b \neq 0 \tag{1.39}$$

Dreiecksungleichung

$$\boxed{|a + b| \leq |a| + |b|} \tag{1.40}$$

Diese Ungleichung entspricht dem Satz "Im Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite", was mit Hilfe der Vektorrechnung gezeigt werden kann. Der Leser mache sich die Ungleichung (1.40) anhand von Zahlenbeispielen klar. Allgemein gilt:

$$|a + b + c + \ldots| \leq |a| + |b| + |c| + \ldots$$

Für die Differenz ist

$$\boxed{|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b|} \tag{1.41}$$

Beispiel 1.47

Der Wert des Terms

$T(a; b) = |4a + 2b| - a - |b|$

ist für a) $a = 3$, $b = -4$, b) $a = -5$, $b = 5$ zu berechnen.

Lösung:

a) $T(3; -4) = |12 - 8| - 3 - |-4| = 4 - 3 - 4 = -3$

b) $T(-5; 5) = |-20 + 10| + 5 - |5| = 10 + 5 - 5 = 10$

Beispiel 1.48

Welchen Wert kann der Term $T(m; n) = 3m - n$ unter den Bedingungen $|m| = 5$, $|n| = 2$ annehmen?

Lösung:

Nach Folgerung 4 kann m die Werte 5 und -5, n die Werte 2 und -2 annehmen. Damit ergeben sich vier Werte für den Term:

$T(5; 2) = 13$, $T(5; -2) = 17$, $T(-5; 2) = -17$, $T(-5; -2) = -13$.

Interessiert nur das Vorzeichen einer reellen Zahl a, dann wird das Symbol **sgn** a, gelesen "Signum a" verwendet.

Definition

$$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad a > 0 \\ 0 & \text{für} \quad a = 0 \\ -1 & \text{für} \quad a < 0 \end{cases}$$

Es ist $\operatorname{sgn} a = \dfrac{a}{|a|}$ $(a \neq 0)$.

1.2.4 Intervalle

Bei vielen Betrachtungen zu Variablen sind gültige Bereiche für diese anzugeben, zum Beispiel die Definitions- und Wertebereiche von Funktionen.

Definition

Ein **Intervall** ist eine zusammenhängende Teilmenge der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

Einem Intervall entspricht also ein bestimmter lückenloser Abschnitt der Zahlengeraden, der von zwei Zahlen a und b begrenzt wird. Je nachdem, ob die Randpunkte a und b mit zum Intervall gehören oder nicht, spricht man von abgeschlossenen oder offenen Intervallen. Neben der Verwendung der Mengenschreibweise werden abgeschlossene Intervalle durch eckige Klammern, offene Intervalle durch runde Klammern dargestellt. Beispiele sind:

Abgeschlossenes Intervall

$$I = \{x \mid a \leq x \leq b\} = [a, b]$$

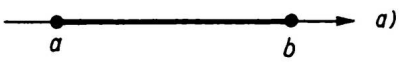


Bild 1.10

Offenes Intervall

$$I = \{x \mid a < x < b\} = (a, b)$$

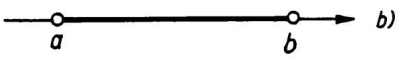


Bild 1.10

Links offenes, rechts abgeschlossenes Intervall

$$I = \{x \mid a < x \leq b\} = (a, b]$$

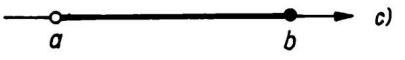


Bild 1.10

Einige Sonderfälle sind z.B.

$$I = \{x \mid a \leq x\} = [a, \infty)$$

Bild 1.10

$$I = \{x \mid |x| < a\} = (-a, a)$$

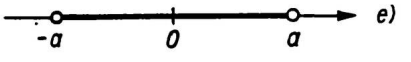


Bild 1.10

$$I = \{x \mid |x - s| < a\} = (s - a, s + a)$$

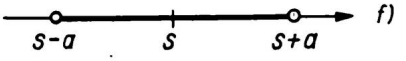


Bild 1.10

Man beachte, daß in einem offenen Intervall (a, b) ebenso wie in $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ keine kleinste und keine größte Zahl existiert.

Beispiel 1.49

Gesucht wird im Grundbereich $\mathbb{R}$ der Definitionsbereich der Gleichung $\sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{7-x}$ (vgl. Abschn. 1.2.1)

Lösung:

Der Definitionsbereich des Terms

$T_1(x) = \sqrt{x-2}$ ist: $D_1 = [2, \infty)$

$T_2(x) = 1 + \sqrt{7-x}$ ist: $D_2 = (-\infty, 7]$

Für den Definitionsbereich der Gleichung folgt

$D = D_1 \cap D_2 = [2, \infty) \cap (-\infty, 7] = [2, 7]$ (s. Bild 1.11)

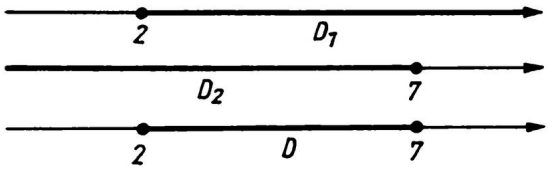


Bild 1.11

1.2.5 Ungleichungen

Die folgenden Betrachtungen gelten im Grundbereich $\mathbb{R}$. Im Bereich $\mathbb{C}$ gibt es keine "Größer–" und "Kleiner–Beziehung".

Definition

Eine **Ungleichung** ist die Verbindung von zwei Termen durch eines der Relationszeichen $>$, $\geq$, $<$, $\leq$ oder durch das Ungleichheitszeichen $\neq$:

$T_1 > T_2$	gelesen:	"T_1 größer T_2"
$T_1 \geq T_2$	gelesen:	"T_1 größer oder gleich T_2" oder "T_1 mindestens T_2"
$T_1 < T_2$	gelesen:	"T_1 kleiner T_2"
$T_1 \leq T_2$	gelesen:	"T_1 kleiner oder gleich T_2" oder "T_1 höchstens T_2"
$T_1 \neq T_2$	gelesen:	"T_1 ungleich T_2".

Bei Ungleichungen mit einer Unbekannten (Variablen) gibt es analoge Begriffe wie bei Gleichungen, z.B. Definitionsbereich, Lösungsmenge usw. Im Gegensatz zu Gleichungen sind allerdings im Grundbereich $\mathbb{R}$ die Lösungsmengen der Ungleichungen Intervalle.

Vertauscht man die Seiten einer Ungleichung, dann kehrt sich das Ungleichheitszeichen um, z.B. $a > b \Longleftrightarrow b < a$.

Auch die **äquivalenten Umformungen** sind gegenüber denen von Gleichungen eingeschränkt.

Das Ungleichheitszeichen bleibt bestehen, wenn

- auf beiden Seiten der Ungleichung der gleiche Term T addiert oder subtrahiert wird,
  z.B. $T_1 < T_2 \Longrightarrow T_1 + T < T_2 + T$, $T_1 - T < T_2 - T$.
- beide Seiten der Ungleichung mit einem Term T, der nur positive Werte annimmt, multipliziert oder durch einen entsprechenden Term dividiert werden,
  z.B. $T_1 < T_2$, $T > 0 \Longrightarrow T_1 T < T_2 T$, $\dfrac{T_1}{T} < \dfrac{T_2}{T}$
- beide Seiten der Ungleichung stets verschiedene Vorzeichen haben und auf beiden Seiten der Kehrwert gebildet wird,
  z.B. $T_1 < T_2$, $T_1 \cdot T_2 < 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{T_1} < \dfrac{1}{T_2}$

Das Ungleichheitszeichen kehrt sich um, wenn

- beide Seiten der Ungleichung mit einem Term T, der nur negative Werte annimmt, multipliziert oder durch einen entsprechenden Term dividiert werden,
  z.B. $T_1 < T_2$, $T < 0 \Longrightarrow T_1 T > T_2 T$, $\dfrac{T_1}{T} > \dfrac{T_2}{T}$
- beide Seiten der Ungleichung stets gleiches Vorzeichen haben und auf beiden Seiten der Kehrwert gebildet wird,
  z.B. $T_1 < T_2$, $T_1 \cdot T_2 > 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{T_1} > \dfrac{1}{T_2}$

Zwei Ungleichungen mit gleichartigem Ungleichheitszeichen dürfen addiert, aber nicht subtrahiert werden,
z.B. $T_1 < T_2$, $T_3 < T_4 \Longrightarrow T_1 + T_3 < T_2 + T_4$,
dagegen kann $T_1 - T_3 \gtrless T_2 - T_4$ sein, es kann also keine eindeutige Aussage gemacht werden.

Beispiel 1.50

$3x - 2 \leq 5x + 4$

Lösung:

Auf beiden Seiten wird der Term $T = 2 - 5x$ addiert: $-2x \leq 6$
Division durch -2 kehrt das Ungleichheitszeichen um: $x \geq -3$
Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = [-3, \infty)}}$

Enthält eine Ungleichung Beträge, können häufig die folgenden, für $a > 0$ geltenden Äquivalenzen verwendet werden:

$$|x| < a \Longleftrightarrow -a < x < a \qquad \text{oder} \quad x \in (-a, a)$$

$$|x| > a \Longleftrightarrow x < -a \wedge x > a \quad \text{oder} \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-a, a]$$

Beispiel 1.51

$|x+2| < 3$

Lösung:

Der Betrag wird mit der obigen Äquivalenz aufgelöst und führt wegen

$-3 < x+2 < 3$

auf zwei Ungleichungen

$-3 < x+2\,,$ $\qquad$ $x+2 < 3$

$-5 < x\,,$ $\qquad$ $x < 1$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = (-5,1)}}$.

Beispiel 1.52

$$\frac{1}{2x-3} \leq 2$$

Lösung:

Der Definitionsbereich der Ungleichung ist $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$. Bei der Multiplikation mit dem Term $T(x) = 2x-3$ müssen zwei Fälle unterschieden werden:

$$\begin{array}{rcl} T(x) = 2x-3 > 0 & \text{und} & T(x) = 2x-3 < 0 \\ x > \frac{3}{2} & \text{und} & x < \frac{3}{2} \end{array} \qquad \text{(I)}$$

Multiplikation der Ungleichung mit $T(x)$ ergibt

$$\begin{array}{ll} 1 \leq 4x-6 & 1 \geq 4x-6 \\ x \geq \frac{7}{4} & x \leq \frac{7}{4} \end{array}$$

Unter Beachtung der Intervalle (I) folgen für die Lösung die Teilmengen

$$L_1 = \left[\frac{7}{4}, \infty\right) \qquad L_2 = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$$

Die Lösungsmenge der Ungleichung ist

$$L = L_1 \cup L_2 = \underline{\underline{\left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup \left[\frac{7}{4}, \infty\right) = \mathbb{R} \setminus \left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)}}.$$

Aufgaben 1.30 bis 1.39

1.3 Funktionen

1.3.1 Abbildungen

Der Begriff der Abbildung gehört zu den grundlegenden Begriffen der Mathematik.

Definition

Gegeben sind zwei (nicht leere) Mengen X und Y. Sind aufgrund einer Vorschrift Elementen $x \in X$ ein oder mehrere Elemente $y \in Y$ zugeordnet, so heißt die Menge F der geordneten Paare $(x;y)$ eine **Abbildung** aus X in Y. Man schreibt $F : X \to Y$ oder ausführlicher: $F = \{(x;y) | \; x \mapsto y \,, \; x \in X\}$.

Im Paar $(x;y)$ heißt y das **Bild** von x und man schreibt auch $y = F(x)$. x heißt das **Urbild** von y. Hat jedes $x \in X$ ein oder mehrere Bilder $y \in Y$ und jedes $y \in Y$ ein oder mehrere Urbilder x, so heißt die Menge X **Urbildmenge** oder **Definitionsbereich**, die Menge Y **Bildmenge** oder **Wertebereich** der Abbildung, und man spricht von einer Abbildung von X auf Y.
Besondere Bedeutung haben zwei Abbildungsarten.
Ist jedem Urbild x nur ein Bild y zugeordnet, so liegt eine **eindeutige Abbildung** vor.
Hat bei einer eindeutigen Abbildung jedes Bild y nur ein Urbild x, so ist es eine **eineindeutige Abbildung**.

Beispiel 1.53

In einem Arbeitsraum befinden sich mehrere Maschinen $m_1, m_2, \ldots$, die durch Schalter $s_1, s_2, \ldots$ ein- bzw. ausgeschaltet werden können. Jedem Schalter ist die Maschine zugeordnet, die durch ihn ein- bzw. ausgeschaltet wird. Es liegt eine Abbildung der Menge $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$ auf die Menge $M = \{m_1, m_2, \ldots\}$ vor. Die Abbildung kann durch einen Graph oder eine Tabelle beschrieben werden. Im folgenden sind drei verschiedene Abbildungen F_1, F_2, F_3 angegeben:

Abbildung: F_1 F_2 F_3

Graph:

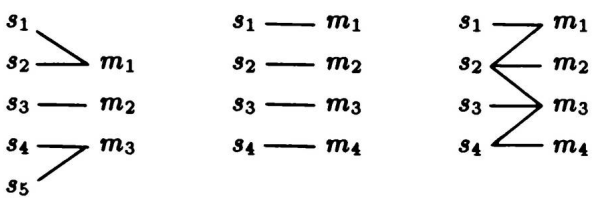


Tabelle:

s_i	m_i
s_1	m_1
s_2	m_1
s_3	m_2
s_4	m_3
s_5	m_3

s_i	m_i
s_1	m_1
s_2	m_2
s_3	m_3
s_4	m_4

s_i	m_i
s_1	m_1
s_2	m_1, m_2, m_3
s_3	m_3
s_4	m_3, m_4

Die Abbildung F_1 ist eindeutig, denn jedem Schalter ist nur eine Maschine zuge-

ordnet. Als Menge von Wertepaaren kann man für F_1 schreiben:
$F_1 = \{(s_1; m_1), (s_2; m_1), (s_3; m_2), (s_4; m_3), (s_5; m_3)\}$.
Die Abbildung F_2 ist eineindeutig, da zu jedem Schalter nur eine Maschine gehört und zu jeder Maschine nur ein Schalter. Die Abbildung F_3 ist nicht eindeutig, da z.B. durch den Schalter s_2 drei Maschinen geschaltet werden.

Werden in einer Abbildung $F : X \to Y$ die Bilder als Urbilder und die Urbilder als Bilder betrachtet, so entsteht eine neue Abbildung.

Definition

Die aus einer Abbildung $F : X \to Y$ von X auf Y durch Vertauschen von Urbildmenge X und Bildmenge Y entstehende Abbildung heißt **Umkehrabbildung** von F und man schreibt: $F^{-1} : Y \to X$.

(Die symbolische Schreibweise F^{-1} bedeutet nicht etwa $1/F$).

Wie Abbildung F_2 aus Beispiel 1.53 zeigt, gilt der Satz:

Eine Abbildung F ist genau dann eineindeutig, wenn F und F^{-1} eindeutig sind (statt eineindeutig sagt man auch: eindeutig und umkehrbar eindeutig).

1.3.2 Allgemeines über Funktionen

1.3.2.1 Begriff der Funktion

In diesem Abschnitt werden die vorhandenen Kenntnisse über Funktionen wiederholend kurz zusammengefaßt und teilweise vertieft.

Definition

Gegeben sind zwei (nicht leere) Mengen X und Y reeller Zahlen. Ist jedem Element $x \in X$ eindeutig ein Element $y \in Y$ zugeordnet, so heißt die Menge f der geordneten Paare $(x; y)$ eine (reelle) **Funktion**. Man schreibt

$$f = \{(x; y) | \, y = f(x) \wedge x \in X\} \quad \text{oder kurz}$$
$$f : \, x \mapsto f(x) = y$$

Die Funktion ist also eine eindeutige Abbildung. Stellt $X \to Y$ eine Abbildung von X auf Y dar, dann ist X der **Definitionsbereich**, Y der **Wertebereich** der Funktion. x heißt die **unabhängige Variable** oder das **Argument**, $y = f(x)$ heißt **abhängige Variable** oder **Funktionswert** an der Stelle x.

Nicht ganz logisch wird f sowohl als Bezeichnung für eine Menge als auch als Bezeichnung für die Zuordnungsvorschrift verwendet. Häufig wird für $y = f(x)$ gelesen "y ist eine Funktion von x". Diese verbreitete Lesart ist nicht exakt. Besser ist: "x wird durch die Funktion f der Wert y zugeordnet", was in der Schreibweise $f : \, x \mapsto y$ zum Ausdruck kommt.

Sind X und Y Teilmengen der Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen, dann liegt eine Funktion mit komplexen Variablen vor. Diese Funktionen werden in der *Funktionentheorie* untersucht und finden z.B. Anwendungen bei Aufgaben der Aero- und Hydromechanik. Im folgenden werden hauptsächlich reelle Funktionen behandelt.

1.3.2.2 Darstellungsarten von Funktionen

Eine Funktion f ist gegeben, wenn für jedes Element $x \in X$ das zugeordnete Element $y \in Y$ bestimmt werden kann. Für die Zuordnung $x \mapsto y$ gibt es verschiedene Darstellungsarten.

a) Darstellung durch eine Wertetabelle

Die geordneten Paare $(x; y) \in f$ werden in einer Tabelle übersichtlich zusammengestellt. Zum Beispiel ist durch die Wertetabelle

x	0	1	2	3	4	5	6
y	-1	0,75	2	2,75	3	2,75	2

die Funktion

$$f = \{(0;1), (1;0,75), (2;2), (3;2,75), (4;3), (5;2,75), (6;2)\}$$

gegeben. Ihr Definitionsbereich ist $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und ihr Wertebereich $Y = \{-1; 0,75; 2; 2,75; 3\}$.

Ist allerdings der Wertebereich ein Intervall, also eine unendliche Menge, dann wird durch die Wertetabelle nur eine Teilmenge der Wertepaare $(x; y)$ angegeben. Für alle nicht in der Tabelle stehenden x-Werte sind die zugeordneten y-Werte durch *Interpolation* (meist lineare Interpolation) zu bestimmen.

Beispiele für Wertetabellen sind Meßreihen, wie z.B. die Messung des Luftdruckes bei verschiedenen Temperaturen, oder die Logarithmentafeln sowie die Tafeln der trigonometrischen Funktionen, die vor dem Einsatz elektronischer Rechner große Bedeutung hatten.

b) Graphische Darstellung

Die graphische Darstellung gibt einen anschaulichen Überblick über den Verlauf der Funktion. Es wird meist ein cartesisches Koordinatensystem mit der x-Achse als Abszissenachse und der y-Achse als Ordinatenachse zugrunde gelegt. Jedes Wertepaar $(x; y)$ wird eineindeutig auf einen Punkt P mit der Abszisse x und der Ordinate y abgebildet. Die Menge aller Punkte heißt das **Funktionsbild** oder der **Graph** der Funktion f .

Bild 1.12 zeigt den Graph der Funktion des Beispiels aus a).

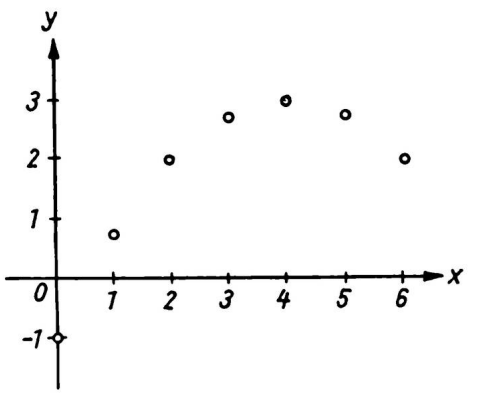


Bild 1.12

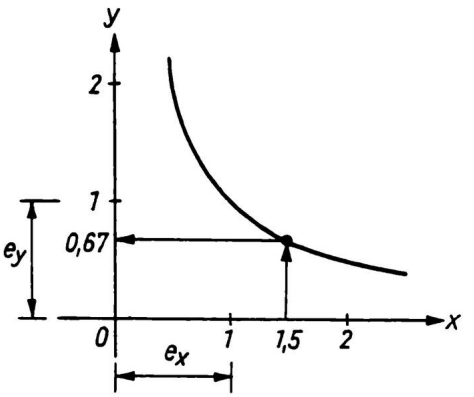


Bild 1.13

Ist der Definitionsbereich ein Intervall, dann stellt der Graph eine Kurve dar. Bild 1.13 zeigt den Graph der Funktion f, bei der jedem $x > 0$ als Funktionswert y der reziproke Wert von x zugeordnet wird, z.B. dem Wert $x = 1,5$ der Funktionswert $y = f(1,5) = 0,67$.

Nicht jede Kurve kann Graph einer Funktion sein. Da eine Funktion f eine eindeutige Abbildung ist, darf jede Parallele zur y-Achse den Graph von f nur in einem Punkt schneiden. Die in Bild 1.14 gezeigte Kurve ist für das Intervall (a, b) kein Funktionsgraph, da jedem $x \in (a, b)$ drei Werte y_1, y_2, y_3 zugeordnet werden.

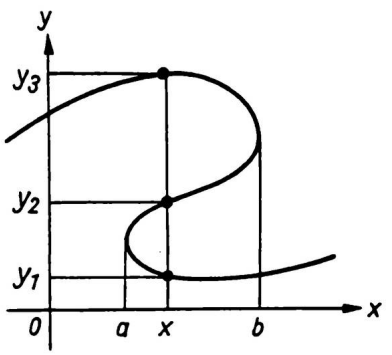


Bild 1.14

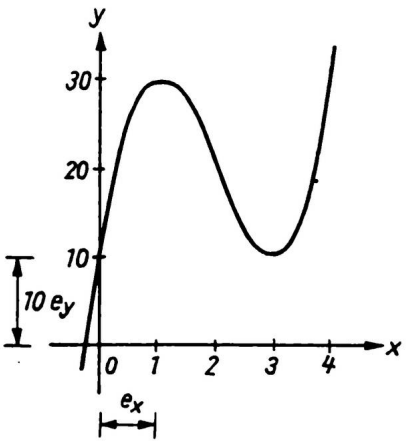


Bild 1.15

Im allgemeinen werden die Einheitsstrecken auf der x- und y-Achse gleich groß gewählt: $e_x = e_y$ (vgl. Bild 1.13). Sind die Ordinaten im Verhältnis zu den Abszissen sehr groß oder sehr klein, wie z.B. in Bild 1.15, dann wird $e_x \neq e_y$ gewählt.

Bei der Darstellung von Funktionen, deren Variable naturwissenschaftliche oder technische Größen sind, werden auf den Achsen nur die Zahlenwerte der Größen verwendet. Auf den Koordinatenachsen werden die Quotienten Größe/Einheit angege-

ben. Bild 1.16 zeigt den Bewegungsablauf eines Körpers im Weg–Zeit–Diagramm. Die Bewegung beginnt bei $t = 0$. Nach 4 s z.B. hat der Körper die Strecke $s = 18\,\text{m}$ zurückgelegt. Nach 8 s wird die Bewegung rückläufig und der Körper kommt nach 13 s zur Ruhe.

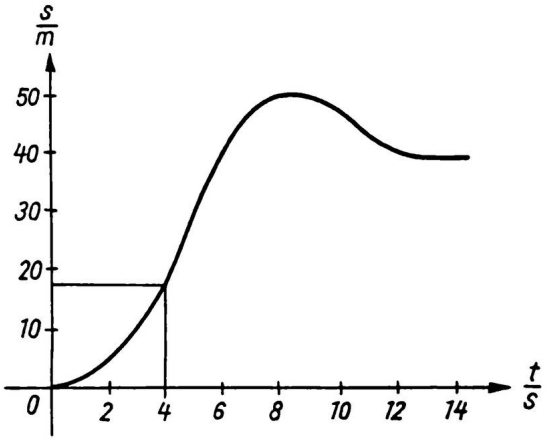


Bild 1.16

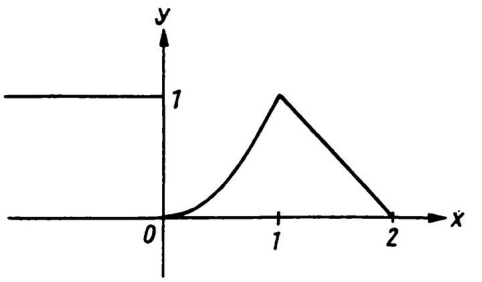


Bild 1.17

c) **Analytische Darstellung**

Die Zuordnung $x \mapsto f(x) = y$ wird durch eine **Funktionsgleichung** hergestellt. Diese kann in verschiedenen Formen auftreten.

Explizite Form

Auf einer Seite der Funktionsgleichung steht y isoliert:

$$y = f(x) \tag{I}$$

Beispiel 1.54

a) $f: y = -\frac{2}{3}x + 2, \quad X = \mathbb{R},\ Y = \mathbb{R}$

b) $f: y = \sqrt{3 - x}, \quad X = (-\infty, 3],\ Y = [0, \infty)$

c) $f: y = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (-\infty, 0), \text{ Bild 1.17} \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{für } x \in [0, 2] \\ -x + 4 & \text{für } x \in (2, 4] \end{cases}$

$X = (-\infty, 4],\ Y = [0, 2]$

Implizite Form

Die allgemeine Form ist

$$F(x; y) = 0 \tag{II}$$

In dieser erkennt man nicht immer, ob die Zuordnung $x \mapsto y$ eindeutig ist, d.h. ob (II) eine Funktionsgleichung ist oder die Gleichungen mehrerer Funktionen zusammenfaßt.

Beispiel 1.55

a) $F(x;y) = 2x + 3y - 6 = 0$ oder $y = -\frac{2}{3}x + 2$

b) $F(x;y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$

Die Auflösung nach y ergibt die Gleichungen von zwei Funktionen

$f_1 : y = \sqrt{25 - x^2}, \quad X_1 = [-5,5], \; Y_1 = [0,5]$
$f_2 : y = -\sqrt{25 - x^2}, \quad X_2 = [-5,5], \; Y_2 = [0,-5]$

Ihre Graphen sind die beiden Halbkreise in Bild 1.18. Die implizite Form ist also die Gleichung des Kreises.

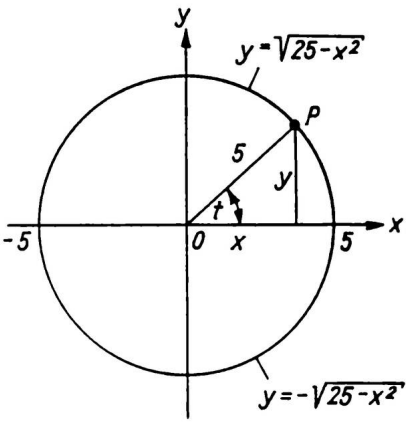


Bild 1.18

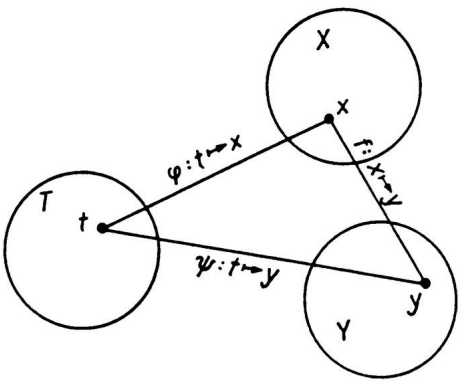


Bild 1.19

Nicht jede implizite Funktionsgleichung kann in die explizite Form verwandelt werden. Z.B. ist die Gleichung $y^5 - 3y^2 + 6x - 4 = 0$ nicht nach y auflösbar.

Parameterdarstellung

Die Variablen x und y werden getrennt voneinander in Abhängigkeit von einer dritten, meist mit t bezeichneten Variablen, dem **Parameter**, dargestellt. Die allgemeine Form der Parameterdarstellung lautet:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned} \qquad \text{(III)}$$

Jedem $t \in T$ wird durch die Funktionsgleichungen (III) eindeutig ein Wert $x \in X$ und ein Wert $y \in Y$ zugeordnet, d.h. $\varphi : t \mapsto x$, $\psi : t \mapsto y$. Durch (III) wird im allgemeinen eine Abbildung, im Sonderfall eine Funktion $f : x \mapsto y$ beschrieben (vgl. Bild 1.19).

Aus (III) kann (wenn möglich) die explizite Form (I) gewonnen werden, indem $x = \varphi(t)$ nach t aufgelöst und dieser Term für t in $y = \psi(t)$ eingesetzt wird.

Beispiel 1.56

$$\begin{aligned} x &= t + 2 = \varphi(t) \\ y &= 5 - \frac{1}{2}t^2 = \psi(t) \end{aligned} \qquad T = \mathbb{R} \qquad \text{(IV)}$$

Mit der Wertetabelle

t	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	-3	$0,5$	3	$4,5$	5	$4,5$	3	$0,5$	-3

lassen sich Wertepaare von f bestimmen, z.B. $(-2;-3)$, $(-1;0,5)$, ...
An den Graph von f in Bild 1.20 wurden die Parameterwerte geschrieben.
Die Elimination von t aus den Gleichungen (II) ergibt mit $t = x - 2$ und $y = 5 - \frac{1}{2}(x-2)^2$ die parameterfreie explizite Form der Funktionsgleichung

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 = f(x)$$

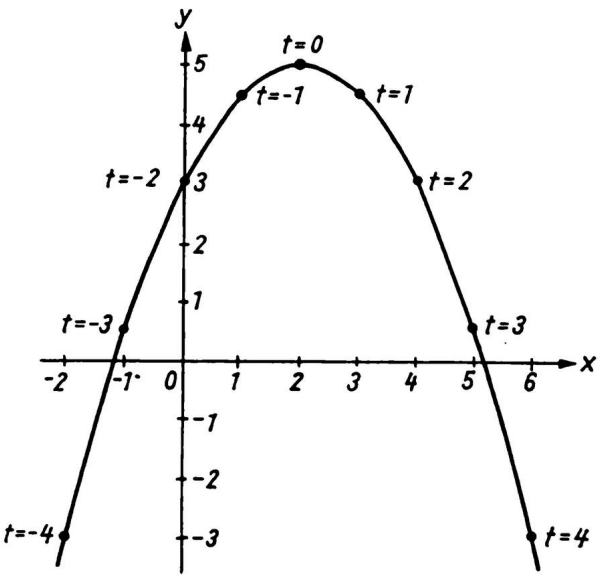


Bild 1.20

Beispiel 1.57

Der Kreis im Bild 1.18 hat die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x &= 5\cos t = \varphi(t) \\ y &= 5\sin t = \psi(t) \end{aligned} \qquad T \in [0, 2\pi) \tag{V}$$

Der Parameter t ist hier ein Drehwinkel. Durchläuft t alle Werte von 0 bis 2π, dann ergeben sich alle Kreispunkte. Quadrieren und Addieren der Gleichungen (V) ergibt mit $x^2 + y^2 = 25(\cos^2 t + \sin^2 t) = 25$ (vgl. (1.50)) wieder die implizite Form der Kreisgleichung aus Beispiel 1.55. Die Gleichungen (V) stellen also zwei Funktionen dar.

Die Parameterdarstellung ist die allgemeinere Darstellung. Nicht jede Funktion mit einer Parameterdarstellung hat eine explizite oder implizite parameterfreie Funktionsgleichung. Das gilt z.B. für $x = t + 2\sin t = \varphi(t)$, $y = t - \cos t = \psi(t)$.

1.3.2.3 Einteilung und Eigenschaften der Funktionen

Die Funktionen lassen sich nach dem Aufbau der Terme in den Funktionsgleichungen in verschiedene Klassen einteilen.

Ganzrationale Funktionen n-ten Grades oder *Polynome n-ten Grades* sind Funktionen, in denen auf eine reelle Variable x nur endlich viele Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen angewendet werden. Die allgemeine Form ist:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,, a_n \neq 0$$

Z.B. stellt $f(x) = 2x^3 - 5x + 1$ eine ganzrationale Funktion 3. Grades dar.

In **gebrochenrationalen Funktionen** erscheint x außerdem bei endlich vielen Divisionen im Divisor. Die allgemeine Form ist

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}\,, \qquad m, n \in \mathbb{N}\,, a_n \neq 0\; b_m \neq 0$$

Beispiele: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x^2 - x - 5}$, $f(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 3}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$

In **algebraisch–irrationalen Funktionen steht** x zusätzlich bei endlich vielen Wurzeln im Radikand.

Beispiele: $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt[5]{2 + \sqrt[3]{x}}}{2 + x^4}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Die rationalen und algebraisch–irrationalen Funktionen ergeben vereinigt die Klasse der **algebraischen Funktionen**. Die Gleichung jeder algebraischen Funktion läßt sich auf die implizite Form bringen:

$$F(x; y) = p_n(x)y^n + p_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + p_1(x)y + p_0(x) = 0$$

$p_i(x)$ mit $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ ist ein Polynom i-ten Grades.

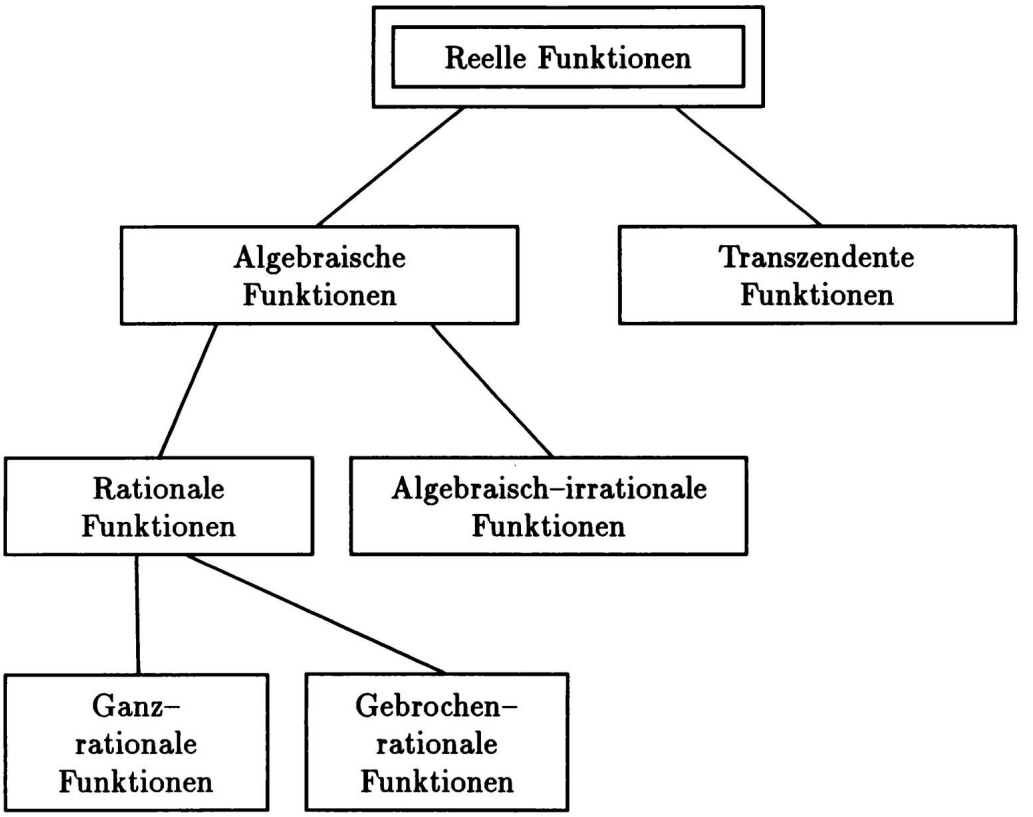
Beispiel: Die Funktion $f:\ y = \sqrt[3]{\dfrac{5 - x}{1 + x^2}}$, $x \in (-\infty, 5]$ hat die implizite Funktionsgleichung $F(x; y) = (1 + x^2)y^3 + x - 5 = 0$.

Alle nicht–algebraischen Funktionen heißen **transzendente Funktionen** (genauer: transzendent–irrational). Ihre Funktionswerte lassen sich theoretisch nur durch unendliche Reihen, d.h. durch unendlich viele Rechenoperationen, bestimmen. Praktisch werden sie durch rationale Funktionen angenähert.

Beispiele: $f(x) = 2^x$, $f(x) = \ln x$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \arctan x$ usw.

Algebraische und transzendente Funktionen bilden zusammen die Klasse der reellen Funktionen.

Bemerkung: Häufig werden nur rationale und irrationale Funktionen unterschieden.



Definition

Eine Funktion $f: x \mapsto f(x)$

heißt im Intervall $I \subseteq X$ **monoton** $\left\{ \begin{array}{c} \textbf{steigend} \\ \textbf{fallend} \end{array} \right\}$,

wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ und $x_1 < x_2$ gilt $\left\{ \begin{array}{l} f(x_1) \leq f(x_2) \\ f(x_1) \geq f(x_2) \end{array} \right\}$,

sie heißt **streng monoton** $\left\{ \begin{array}{c} \textbf{steigend} \\ \textbf{fallend} \end{array} \right\}$ für $\left\{ \begin{array}{l} f(x_1) < f(x_2) \\ f(x_1) > f(x_2) \end{array} \right\}$.

Beispiel 1.58

a) $f: y = -2x + 1$ ist für $I = X = \mathbb{R}$ streng monoton fallend

b) $f: y = \sin x$ ist für $I_1 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton steigend

$I_2 = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ streng monoton fallend usw.

Ist f in I monoton, so heißt das zugehörige Kurvenstück des Funktionsgraphen **Monotoniebogen** (Bild 1.21).

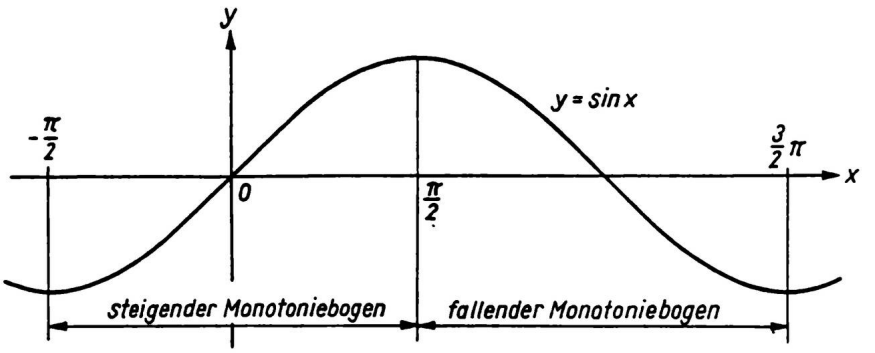


Bild 1.21

Definition

Eine Funktion $f: x \mapsto f(x)$ heißt $\left\{\begin{array}{c}\textbf{gerade Funktion}\\ \textbf{ungerade Funktion}\end{array}\right\}$,

wenn für jedes $x \in X$ und $-x \in X$ gilt: $\left\{\begin{array}{l} f(-x) = f(x) \\ f(-x) = -f(x) \end{array}\right\}$.

Die Graphen von geraden Funktionen sind axialsymmetrisch zur y-Achse, die Graphen von ungeraden Funktionen sind zentralsymmetrisch (punktsymmetrisch) zum Ursprung O.

Beispiel 1.59

a) Die Funktion $f: y = x^4 - 2x^2 + 1$ ist eine gerade Funktion wegen $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 = f(x)$ (Bild 1.22).

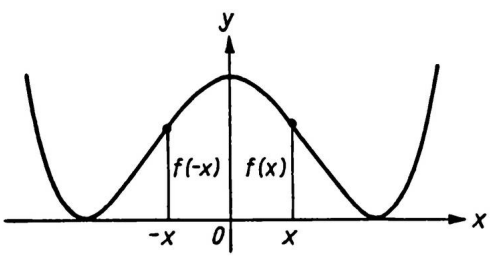


Bild 1.22

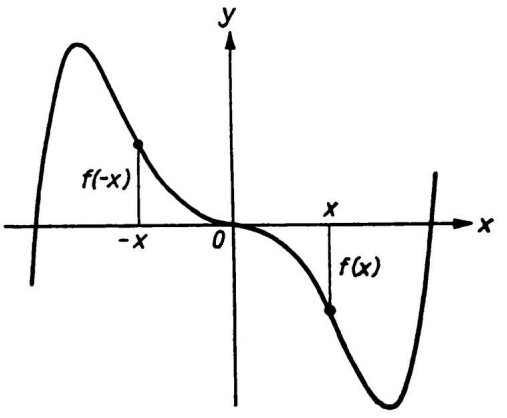


Bild 1.23

b) Die Funktion $f: y = \frac{1}{5}x^5 - x^3$ ist eine ungerade Funktion wegen

$$f(-x) = \frac{1}{5}(-x)^5 - (-x)^3 = -\frac{1}{5}x^5 + x^3 = -\left(\frac{1}{5}x^5 - x^3\right) = -f(x)$$ (Bild 1.23).

Eine ganzrationale Funktion ist gerade bzw. ungerade, wenn alle Exponenten von x gerade bzw. ungerade sind. Die Funktion $y = 2x^3 - 4x^2 + 6x + 1$ ist weder gerade noch ungerade.

Definition

Eine Funktion $f : x \mapsto f(x)$ heißt **periodisch**, wenn eine reelle Zahl $p > 0$ existiert, so daß für alle $x \in X$, $x + kp \in X$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$f(x + kp) = f(x).$$

p heißt die **Periode** der Funktion f.
Die kleinste Periode p heißt **primitive Periode**.

Im allgemeinen wird unter der Periode einer Funktion die primitive Periode verstanden (Bild 1.24).

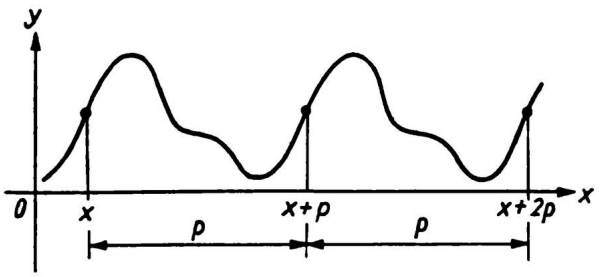


Bild 1.24

Die Funktionen $f : x \mapsto \sin x$ und $f : x \mapsto \cos x$ haben die Periode $p = 2\pi$,

die Funktionen $f : x \mapsto \tan x$ und $f : x \mapsto \cot x$ haben die Periode $p = \pi$.

1.3.2.4 Umkehrfunktion

Die Funktion $f : x \mapsto y$ ordnet jedem $x \in X$ eindeutig ein $y \in Y$ zu. Kann umgekehrt auch jedem $y \in Y$ eindeutig ein $x \in X$ zugeordnet werden, so entsteht die **Umkehrfunktion** oder **inverse Funktion** von f. Sie wird mit f^{-1} bezeichnet, d.h. $f^{-1} : y \mapsto x$.

Bei gegebener Funktionsgleichung $y = f(x)$ von f erhält man die Funktionsgleichung von f^{-1} in zwei Schritten.

1. Schritt: Umstellen der Funktionsgleichung nach x : $x = f^{-1}(y)$.

2. Schritt: Vertauschen der Bezeichnung der Variablen (damit die abhängige und unabhängige Variable die übliche Bezeichnung erhalten):
$y = f^{-1}(x)$. Dieser 2. Schritt hat also nur formalen Charakter.

Beispiel 1.60

a) $f:\ y = \frac{1}{2}x - 1 = f(x),\ X = Y = \mathbb{R}.$

1. Schritt: $f^{-1}:\ x = 2y + 2 = f^{-1}(y)$

2. Schritt: $f^{-1}:\ y = 2x + 2 = f^{-1}(x)$ ist Umkehrfunktion von f.

Bild 1.25 zeigt, daß die Graphen von f und f^{-1} symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $y = x$ liegen, d.h., der Graph von f^{-1} ergibt sich durch Spiegelung des Graphen von f an dieser Geraden.

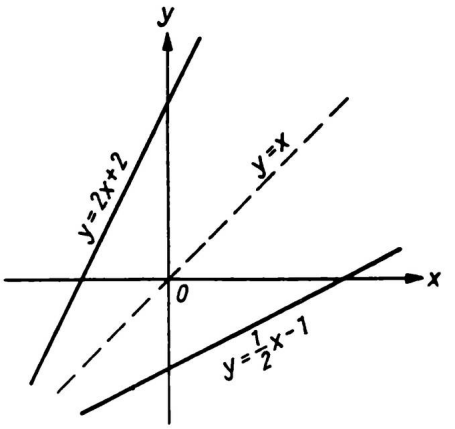


Bild 1.25

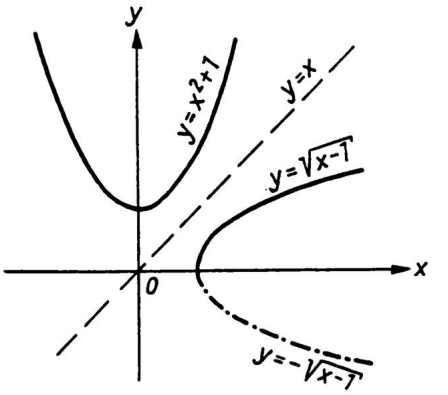


Bild 1.26

b) $f:\ y = x^2 + 1,\ X = \mathbb{R},\ Y = [1, \infty)$ (Bild 1.26)

1. Schritt führt zu zwei Umkehrfunktionen:

$f_1^{-1}:\ x = \sqrt{y-1},\ f_2^{-1}:\ x = -\sqrt{y-1}$

2. Schritt:

$f_1^{-1}:\ y = \sqrt{x-1},\ X_1 = [1, \infty),\ Y_1 = [0, \infty)$

$f_2^{-1}:\ y = -\sqrt{x-1},\ X_2 = [1, \infty),\ Y_2 = (-\infty, 0]$

Die Frage, wann eine Funktion eindeutig umkehrbar ist, d.h. nur eine Umkehrfunktion existiert, beantwortet der folgende

Satz

> Ist eine Funktion f in einem Intervall $I \subseteq X$ streng monoton, dann existiert für dieses Intervall die Umkehrfunktion f^{-1}.

Die Funktion f in Beispiel 1.60a ist streng monoton steigend und hat daher eine Umkehrfunktion. f in Beispiel 1.60b ist nicht monoton, läßt sich aber in eine streng monoton fallende Funktion f_2 für $x \in (-\infty, 0]$ und eine streng monoton steigende Funktion f_2 für $x \in [0, \infty)$ zerlegen. f_1 und f_2 haben dann je die Umkehrfunktion f_1^{-1} bzw. f_2^{-1}.

1.3.2.5 Spezielle Abbildungen

Eine Funktion $f: y = f(x)$ habe den Graphen k. Werden zu den Variablen x, y Konstanten addiert oder werden x, y mit Konstanten multipliziert, so entsteht die Gleichung einer neuen Funktion $\overline{f}$ mit dem Graphen $\overline{k}$. Durch Kenntnis der Abbildungen $k \mapsto \overline{k}$ können die Graphen verschiedener Funktionen aus gewissen Grund- oder Normalformen gewonnen werden. Wichtig sind folgende Fälle:

$f: y = f(x)$ wird abgebildet auf:	Die Abbildung $k \mapsto \overline{k}$ bedeutet:
$\overline{f}: \boxed{y = f(x + a)}$	Schiebung um $-a$ parallel zur x-Achse (Bild 1.27).

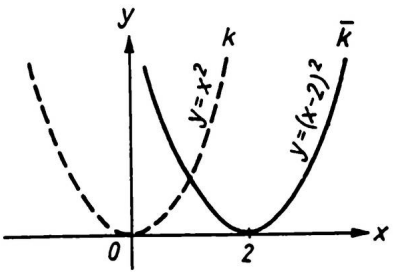


Bild 1.27

$\overline{f}: \boxed{y = f(x) + b}$	Schiebung um b parallel zur y-Achse (Bild 1.28).

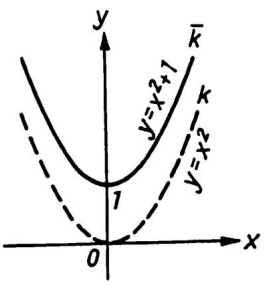


Bild 1.28

$\overline{f}: \boxed{y = f(cx)}$

$0 < \lvert c\rvert < 1:$	Streckung in x-Richtung
$\lvert c\rvert > 1:$	Stauchung in x-Richtung (Bild 1.29).

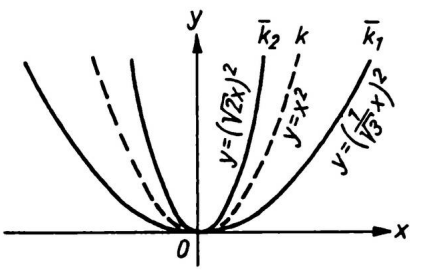


Bild 1.29

$c < 0$: Spiegelung an der y-Achse (Bild 1.30 für $c = -1$)

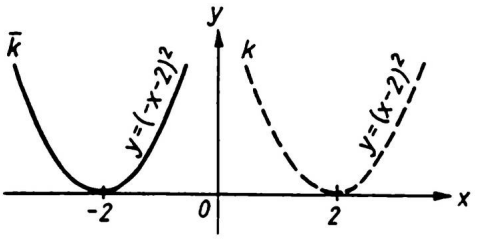


Bild 1.30

$\overline{f}$: $\boxed{y = df(x)}$

$0 < |d| < 1$: Stauchung in y-Richtung
$|d| > 1$: Streckung in y-Richtung
(Bild 1.31)

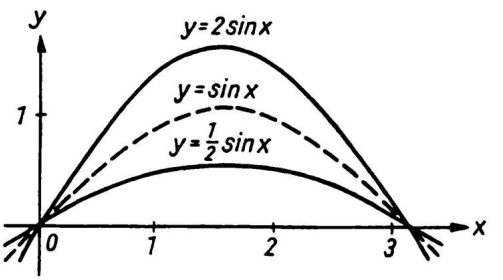


Bild 1.31

$d < 0$: Spiegelung an der x-Achse (Bild 1.32)

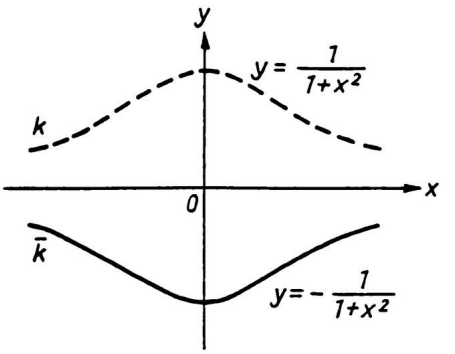


Bild 1.32

1.3.3 Spezielle Funktionen

Im folgenden werden die wichtigsten Funktionen kurz erläutert. Weitere Eigenschaften werden im Rahmen der Kurvendiskussionen im Abschnitt 5.2.10.1 behandelt.

1.3.3.1 Ganzrationale Funktionen

Die Gleichungen der ganzrationalen Funktionen n-ten Grades lassen sich nach Abschn. 1.3.2.3 stets auf die Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\,, \qquad a_i \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N} \quad \text{(I)}$$

bringen. Ihr Definitionsbereich ist $X \in \mathbb{R}$. Die ganzrationalen Funktionen sind für jedes $x \in \mathbb{R}$ stetig (vgl. Abschn. 5.3).

Die Graphen der ganzrationalen Funktionen heißen **Parabeln n-ten Grades**. Bild 1.33 zeigt Parabeln 3., 4. und 5. Grades.

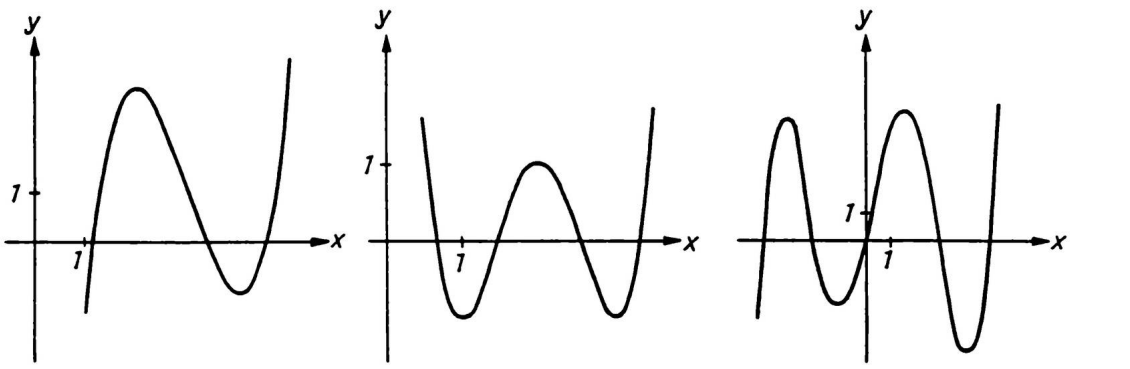


Bild 1.33

Die Berechnung von Funktionswerten ganzrationaler Funktionen wird einfacher durch Verwendung des **Schemas von Horner**[1].

Zu gegebenem x_0 soll $f(x_0)$ berechnet werden. Nach (I) ist

$$f(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + a_{n-2} x_0^{n-2} + \ldots + a_1 x_0 + a_0.$$

Durch Ausklammern erhält man

$$f(x_0) = (\ldots((a_n x_0 + a_{n-1})x_0 + a_{n-2})x_0 + \ldots + a_1)x_0 + a_0\,,$$

d.h. a_n wird mit x_0 multipliziert, zum Produkt a_{n-1} addiert, die Summe mit x_0 multipliziert usw. Für diese im Wechsel durchgeführten Multiplikationen und Additionen ist das folgende Schema geeignet:

	a_n		a_{n-1}		a_{n-2}		$\ldots$	a_1		a_0		
$x = x_0$		$\downarrow$	$a_n x_0$	$\downarrow$	$(a_n x_0 + a_{n-1})x_0$	$\downarrow$	$\ldots$	$\ldots$	$\downarrow$	$\ldots$	$\ldots$	$\downarrow$
	a_n	$\nearrow$	$a_n x_0 + a_{n-1}$	$\nearrow$	$\ldots$	$\nearrow$	$\ldots$	$\ldots$	$\nearrow$	$\ldots$	$f(x_0)$	

In die erste Zeile werden die Koeffizienten a_i geschrieben. a_n wird in die dritte Zeile übertragen, mit x_0 multipliziert und $a_n x_0$ in die zweite Zeile unter a_{n-1} geschrieben, dann wird wieder addiert usw. Der Pfeil $\downarrow$ bedeutet also die Addition der übereinanderstehenden Zahlen der ersten und zweiten Zeile, der Pfeil $\nearrow$ bedeutet Multiplikation der Zahlen der dritten Zeile mit x_0. Die letzte Zahl der dritten Zeile ist $f(x_0)$.

[1] WILLIAM GEORGE HORNER, 1786–1837, englischer Mathematiker

Beispiel 1.61

$f(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 3x - 10.$ (II)

Gesucht wird $f(3)$.

Lösung:

Berechnung im Horner-Schema mit $x_0 = 3$ ergibt

	1	−5	7	3	−10
$x = 3$		3	−6	3	18
	1	−2	1	6	$\underline{\underline{8 = f(3)}}$

Um die **Nullstellen** der Funktion f zu berechnen, wird in (I) $f(x)$ gleich null gesetzt:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

Die Nullstellen sind die reellen Lösungen x_i dieser Gleichung n-ten Grades. Die x_i sind die Abszissen der Schnittpunkte zwischen dem Graphen der Funktion und der x-Achse. Ist $x = x_0$ eine Nullstelle der Funktion, dann kann nach Abschn. 1.2.2 der Term der Gleichung in das Produkt eines Linearfaktors $x - x_0$ und eines ganzrationalen Terms $(n-1)$-ten Grades zerlegt werden. Die Koeffizienten dieses Terms, d.h. der reduzierten Gleichung, ergeben sich statt der erwähnten Partialdivision sofort aus der dritten Zeile des Horner-Schemas, das für $x = x_0$ aufgestellt wurde. Auf einen Beweis wird verzichtet.

Beispiel 1.61 (Fortsetzung)

Zur Berechnung der Nullstellen von f ist die Gleichung

$x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 3x - 10 = 0$ (III)

zu lösen. Durch Probieren findet man für $x_1 = 2$

	1	−5	7	3	−10	
$x = 2$		2	−6	2	10	
	1	−3	1	5	0	$= f(2)$

$x_1 = 2$ ist also eine Nullstelle. Die Gleichung (III) läßt sich aufspalten in

$(x - 2)\left(x^3 - 3x^2 + x + 5\right) = 0$ (IV)

Für die reduzierte Gleichung ergibt sich nach Probieren mit verschiedenen x-Werten für $x_2 = -1$:

	1	−3	1	5	
$x = -1$		−1	4	−5	
	1	−4	5	0	$= f(-1)$

$x_2 = -1$ ist eine weitere Nullstelle. Gleichung (IV) läßt sich weiter zerlegen in

$(x + 1)(x - 2)\left(x^2 - 4x + 5\right) = 0$

Die zweite reduzierte Gleichung

$x^2 - 4x + 5 = 0$

hat die Lösungen $x_3 = 2 + \mathrm{j}$, $x_4 = 2 - \mathrm{j}$. Damit hat die Funktion mit der Gleichung (II) die (reellen) Nullstellen $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

Bei nicht ganzzahligen Nullstellen werden die in Abschn. 5.2.10.3 behandelten Näherungsverfahren angewandt.

Die Aufgabe, zu einer gegebenen Funktionsgleichung eine Wertetabelle aufzustellen, kann auch als Umkehrung auftreten. Gegeben ist eine Wertetabelle von einer Funktion, deren Gleichung gesucht wird. Die Wertepaare sind meist Resultate von Messungen. Da die ganzrationalen Funktionen zu den einfachsten Funktionen gehören, wird die unbekannte Funktion in der Praxis häufig durch eine ganzrationale Funktion approximiert. Der Grad dieser Funktion richtet sich nach der Anzahl der vorliegenden Wertepaare. Die Gleichung einer Funktion n-ten Grades enthält nach (I) $n+1$ Koeffizienten a_i, für deren Berechnung $n+1$ Gleichungen, also $n+1$ Wertepaare gebraucht werden. Damit lautet die Aufgabe:

Gegeben sind $n+1$ Wertepaare (x_0, y_0), (x_1, y_1), $\ldots (x_n, y_n)$. Gesucht wird die ganzrationale Funktion n-ten Grades

$$f: \; y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = f(x),$$

die den $n+1$ Gleichungen

$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n \tag{V}$$

genügt.

Die x_i heißen *Stützstellen*, die y_i *Stützwerte* der Funktion. (V) stellt ein Gleichungssystem von $n+1$ Gleichungen für die $n+1$ Unbekannten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dar. Sind alle x_i paarweise voneinander verschieden, dann läßt sich zeigen, daß das Gleichungssystem stets eine Lösung hat. Es gibt also genau eine ganzrationale Funktion von (höchstens) n-tem Grad, die die Gleichungen (V) erfüllt. Die a_i können aus (V) berechnet werden. Vorteilhaft ist ihre Bestimmung mit Hilfe des **Newtonschen**[1] **Interpolationspolynoms**:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = b_0 &+ b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &+ b_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ b_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) \end{aligned}} \tag{1.42}$$

In (1.42) werden nacheinander für x die Stützstellen x_i und die Stützwerte $f(x_i) = y_i$ eingesetzt:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= y_0 = b_0 \\ f(x_1) &= y_1 = b_0 + b_1(x_1 - x_0) \\ f(x_2) &= y_2 = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x_n) &= y_n = b_0 + b_1(x_n - x_0) + \ldots + b_n(x_n - x_0)\ldots(x_n - x_{n-1}) \end{aligned} \tag{VI}$$

Das Gleichungssytem (VI) mit den Unbekannten $b_0, b_1, \ldots, b_n$ ist ein *gestaffeltes Gleichungssystem*, d.h., die erste Gleichung enthält nur die Unbekannte b_0, die zweite Gleichung enthält b_0, b_1 usw. Damit können, beginnend mit der ersten

[1] Isaak Newton, 1643–1727, engl. Mathematiker und Physiker

Gleichung, die Unbekannten b_i schrittweise nach dem Einsetzverfahren berechnet werden.

Beispiel 1.62

Gesucht wird die Gleichung der ganzrationalen Funktion 3. Grades, die die Wertepaare $(-1;-19)$, $(1;7)$, $(4;1)$, $(5;11)$ enthält.

Lösung:

Das Newtonsche Interpolationspolynom (1.42) hat für $n = 3$ die Form:

$f(x) = y = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + b_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$.

Mit den gegebenen Stützstellen folgt

$$f(x) = y = b_0 + b_1(x + 1) + b_2(x + 1)(x - 1) + b_3(x + 1)(x - 1)(x - 4) \qquad \text{(VII)}$$

Einsetzen der Werte x_i, y_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ ergibt

$$\begin{aligned} f(-1) &= -19 &&= b_0 \\ f(1) &= 7 &&= b_0 + 2b_1 \\ f(4) &= 1 &&= b_0 + 5b_1 + 15b_2 \\ f(5) &= 11 &&= b_0 + 6b_1 + 24b_2 + 24b_3 \end{aligned}$$

Daraus folgt schrittweise:

$$b_0 = -19$$

$$b_1 = \frac{7 - b_0}{2} = 13$$

$$b_2 = \frac{1 - b_0 - 5b_1}{15} = -3$$

$$b_3 = \frac{11 - b_0 - 6b_1 - 24b_2}{24} = 1$$

Die Werte für b_i werden in (VII) eingesetzt:

$$y = -19 + 13(x + 1) - 3(x + 1)(x - 1) + (x + 1)(x - 1)(x - 4)$$

Daraus folgt die gesuchte Funktionsgleichung

$$\underline{\underline{y = x^3 - 7x^2 + 12x + 1}}$$

Weitere Formeln zur Lösung der oben formulierten Aufgabe, wie z.B. das *Interpolationspolynom von Lagrange* oder die *Gaußsche Interpolationsformel* können weiterführender Literatur entnommen werden.

1.3.3.2 Gebrochenrationale Funktionen

Die Gleichung jeder gebrochenrationalen Funktion läßt sich auf die Form bringen

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0},$$

$$a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0,\ b_m \neq 0,\ m, n \in \mathbb{N} \qquad \text{(I)}$$

Für $m > n$ liegt eine *echt gebrochenrationale Funktion* vor, für $m \leq n$ eine *unecht gebrochenrationale Funktion.*

Gebrochenrationale Funktionen sind an den Stellen, an denen der Nenner gleich null wird, unstetig. Ihr Graph ist dann keine zusammenhängende Kurve mehr, sondern kann in *Äste* zerfallen. Außerdem haben die Graphen gebrochenrationaler Funktionen *Asymptoten*. Die Untersuchung der Unstetigkeiten (Pole, Lücken) und der Asymptoten erfolgt unter Verwendung des Grenzwertbegriffs in Abschnitt 5.
Bild 1.34 zeigt als Beispiel den Graphen einer gebrochenrationalen Funktion.

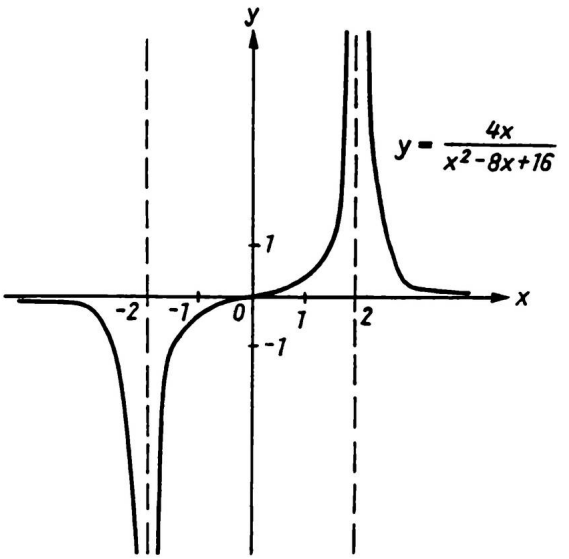


Bild 1.34

1.3.3.3 Wurzelfunktionen

Wurzelfunktionen gehören zu den irrationalen Funktionen. Damit der Term unter der Wurzel nicht negativ wird, ist x häufig auf ein echtes Teilintervall von $\mathbb{R}$ beschränkt. Hierzu einige Beispiele.

Beispiel 1.63

Die Bilder 1.35 und 1.36 zeigen die Graphen der Potenzfunktion
$f: y = x^n$ für $n = \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}$.

Für die Funktionen $f: y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ bzw. $f: y = x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x}$ (Bild 1.35) ist $X = [0, \infty)$, $Y = [0, \infty)$. Die Graphen berühren im Ursprung die y-Achse.
Für die Funktionen $f: y = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ bzw. $f: y = x^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$ (Bild 1.36) ist $X = (0, \infty), Y = (0, \infty)$. Die Graphen haben die x- und die y-Achse als Asymptoten.

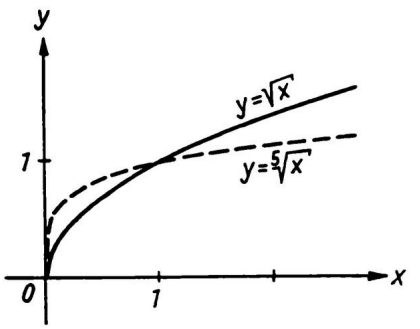


Bild 1.35

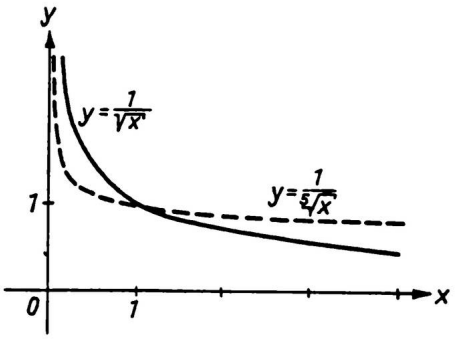


Bild 1.36

Beispiel 1.64

Für die Funktion $f: y = \sqrt{4-2x}$ muß $4 - 2x \geq 0$ sein, also $x \leq 2$, d.h. $X = [-\infty, 2)$, $Y = [0, \infty)$ (Bild 1.37).

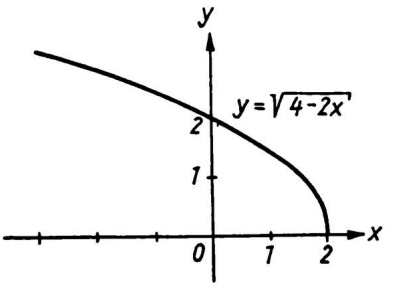


Bild 1.37

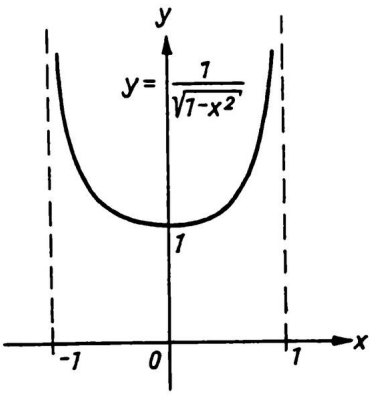


Bild 1.38

Beispiel 1.65

Bild 1.38 zeigt den Graph der Funktion

$$f: y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Aus $1 - x^2 > 0$ folgt $X = (-1, 1)$ und $Y = [1, \infty)$. Die Geraden mit den Gleichungen $x = -1$ und $x = 1$ sind Asymptoten.

1.3.3.4 Exponential- und Logarithmusfunktionen

Die **Exponentialfunktion**

$$f: y = b^x, \quad b > 0, \; b \neq 1$$

hat den Definitionsbereich $X = \mathbb{R}$, sie ist für alle x stetig. Wegen $b^x \neq 0$ für alle x hat die Exponentialfunktion keine Nullstellen. Die Funktionswerte $y = f(x)$ sind stets positiv und man kann zeigen, daß die Exponentialfunktion für $b > 1$ streng monoton steigend und für $0 < b < 1$ streng monoton fallend ist. Wegen $b^0 = 1$ geht der Graph stets durch den Punkt $P(0; 1)$.

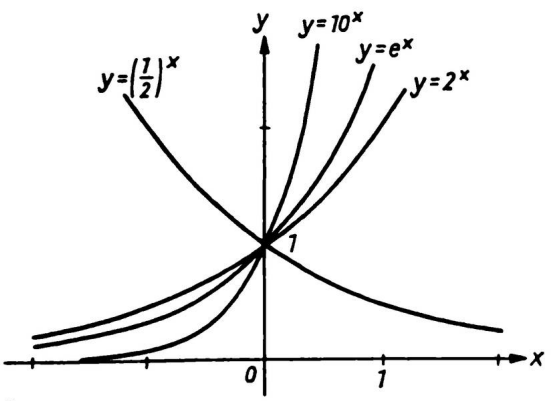


Bild 1.39

Die x-Achse ist eine Asymptote des Graphen. Der Wertebereich der Exponentialfunktion ist $Y = (0, \infty)$.

Bild 1.39 zeigt die Graphen für $b = 10, b = \mathrm{e}, b = 2$ und $b = \frac{1}{2}$.

Die Gleichung $y = b^x$ jeder Exponentialfunktion läßt sich auf eine Gleichung mit der Basis e zurückführen. Denn mit $b = \mathrm{e}^{\ln b}$ (vgl. 1.18) ist

$$y = b^x = \left(\mathrm{e}^{\ln b}\right)^x = \mathrm{e}^{\ln b \cdot x} \text{ und mit } \ln b = k \text{ folgt } \quad y = \mathrm{e}^{kx}.$$

Deshalb wird im folgenden nur die Exponentialfunktion mit $b = \mathrm{e}$ betrachtet und zwar in der allgemeinen Form

$$f: \; y = c\mathrm{e}^{kx} \text{ und } f: \; y = c\mathrm{e}^{-kx} \quad c, k > 0 \tag{I}$$

Bild 1.40 zeigt die Graphen dieser Funktionen ($c = 0,4$, $k = 1,2$). Die Graphen liegen symmetrisch zur y-Achse.
Wichtig ist auch die Funktion

$$f: \; y = c(1 - \mathrm{e}^{-kx}), \quad c, k > 0 \tag{II}$$

Diese Funktion ist streng monoton steigend und hat die Asymptote mit der Gleichung $y = c$. Bild 1.41 zeigt den Graph der Funktion für $c = 3$, $k = 0,5$ und $x \geq 0$.

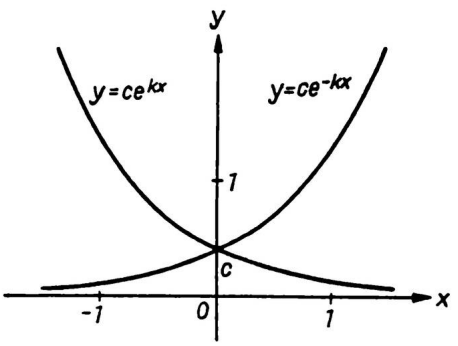


Bild 1.40

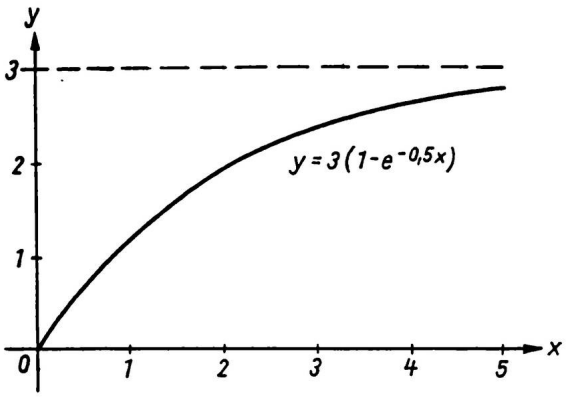


Bild 1.41

Die Funktionen (I) und (II) haben große Bedeutung für die mathematische Beschreibung von Vorgängen in der Naturwissenschaft und Technik. Sie beschreiben zum Beispiel Wachstumsprozesse und Prozesse des Abklingens. Als Beispiele seien genannt

organisches Wachstum:	$c = c_0\mathrm{e}^{\alpha t}$	c_0	Anfangsbestand
		α	Wachstumsrate
		t	Zeit
Gesetz des radioaktiven Zerfalls:	$N = N_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$	N_0	Anzahl der zur Zeit $t = 0$ aktiven Atomkerne
		λ	Zerfallskonstante

Kondensatorladung bei Gleichspannung: $U = U_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ U_0 Ladespannung, $\tau = RC$ Zeitkonstante

Beispiel 1.66

Die Kondensatorspannung u_c klingt bei der Entladung nach dem Gesetz

$$u_c = U_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = f(t) \qquad \text{(III)}$$

ab. Es ist $U_0 = 500\,\mathrm{V}$ die Spannung zur Zeit $t = 0$ und $\tau = 3\,\mathrm{s}$ die Zeitkonstante.
a) Wie groß ist u_c für $t = 5\,\mathrm{s}$, $10\,\mathrm{s}$, $15\,\mathrm{s}$?
b) Nach welcher Zeit hat u_c den halben Wert von U_0 erreicht?

Lösung:

a) $u_c(5\,\mathrm{s}) = 500\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{5\mathrm{s}}{3\mathrm{s}}} = 94,4\,\mathrm{V}$

$u_c(10\,\mathrm{s}) = 500\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{10\mathrm{s}}{3\mathrm{s}}} = 17,8\,\mathrm{V}$

$u_c(15\,\mathrm{s}) = 500\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{15\mathrm{s}}{3\mathrm{s}}} = 3,4\,\mathrm{V}$

b) Die Umstellung von (III) nach t ergibt

$$t = -\tau \ln \frac{u_c}{U_0}$$

und für $u_c = \frac{1}{2}U_0$ folgt

$$t = -3\,\mathrm{s} \cdot \ln \frac{1}{2} = 2,1\,\mathrm{s}.$$

Die Logarithmusfunktion

$$f:\ y = \log_b x \qquad b > 0\,,\ b \neq 1 \qquad \text{(IV)}$$

ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $y = b^x$. Der Graph der Logarithmusfunktion liegt daher symmetrisch zum Graph der Exponentialfunktion bezüglich der Geraden mit der Gleichung $y = x$. Bild 1.42 zeigt die Graphen für $b = 10$, $b = \mathrm{e}$ und $b = 2$.

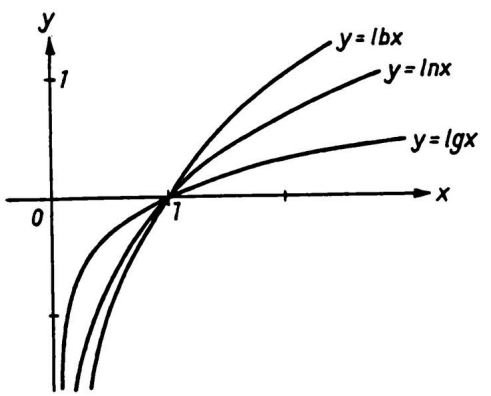


Bild 1.42

Die Logarithmusfunktion hat den Definitionsbereich $X = (0, \infty)$ und den Wertebereich $Y = \mathbb{R}$. Sie ist für $b > 1$ streng monoton steigend. Man erkennt in Bild 1.42 die bereits in Abschnitt 1.1.3.4 geschilderten Aussagen.

$\log_b x$ ist für $0 < x < 1$ negativ, für $x = 1$ gleich null und für $x > 1$ positiv. Für $x = 0$ ist $\log_b x$ nicht definiert. Für $x \to 0$ folgt $y \to -\infty$, d.h. die y-Achse ist Asymptote.

Aufgaben 1.40 bis 1.46

1.4 Goniometrie und Trigonometrie

1.4.1 Winkelmaße

Ein Winkel wird durch einen Punkt, den *Scheitelpunkt* S, durch zwei von S ausgehende Strahlen, die *Schenkel* p, q und durch Festlegung des *Winkelinneren* bestimmt. Folgende Winkelbezeichnungen sind möglich:

$\alpha = \measuredangle(p, q) = \measuredangle(ASB)$

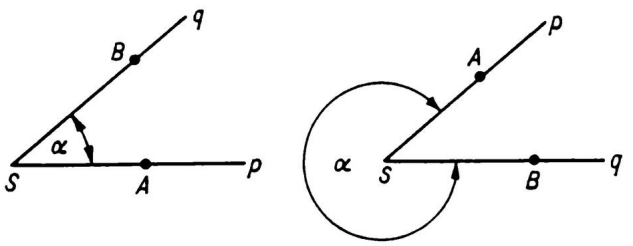


Bild 1.43

Verwendet man die Bezeichnung $\measuredangle(p, q)$, dann ist das Winkelinnere der Teil der Ebene, der bei einer mathematisch positiven Drehung (entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn) um den Punkt S von p überstrichen wird, bis p mit q zusammenfällt. Bei der Bezeichnung durch drei Punkte ist der Scheitelpunkt stets in der Mitte anzugeben.

Für $p = q$ entsteht der Nullwinkel α_0 (das Winkelinnere ist leer) oder der Vollwinkel α_v (Bild 1.44).

Bild 1.44

Gradmaß

Ein **Grad**, im Zeichen 1°, ist der 360ste Teil des Vollwinkels. Ein Grad wird **dezimal** oder **sexagesimal** unterteilt. Bei der sexagesimalen Teilung sind ein Grad gleich 60 Minuten und eine Minute gleich 60 Sekunden.

$$1° = 60', \quad 1' = 60'', \quad 1° = 3600''.$$

Die Umrechnung von einer Teilung zur anderen erfolgt mit speziellen Programmen im Taschenrechner oder durch Proportionen.
Zum Beispiel ist $\alpha = 36,1594° = 36°09'34''$
Ein **Gon** (früher Neugrad), im Zeichen 1gon, ist der 400ste Teil des Vollwinkels. Die Unterteilung ist dezimal, der 1000ste Teil des Gon heißt Milligon:
$0,001\text{gon} = 1\text{mgon}$.
Es ist $\alpha = 36,1594° = 40,1771\text{gon}$.

Bogenmaß

Im Kreis mit dem Radius r sei b der zum Winkel α gehörende Bogen (Bild 1.45). Das Verhältnis von Bogen zu Radius, also b/r, ist unabhängig von der Größe von r und wird deshalb als Winkelmaß verwendet.

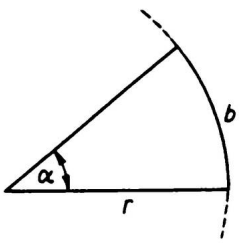


Bild 1.45

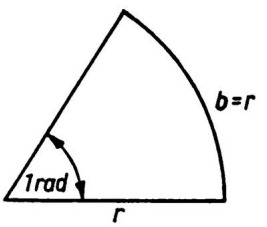


Bild 1.46

Die Einheit ist derjenige Winkel, für den $b = r$, also $b/r = 1$ ist (Bild 1.46). Er heißt **Radiant**, im Zeichen 1rad.

Als Quotient von zwei Längeneinheiten ist: $1\,\text{rad} = \dfrac{1\text{m}}{1\text{m}} = 1$, d.h. das Einheitenzeichen rad kann auch weggelassen werden:

$$\boxed{\alpha = \frac{b}{r}\,\text{rad} = \frac{b}{r}} \tag{1.43}$$

Die Maßzahl b/r des in Radiant gemessenen Winkels heißt **Bogenmaß**. Im Kreis mit $r = 1\text{LE}$ (Einheitskreis) ist das Bogenmaß von α die Maßzahl des zu α gehörenden Bogens b, gemessen mit gleicher Längeneinheit LE. Zum Vollwinkel α_v gehört als Bogen der Kreisumfang $U = 2\pi r$. Daher ist der in Radiant gemessene Vollwinkel

$$\alpha_v = 360° = \frac{b}{r}\,\text{rad} = \frac{2\pi r}{r}\,\text{rad} = 2\pi\,\text{rad} = 2\pi$$

d.h. $$\boxed{360° = 2\pi\,\text{rad} = 2\pi} \tag{1.44}$$

Entsprechend ist

$$180° = \pi\,,\quad 90° = \frac{\pi}{2}\,,\quad 45° = \frac{\pi}{4}\,,\quad 30° = \frac{\pi}{6}\quad \text{usw.}$$

Aus (1.44) folgen die für Umrechnungen der Winkelmaße geeigneten Gleichungen

$$\boxed{1° = \frac{\pi}{180}\,\text{rad} = \frac{\pi}{180}\,,\qquad 1\,\text{rad} = 1 = \frac{180°}{\pi} = 57,29578°} \tag{1.45}$$

Beispiel 1.67

Der Winkel $\alpha = 36,1594°$ ist in die Einheit Radiant umzurechnen.

Lösung:

$\alpha = 36,1594 \cdot 1° = 36,1594 \cdot \frac{\pi}{180}\,\text{rad} = \underline{\underline{0,63110\,\text{rad}}}$

1.4.2 Trigonometrische Funktionen

1.4.2.1 Definition und Darstellung

Die trigonometrischen Funktionen können wie andere irrationale Funktionen durch unendliche Reihen definiert werden. Im folgenden werden sie anschaulich als Verhältnisse der Maßzahlen von Strecken definiert.

Zugrunde gelegt wird ein *kartesisches Koordinatensystem* mit dem Ursprung 0 und den Achsen u, v (die Bezeichnung x, y soll den Variablen vorbehalten bleiben) sowie ein Polarkoordinatensystem mit dem Pol in 0 und der u–Achse als Polarachse (Bild 1.47).

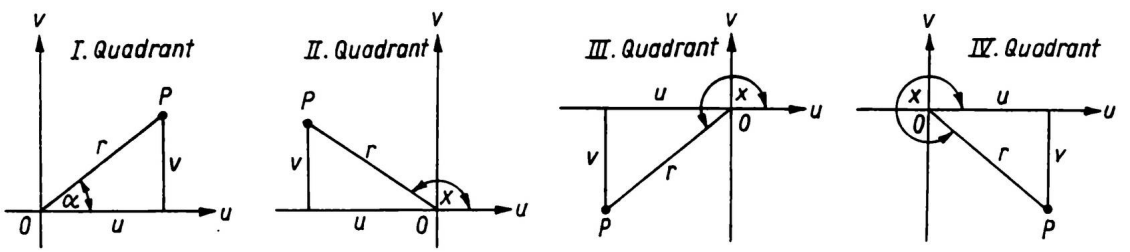


Bild 1.47

Ein beliebiger Punkt P der Koordinatenebene hat die kartesischen Koordinaten u, v mit $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$ und die Polarkoordinaten r, x mit $r \in (0, \infty)$, $x \in [0, 2\pi)$. x ist der mit der Einheit Radiant gemessene Winkel. Wegen $r > 0$ kann P nicht in 0 liegen. Bild 1.47 zeigt die Lage von P in den vier Quadranten.

Definition der trigonometrischen Funktionen

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \sin x = \frac{v}{r} & \qquad y &= \tan x = \frac{v}{u} \\ y &= \cos x = \frac{u}{r} & \qquad y &= \cot x = \frac{u}{v} \end{aligned}} \tag{1.46}$$

Für spitze Winkel x, d.h. für P im I. Quadranten, enthält (1.46) die bekannte Erklärung der trigonometrischen Funktionen im rechtwinkligen Dreieck:

$$\sin x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \tan x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\cos x = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cot x = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

Wegen $r > 0$ hängen die Vorzeichen der Funktionswerte von den Vorzeichen von u und v ab. Z.B. ist für einen Winkel im II. Quadranten $u < 0$, $v > 0$ und daher $\sin x > 0$, $\cos x < 0$, $\tan x < 0$, $\cot x < 0$.

Für $x \in (0, 2\pi)$ gilt die *Vorzeichentabelle*

Quadrant	I	II	III	IV
$x \in$	$(0, \pi/2)$	$(\pi/2, \pi)$	$(\pi, 3/2\pi)$	$(3/2\pi, 2\pi)$
$\sin x$	> 0	> 0	< 0	< 0
$\cos x$	> 0	< 0	< 0	> 0
$\tan x$	> 0	< 0	> 0	< 0
$\cot x$	> 0	< 0	> 0	< 0

Die trigonometrischen Funktionen sind auch für Winkel größer als 2π und für negative Winkel definiert. Wird in Bild 1.47 der Winkel x um 2π vergrößert, dann ergibt sich der gleiche Punkt P und es folgen für $x+2\pi$ die gleichen Funktionswerte wie für x. Für $y = \tan x$ und $y = \cot x$ folgen schon für $x + \pi$ die gleichen Funktionswerte.

Periodizität der trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned} \sin(x + k \cdot 2\pi) &= \sin x \\ \cos(x + k \cdot 2\pi) &= \cos x \\ \tan(x + k \cdot \pi) &= \tan x \\ \cot(x + k \cdot \pi) &= \cot x \end{aligned} \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{1.47}$$

Durch eine Drehung um x im negativen Drehsinn erhält man den Winkel $-x$.

Nach Bild 1.48 ist $\sin x = \frac{v}{r}$, $\sin(-x) = \frac{-v}{r} = -\sin x$.

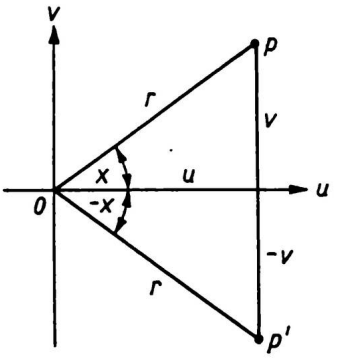


Bild 1.48

Allgemein gilt für die **Funktionswerte negativer Winkel**

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x \\ \cos(-x) &= \cos x \\ \tan(-x) &= -\tan x \\ \cot(-x) &= -\cot x \end{aligned}} \tag{1.48}$$

Die Cosinusfunktion ist nach (1.48) eine gerade Funktion, während die drei anderen trigonometrischen Funktionen ungerade Funktionen sind.

Wegen $r > 0$ sind nach (1.46) die Sinus- und die Cosinusfunktion für beliebige Winkel x definiert, also stetige Funktionen. Da stets $|u| \leq r$ und $|v| \leq r$, gilt $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$.

Die Tangensfunktion ist für $u = 0$ nicht definiert, also unstetig für $x = \pi/2, (3/2)\pi, \ldots$, allgemein für $(2k+1)(\pi/2)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Die Cotangensfunktion ist für $v = 0$ nicht definiert, also unstetig für $x = 0, \pi, \ldots$, allgemein für $k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Aus (1.46) folgt $\tan x \in \mathbb{R}$, $\cot x \in \mathbb{R}$.

Zusammengefaßt erhält man für die trigonometrischen Funktionen die folgenden *Definitions-* und *Wertebereiche.*

$$\begin{aligned} &y = \sin x, && X = \mathbb{R}, && Y = [-1, 1] \\ &y = \cos x, && X = \mathbb{R}, && Y = [-1, 1] \\ &y = \tan x, && X = \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right\}, && Y = \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &y = \cot x, && X = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi\}, && Y = \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Wird im Bild 1.47 $r = 1$ gewählt, dann liegen die Punkte P auf dem **Einheitskreis**, und die Werte der trigonometrischen Funktionen lassen sich als mit Vorzeichen versehene Maßzahlen von Strecken entsprechend Bild 1.49 darstellen. Für einen Punkt $P(u, v)$ ist stets $u = \cos\alpha$, $v = \sin\alpha$. Die Funktionswerte $\tan\alpha$ und $\cot\alpha$ sind durch die Maßzahlen der Strecken $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$ gegeben. Diese Maßzahlen erhalten das positive oder negative Vorzeichen je nachdem, ob

die Richtung von A nach B mit der positiven oder negativen Richtung der v-Achse und die Richtung von C nach D mit der positiven oder negativen Richtung der u-Achse übereinstimmt. Bild 1.50 zeigt die Darstellung der Funktionswerte für den II. Quadranten.

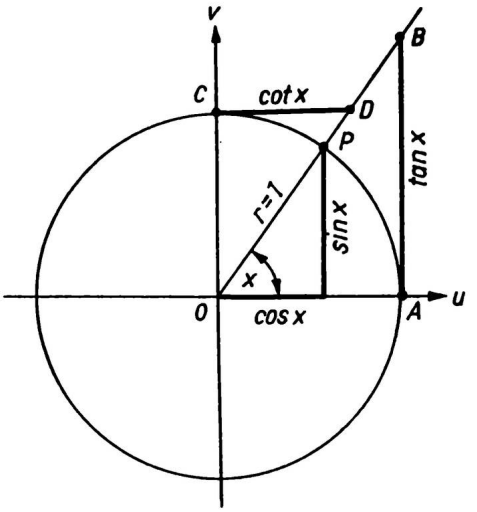


Bild 1.49

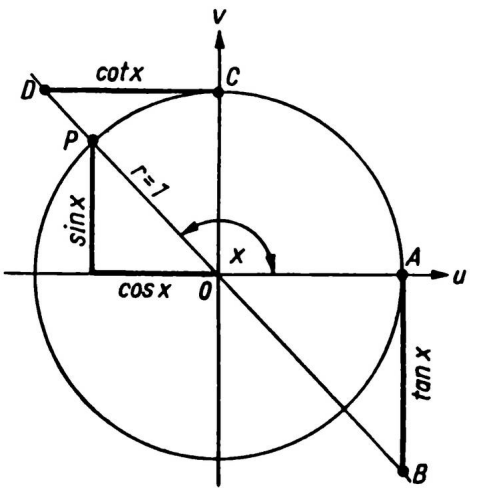


Bild 1.50

Einen besseren Überblick über die Werteverteilung geben die Graphen der trigonometrischen Funktionen (Bilder 1.51 und 1.52).

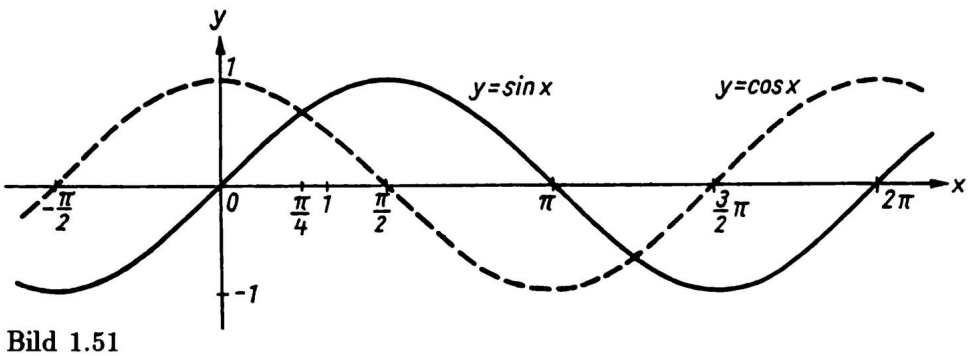


Bild 1.51

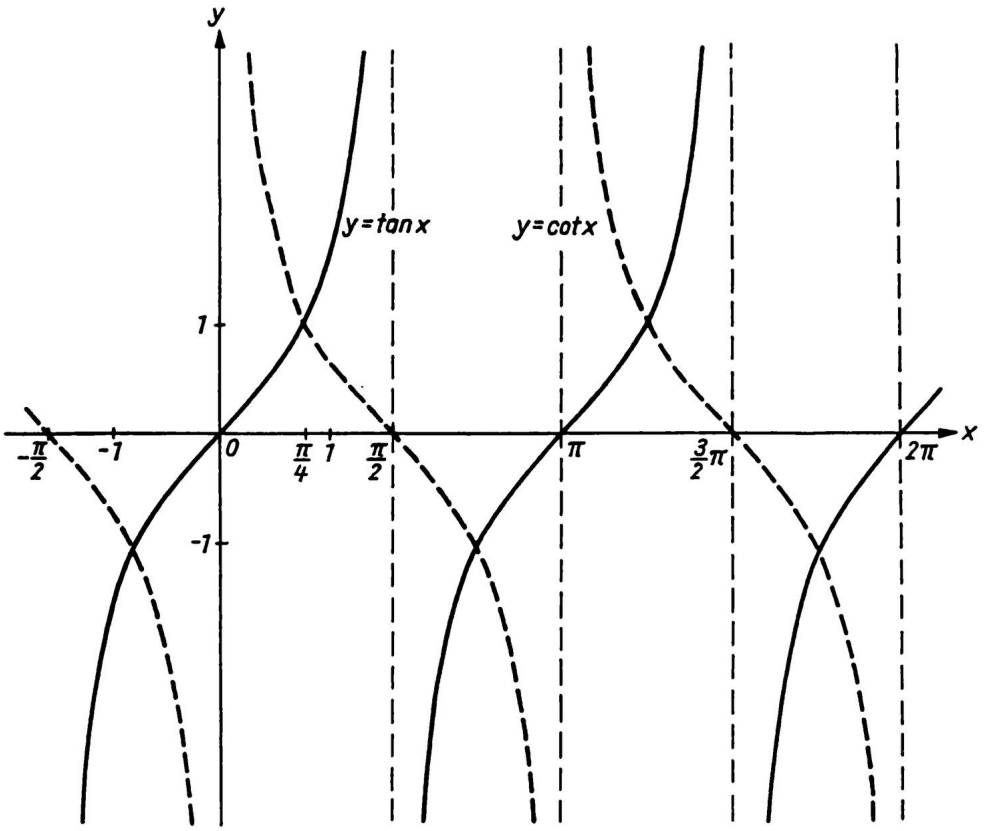


Bild 1.52

Mit dem Taschenrechner erhält man die Funktionswerte mit den Tasten $\boxed{\sin x}$, $\boxed{\cos x}$ und $\boxed{\tan x}$, $\cot x$ durch die Tastenfolge $\boxed{\tan x}$, $\boxed{1/x}$. Wichtig ist, vorher das Winkelmaß für die Einheit einzustellen, in der der Winkel gegeben ist, also Grad, Radiant oder Gon.

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen heißen **zyklometrische Funktionen** oder **Arcusfunktionen**.

Aus $f: y = \sin x$ folgt als Umkehrfunktion (vgl. Abschn. 1.3.2.4):

$f^{-1}: y = \arcsin x$, gesprochen: "Arcus Sinus x".

Die Bezeichnung läßt sich aus dem Satz erklären:

"y ist der Winkel (Bogen, **Arcus**), dessen **Sinus** gleich x ist".

Z.B. läßt sich die Gleichung

$$\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

auch in der Form schreiben

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2}$$

Nach Abschnitt 1.3.2.4 lassen sich Funktionen nur in denjenigen Intervallen eindeutig umkehren, in denen die Funktionen streng monoton sind. Solche Monotonieintervalle wurden für die trigonometrischen Funktionen festgelegt; z.B. für

$f: y = \sin x$ das Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, in dem die Sinusfunktion streng monoton steigend ist und eine Umkehrfunktion existiert.

Die *Definitions-* und *Wertebereiche* der zyklometrischen Funktionen sind:

$$
\begin{aligned}
y &= \arcsin x, & X &= [-1, 1], & Y &= \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\
y &= \arccos x, & X &= [-1, 1], & Y &= [0, \pi] \\
y &= \arctan x, & X &= \mathbb{R}, & Y &= \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\
y &= \operatorname{arccot} x, & X &= \mathbb{R}, & Y &= (0, \pi).
\end{aligned}
$$

Diese eingeschränkten Wertebereiche werden vom Taschenrechner bei Benutzung der Tasten $\boxed{\arcsin x}$, ... berücksichtigt. $y = \operatorname{arccot} x$ erhält man durch die Tastenfolge $\boxed{1/x}$, $\boxed{\arctan x}$.

Die Graphen der zyklometrischen Funktionen ergeben sich durch Spiegelung der ausgewählten Monotoniebogen der trigonometrischen Kurven an der Geraden $y = x$ und sind in den Bildern 1.53 bis 1.56 dargestellt.

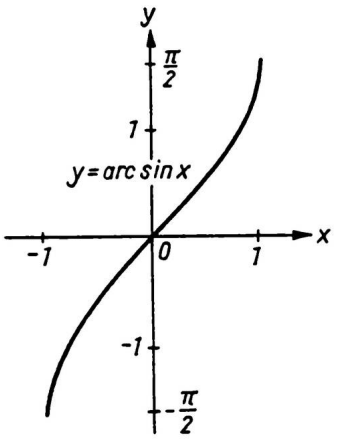


Bild 1.53

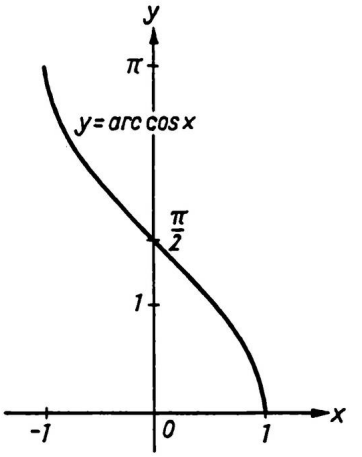


Bild 1.54

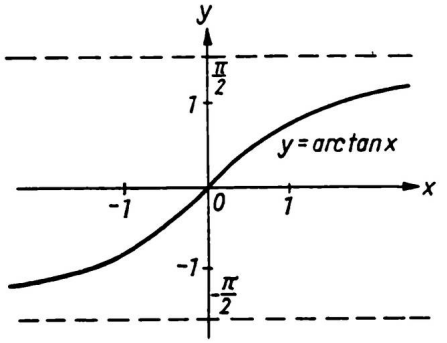


Bild 1.55

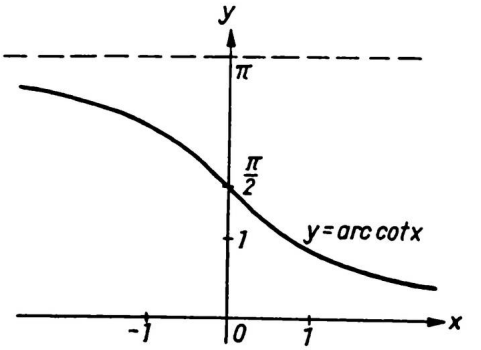


Bild 1.56

1.4.2.2 Quadrantenrelationen

Quadrantenrelationen sind Gleichungen zwischen den Funktionswerten solcher Winkel, die sich entweder um Vielfaches von $\pi/2$ unterscheiden oder zu Vielfachem von $\pi/2$ ergänzen. Zum Beispiel unterscheiden sich die Winkel $x_1 = \pi/6$ und $x_2 = (10/6)\pi$ um $3 \cdot \pi/2$, und die Winkel $x_1 = \pi/4$, $x_2 = (3/4)\pi$ ergänzen sich zu $2 \cdot \pi/2$.

In Bild 1.57 sind z.B. für die Winkel x und $x + \pi/2$ im Einheitskreis die Funktionswerte dargestellt. Unter Beachtung der Kongruenz der im Bild 1.57 enthaltenen Dreiecke lassen sich die folgenden Quadrantenrelationen direkt ablesen.

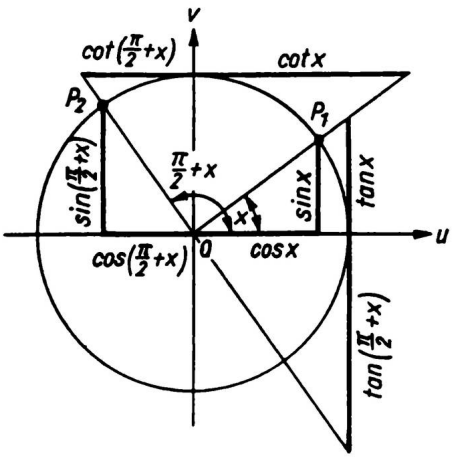


Bild 1.57

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\tan x.$$

Um alle Quadrantenrelationen zusammenzufassen, werde unter $f(x)$ einer der vier trigonometrischen Funktionswerte und unter co–$f(x)$ der Wert der entsprechenden Cofunktion verstanden. Dabei ist in dem Funktionspaar $y = \sin x$, $y = \cos x$ bzw. $y = \tan x$, $y = \cot x$ jeweils eine Funktion die Cofunktion der anderen.

Zusammenfassung der Quadrantenrelationen

$$\boxed{\begin{aligned} &|f(\pi \pm x)| = |f(2\pi \pm x)| = |f(x)| \\ &\left|f\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right)\right| = \left|f\left(\frac{3}{2}\pi \pm x\right)\right| = |\text{co–}f(x)| \end{aligned}} \tag{1.49}$$

In Gl. (1.49) werden nur die Beträge der Funktionswerte bestimmt. Das jeweils gültige Vorzeichen folgt für die gegebene Funktion aus dem Quadranten des Winkels $k \cdot \frac{\pi}{2} \pm x$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, wobei x als spitzer Winkel angenommen wird.

Beispiel 1.68

Nach (1.49) ist $\left|\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)\right| = |\sin x|$ und da mit spitzem Winkel x der Winkel $\frac{3}{2}\pi - x$ im III. Quadrant liegt, ist $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) < 0$, also $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\sin x$.

Beispiel 1.69

Der Term $\dfrac{\sin(\alpha + 450°)}{\sin(\alpha - 450°)}$ ist zu vereinfachen.

Lösung:

Die Gleichungen (1.46) bis (1.49) gelten ebenso wie die folgenden natürlich auch für den in Gradmaß gegebenen Winkel. Mit der Periodizität (1.47) und (1.49) folgt:

$$\frac{\sin(\alpha + 450°)}{\sin(\alpha - 450°)} = \frac{\sin(\alpha + 90° + 360°)}{\sin(\alpha - 450° + 720°)} = \frac{\sin(90° + \alpha)}{\sin(270° + \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\cos\alpha} = -1$$

Der in (1.49) enthaltene Sonderfall: $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{co-}f(x)$ stellt den bekannten Satz dar: Der Funktionswert eines Winkels ist gleich dem Wert der Co–Funktion des Komplementwinkels.
Mit Hilfe der Quadrantenrelationen und der Periodizität lassen sich die Funktionswerte eines beliebigen Winkels auf die Funktionswerte eines spitzen Winkels zurückführen, was bei dem Gebrauch trigonometrischer Tafeln, im internen Programm des Taschenrechners und bei Umformungen trigonometrischer Ausdrücke verwendet wird.

1.4.2.3 Zusammenhang zwischen den Funktionswerten eines Winkels

Jeder Funktionswert eines Winkels kann durch einen der drei anderen Funktionswerte ausgedrückt werden.
Aus der Definitionsgleichung (1.46):

$$\sin x = \frac{v}{r}, \quad \cos x = \frac{u}{r}$$

folgt nach Quadrieren und Addieren:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{v^2}{r^2} + \frac{u^2}{r^2} = \frac{v^2 + u^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1} \tag{1.50}$$

Die Formel wird "trigonometrischer Pythagoras" genannt. Nach $\sin x$ oder $\cos x$ aufgelöst ergibt:

$$\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}, \quad \cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$$

Von den zwei Vorzeichen ist eines auszuwählen entsprechend dem Quadranten von x und der gesuchten Funktion.

Weiter ist

$$\tan x = \frac{v}{u} = \frac{\frac{v}{r}}{\frac{u}{r}} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\boxed{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}} \tag{1.51}$$

Beispiel 1.70

Der Funktionswert $\sin x$ ist durch den Funktionswert $\tan x$ auszudrücken.

Lösung:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

Quadrieren und schrittweises Umstellen nach $\sin x$ ergibt

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$$

$$\tan^2 x\,(1-\sin^2 x) = \sin^2 x$$

$$\sin^2 x\,(1+\tan^2 x) = \tan^2 x$$

$$\sin x = \frac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

In der folgenden Übersicht sind alle Beziehungen zusammengestellt.

	Gegeben:			
Gesucht:	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\sin x =$		$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\dfrac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2 x}}$
$\cos x =$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$		$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\dfrac{\cot x}{\pm\sqrt{1+\cot^2 x}}$
$\tan x =$	$\pm\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$		$\dfrac{1}{\cot x}$
$\cot x =$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\dfrac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\dfrac{1}{\tan x}$	

Es ist ein Vorzeichen auszuwählen entsprechend der oben gemachten Bemerkung.

Beispiel 1.71

Die folgenden Terme sind zu vereinfachen

a) $\tan x\sqrt{1-\sin^2 x}$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ b) $\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}$

Lösung:

a) $\tan x\sqrt{1-\sin^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x = \underline{\underline{\sin x}}$

b) $\frac{\cos^2 x}{1-\sin x} = \frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x} = \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{1-\sin x} = \underline{\underline{1+\sin x}}$

1.4.2.4 Additionstheoreme

Die Umformung und Vereinfachung trigonometrischer Terme verlangt häufig, den Funktionswert der Summe zweier Winkel durch die Funktionswerte der einzelnen Winkel anzugeben, z.B. $\sin(x+y)$ durch $\sin x$ und $\sin y$. Die hierzu benötigten Beziehungen sowie weitere goniometrische Formeln heißen **Additionstheoreme**.

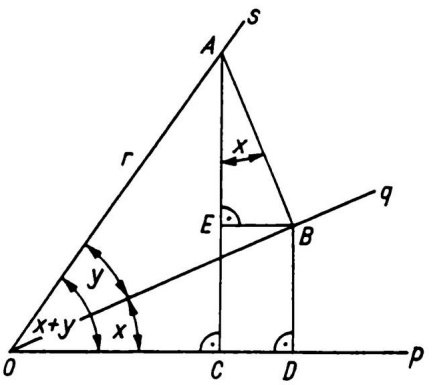


Bild 1.58

In Bild 1.58 sind die Winkel x, y und ihre Summe $x+y$ dargestellt. Auf dem Schenkel s von y sei A beliebig gewählt. Von A werden die Lote auf q bis B und auf p bis C gefällt und von B die Lote auf p bis D und auf AC bis E. Wegen $AC \perp p$ und $AB \perp q$ ist $\measuredangle(EAB) = x$. Es sei $\overline{OA} = r$. Es ist im

$$\triangle OCA: \ \sin(x+y) = \frac{\overline{AC}}{r} = \frac{\overline{AE}+\overline{EC}}{r} = \frac{\overline{AE}+\overline{BD}}{r} \qquad \text{(I)}$$

$$\triangle OBA: \ \overline{AB} = r\sin y$$

$$\triangle AEB: \ \overline{AE} = \overline{AB} \cdot \cos x = r\sin y\cos x \qquad \text{(II)}$$

$$\triangle OBA: \ \overline{OB} = r\cos y$$

$$\triangle ODB: \ \overline{BD} = \overline{OB}\sin x = r\cos y\sin x \qquad \text{(III)}$$

Die Ausdrücke für $\overline{AE}$ aus (II) und für $\overline{BD}$ aus (III) werden in (I) eingesetzt:

$$\sin(x+y) = \frac{r\sin y\cos x + r\cos y\sin x}{r}$$

Nach Kürzen mit r und Änderung der Reihenfolge wird

$$\boxed{\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y} \tag{1.52}$$

Wird in (1.52) y durch $-y$ ersetzt, dann folgt

$$\sin(x-y) = \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y)$$

und wegen (1.48) ergibt sich

$$\boxed{\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y} \tag{1.53}$$

Auf gleichem Weg lassen sich aus Bild 1.58 die Formeln herleiten:

$$\boxed{\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y} \tag{1.54}$$

$$\boxed{\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y} \tag{1.55}$$

Für die Tangensfunktion folgt:

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

und nach Division des Zählers und Nenners durch $\cos x \cos y$ ergibt sich mit (1.51)

$$\boxed{\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}} \tag{1.56}$$

Entsprechend ist

$$\boxed{\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}} \tag{1.57}$$

Diese Additionstheoreme wurden für spitze Winkel x, y und $x+y$ hergeleitet. Man kann zeigen, daß sie auch für beliebige Winkel gelten.

Beispiel 1.72

Der Term $T(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ ist zu vereinfachen.

Lösung:

Mit den Additionstheoremen (1.52) und (1.54) folgt

$$T(x) = \sin\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x$$

und mit $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ergibt sich

$$T(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos x + \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin x + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos x - \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin x$$

$$\underline{\underline{T(x) = \sqrt{2}\cos x}}$$

Setzt man in den Gleichungen (1.52), (1.54) und (1.56) $x = y$, dann erhält man die **Formeln für die Funktionen des doppelten Winkels**

$$\boxed{\sin 2x = 2 \sin x \cos x} \tag{1.58}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 1 - 2\sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \end{aligned}} \tag{1.59}$$

$$\boxed{\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}} \tag{1.60}$$

Die Formeln (1.58) bis (1.60) führen den Funktionswert eines Winkels auf Funktionswerte des halben Winkels zurück. Zum Beispiel folgt aus (1.58), wenn $2x$ durch x ersetzt wird:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \text{ usw.}$$

Beispiel 1.73

Der Term $\dfrac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$ ist zu vereinfachen

Lösung:

Mit (1.58) und (1.59) folgt

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1 - (1 - 2\sin^2 x)}{2 \sin x \cos x} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \underline{\underline{\tan x}}$$

Ohne Beweis wird noch eine Formelgruppe angegeben, die **Summen oder Differenzen gleichartiger Winkelfunktionen** in Produkte verwandelt und z.B. bei der Vereinfachung von Brüchen benutzt werden kann.

$$\boxed{\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}} \tag{1.61}$$

$$\boxed{\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2}} \tag{1.62}$$

$$\boxed{\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}} \tag{1.63}$$

$$\boxed{\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}} \tag{1.64}$$

Beispiel 1.74

Man vereinfache den Term $\dfrac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$

Lösung:

$$\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \frac{2 \sin \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}}{2 \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}} = \underline{\underline{\tan \frac{x+y}{2}}}$$

Weitere goniometrische Formeln findet man in den Formelsammlungen. Es wird noch erwähnt, daß die Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen, die z.B. in den Quadrantenrelationen und Additionstheoremen zum Ausdruck kommen, auch mit Hilfe der zyklometrischen Funktionen beschrieben werden können. Zum Beispiel erhält man aus der Beziehung über Komplementwinkel

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \tag{IV}$$

wenn für beide Funktionen y gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= y \\ \cos x &= y \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} \frac{\pi}{2} - x &= \arcsin y \\ x &= \arccos y \end{aligned}$$

und nach Addition

$$\frac{\pi}{2} = \arcsin y + \arccos y.$$

y wird durch x ersetzt und umgestellt:

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x \tag{V}$$

Die Gleichungen (IV) und (V) drücken den gleichen Sachverhalt aus. Dem Additionstheorem (1.56) der Tangensfunktion entspricht z.B. die Gleichung

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$$

Für weitere Beziehungen sei auf die Formelsammlungen verwiesen.

1.4.2.5 Die allgemeine Sinusfunktion

Die Sinusfunktion ist zur Darstellung von Schwingungsvorgängen, wie sie zum Beispiel in der Elektrotechnik, Mechanik oder Optik auftreten, besonders geeignet. Zur mathematischen Beschreibung solcher Schwingungen reicht aber die Funktion $f: y = \sin x$ nicht aus. Sie wird erweitert zur **allgemeinen Sinusfunktion**

$$f: y = A \sin(\omega t + \varphi) \tag{I}$$

Die unabhängige Variable stellt bei physikalischen Anwendungen im allgemeinen die Zeit dar und wird deshalb mit t bezeichnet. Jede durch (I) beschriebene Schwingung heißt *harmonische Schwingung.*

Ausgehend vom Graphen der Funktion $f: y = \sin x$ läßt sich nach Abschnitt 1.3.2.5 aussagen, welche Änderungen die Konstanten A, ω, φ bewirken:

A für $|A| > 1$ eine Dehnung, für $|A| < 1$ eine Stauchung der Ordinaten y, für $A < 0$ eine Spiegelung an der t-Achse.

ω für $|\omega| > 1$ eine Stauchung, für $|\omega| < 1$ eine Dehnung um das $\frac{1}{|\omega|}$-fache in Richtung der t-Achse, für $\omega < 0$ eine Spiegelung an der y-Achse.

Die ursprüngliche Periode $p = 2\pi$ verändert sich zu $p = T = \frac{2\pi}{|\omega|}$.

φ eine Verschiebung in Richtung der t-Achse um den Wert $-\frac{\varphi}{\omega}$.

Bild 1.59 zeigt den Graphen der allgemeinen Sinusfunktion $f: y = \frac{7}{3}\sin\left(\frac{2}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$.

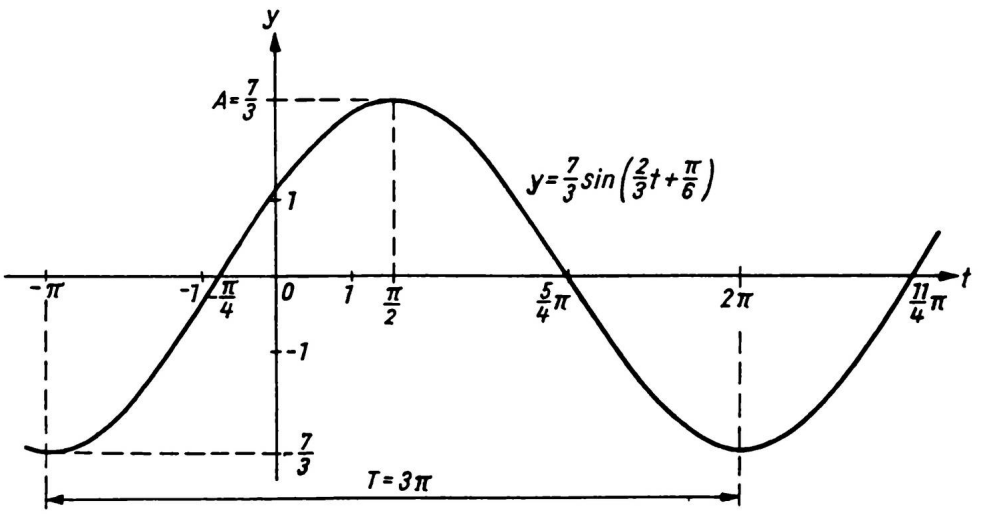


Bild 1.59

Es ist $A = \frac{7}{3}$, $\omega = \frac{2}{3}$ und $\varphi = \frac{\pi}{6}$, d.h., gegenüber der normalen Sinuskurve sind die Ordinaten auf das 7/3-fache gedehnt, die Kurve ist auf das 3/2-fache in t-Richtung gedehnt und um $-\frac{\pi}{4}$ nach links verschoben. Die Periode ist $T = 3\pi$.

Die Nullstellen ergeben sich bei $\frac{2}{3}t + \frac{\pi}{6} = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, d.h. für $t = \frac{\pi}{4}(6k - 1)$.

Die Scheitelpunkte (Maxima, Minima) folgen aus $\frac{2}{3}t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, also für $t = \frac{\pi}{2}(1 + 3k)$.

Trägt man auf der Abszissenachse nicht die Werte t, sondern ωt ab, dann bleibt die Periode $p = T = 2\pi$, d.h. die Dehnung oder Stauchung in Richtung der t-Achse

entfällt. Die Verschiebung ist $-\varphi$, also aus (I) direkt ablesbar (Bild 1.60).

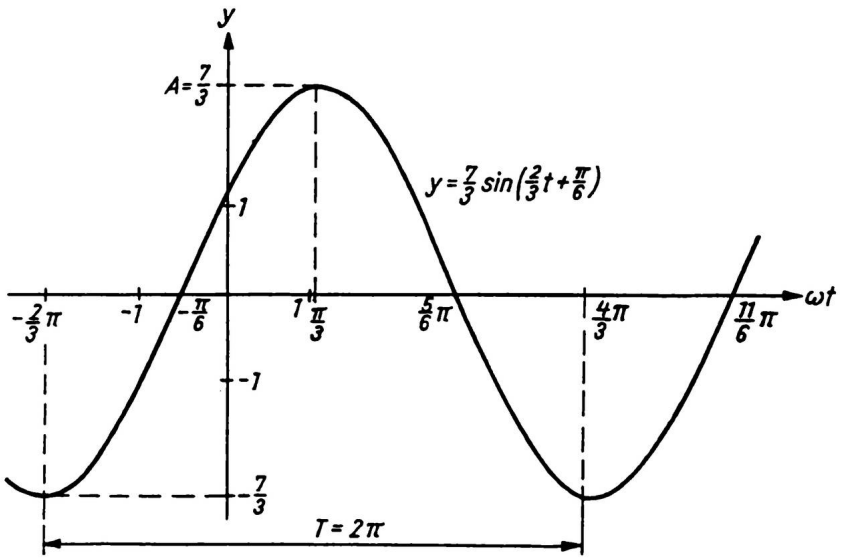


Bild 1.60

Dient die allgemeine Sinusfunktion (I) zur Beschreibung von harmonischen Schwingungen in der Physik, dann erhalten die Konstanten A, ω, φ die folgende Bedeutung:

y	Auslenkung, Elongation	$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$	Kreisfrequenz
t	Zeit	T	Periodendauer
A	maximale Auslenkung	φ	Nullphasenwinkel
	Amplitude	$\omega t + \varphi$	Phasenwinkel

1.4.3 Dreiecksberechnung

1.4.3.1 Rechtwinklige Dreiecke

Die Definition der trigonometrischen Funktionen im rechtwinkligen Dreieck nach Abschnitt 1.4.2.1 gibt in Verbindung mit den Sätzen von Pythagoras und Euklid die Möglichkeit, Aufgaben im rechtwinkligen Dreieck zu lösen. Für das rechtwinklige Dreieck im Bild 1.61 mit den Katheten a, b, der Hypotenuse c, den Kathetenwinkeln α, β, der Höhe h und den Höhenabschnitten p, q gelten die Sätze

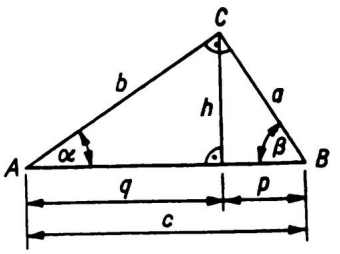


Bild 1.61

von Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

von Euklid: $h^2 = p \cdot q$ (Höhensatz)

$a^2 = c \cdot p\,, \quad b^2 = c \cdot q$ (Kathetensätze)

und die Streckenverhältnisse

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta\,, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \cot\beta\,, \quad \cot\alpha = \frac{b}{a} = \tan\beta$$

Zur Wiederholung dienen die folgenden Beispiele und die Aufgaben in Abschn. 1.5.

Beispiel 1.75

Ein Graben hat den in Bild 1.62 gezeigten Querschnitt. Welche Wassermenge fließt pro Sekunde durch den Graben, wenn die Sohlenbreite $a = 2,40\,\mathrm{m}$, der Böschungswinkel $\alpha = 34°$, die Wasserhöhe $h = 1,60\,\mathrm{m}$ und die Fließgeschwindigkeit $v = 4,8\,\mathrm{km/h}$ betragen?

Lösung:

Der Grabenquerschnitt ist ein Trapez mit den parallelen Seiten

a und $b = a + 2h\cot\alpha$

Die Querschnittsfläche ist

$$A = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{a + a + 2h\cot\alpha}{2} \cdot h = (a + h\cot\alpha)h$$

und das gesuchte Volumen pro Sekunde

$$V/t = Av = (a + h\cot\alpha)h \cdot v$$

$$= (2,40\,\mathrm{m} + 1,60\,\mathrm{m} \cdot \cot 34°) \cdot 1,60\,\mathrm{m} \cdot \frac{4800\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}}$$

$$\underline{\underline{V/t = 10,18\,\mathrm{m^3 s^{-1}}}}$$

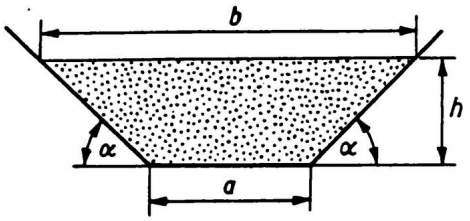


Bild 1.62

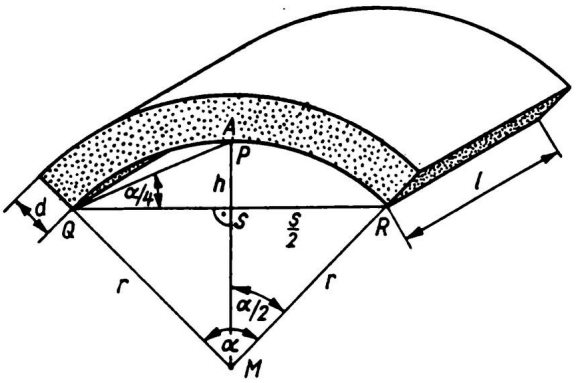


Bild 1.63

Beispiel 1.76

Wie groß ist die Masse eines Gewölbes mit der Lichtweite $\overline{AB} = s = 3,60\,\text{m}$, dem Stichmaß (Pfeilhöhe) $h = 0,75\,\text{m}$, der Stärke $d = 0,50\,\text{m}$ und der Länge $l = 4,20\,\text{m}$ (Bild 1.63)? Die Dichte des Mauerwerks ist $\rho = 2,2 \cdot 10^3 \text{kgm}^{-3}$.

Lösung:

α ist der zum Bogen QR gehörige Zentriwinkel. Dann ist $\measuredangle PQR = \frac{\alpha}{4}$, da er als Peripheriewinkel über dem Bogen PR halb so groß ist wie der Zentriwinkel $\measuredangle PMR = \frac{\alpha}{2}$. Im Dreieck PQS ist

$$\tan\frac{\alpha}{4} = \frac{h}{\frac{s}{2}} \quad \text{oder} \quad \alpha = 4\arctan\frac{2h}{s} = 90,479°$$

Der Radius r ergibt sich im Dreieck MRS aus

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{s}{2}}{r} \quad \text{oder} \quad r = \frac{s}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = 2,535\,\text{m}$$

Der Flächeninhalt A des Kreisringstücks ist die Differenz der Flächeninhalte von zwei Kreissektoren:

$$A = \frac{\pi(r+d)^2 \cdot \alpha}{360°} - \frac{\pi r^2 \alpha}{360°} = \frac{\pi\alpha}{360°}\left(r^2 + 2rd + d^2 - r^2\right)$$

$$A = \frac{\pi d}{360°} d\,(2r + d) = 2,1990\,\text{m}^2$$

Für die Masse des Gewölbes folgt

$$m = A \cdot l \cdot \rho = 2,1990\,\text{m}^2 \cdot 4,20\,\text{m} \cdot 2,2 \cdot 10^3\,\text{kgm}^{-3}$$

$$\underline{\underline{m = 20,32\,\text{t}}}$$

Eine Grundaufgabe ist die Umrechnung von rechtwinkligen Koordinaten in Polarkoordinaten und umgekehrt. Nach Bild 1.64 sind x, y mit $x, y \in \mathbb{R}$ die rechtwinkligen Koordinaten von P und r, α mit $r \in (0;\infty)$, $\alpha \in [0°;360°)$ seine Polarkoor-

dinaten. Bei gegebenen r, α erhält man x, y aus

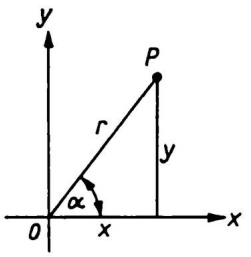


Bild 1.64

$$x = r\cos\alpha\,, \qquad y = r\sin\alpha\,.$$

Umgekehrt folgt bei gegebenen x, y

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad \tan\alpha = \frac{y}{x} \qquad \text{(vgl. Def. (1.46))}$$

Mit der Taste $\boxed{\arctan}$ erhält man einen Winkel $\overline{\alpha} \in (-90°, 90°)$ wegen des in Abschn. 1.4.2.1 festgelegten Wertebereichs der Arcustangensfunktion. Die Vorzeichen von x und y bestimmen den Quadranten von α eindeutig. Um aus $\overline{\alpha}$ den Winkel α zu bestimmen, gilt:

$x > 0\,,\ y > 0 \quad \Longrightarrow \alpha$ im I. Quadranten: $\alpha = \overline{\alpha}$ $\qquad (\overline{\alpha} > 0)$

$x < 0\,,\ y > 0 \quad \Longrightarrow \alpha$ im II. Quadranten: $\alpha = \overline{\alpha} + 180°$ $\qquad (\overline{\alpha} < 0)$

$x < 0\,,\ y < 0 \quad \Longrightarrow \alpha$ im III. Quadranten: $\alpha = \overline{\alpha} + 180°$ $\qquad (\overline{\alpha} > 0)$

$x > 0\,,\ y < 0 \quad \Longrightarrow \alpha$ im IV. Quadranten: $\alpha = \overline{\alpha} + 360°$ $\qquad (\overline{\alpha} < 0)$

Die meisten Taschenrechner enthalten ein Programm für die Umrechnung aus einem Koordinatensystem in das andere.

Beispiel 1.77

Gegeben sind die rechtwinkligen Koordinaten zweier Punkte:
$P(x = -75,18\,;\ y = 30,69)\,,\ Q(x = -101,47\,;\ y = -21,08)$.
Gesucht werden die Polarkoordinaten.

Lösung:

P : $r = 81,20\,,\ \alpha$ liegt wegen $x < 0\,,\ y > 0$ im II. Quadranten.

$$\arctan\frac{y}{x} = \overline{\alpha} = -22,206°\,,\ \alpha = \overline{\alpha} + 180° = 157,794°$$

Q : $r = 103,64\,,\ \alpha$ liegt wegen $x < 0\,,\ y < 0$ im III. Quadranten

$$\arctan\frac{y}{x} = \overline{\alpha} = 11,736°\,,\ \alpha = \overline{\alpha} + 180° = 191,736°$$

Beispiel 1.78

Im Punkt P greifen vier Kräfte an: $F_1 = 51\,\mathrm{N}$, $F_2 = 40\,\mathrm{N}$, $F_3 = 80\,\mathrm{N}$, $F_4 = 45\,\mathrm{N}$. Ihre Wirkungslinien schließen nach Bild 1.65 die Winkel $\alpha_2 = 113,8°$, $\alpha_3 = 191,0°$, $\alpha_4 = 286,9°$ ein.
Gesucht werden die Resultierende F_R und der Winkel α_R zwischen den Wirkungslinien von F_1 und F_R.

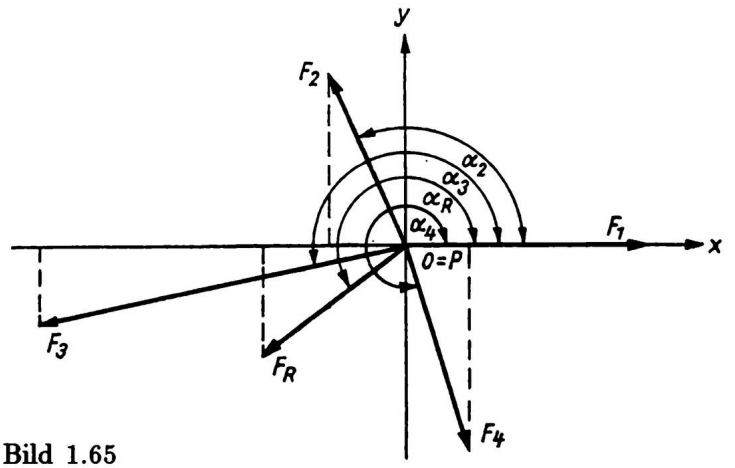


Bild 1.65

Lösung:

Man wählt ein cartesisches Koordinatensystem mit dem Ursprung $O = P$ und der x-Achse in Richtung von F_1. Jede Kraft wird in zwei Komponenten in x- und y-Richtung zerlegt:

$F_{ix} = F_i \cos\alpha_i$, $F_{iy} = F_i \sin\alpha_i$, $i = 1,2,3,4$, $\alpha_1 = 0°$.

Die Komponenten der Resultierenden F_R sind:

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^{4} F_{ix} = F_1\cos\alpha_1 + F_2\cos\alpha_2 + F_3\cos\alpha_3 + F_4\cos\alpha_4$$

$$F_{Rx} = -30,6\,\mathrm{N}$$

$$F_{Ry} = \sum_{i=1}^{4} F_{iy} = F_1\sin\alpha_1 + F_2\sin\alpha_2 + F_3\sin\alpha_3 + F_4\sin\alpha_4$$

$$F_{Ry} = -21,7\,\mathrm{N}$$

Für die Resultierende folgt:

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \underline{\underline{21,5\,\mathrm{N}}}$$

Wegen $F_{Rx} < 0$, $F_{Ry} < 0$ liegt α_R im III. Quadranten:

$$\arctan\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \overline{\alpha}_R = 35,4°,\quad \alpha_R = \overline{\alpha}_R + 180° = \underline{\underline{215,4°}}$$

1.4.3.2 Berechnung schiefwinkliger Dreiecke

Alle Aufgaben der Berechnung schiefwinkliger, also spitz- oder stumpfwinkliger Dreiecke (Bild 1.66) können mit dem Sinussatz, dem Cosinussatz oder unter Verwendung rechtwinkliger Hilfsdreiecke gelöst werden.

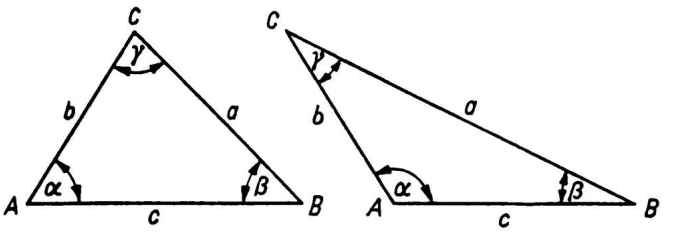


Bild 1.66

Im folgenden werden die Grundaufgaben der Dreiecksberechnung und ihre Lösungen mit Hilfe dieser Sätze zusammengestellt. Bekanntlich gilt der

Sinussatz

Im Dreieck verhalten sich die Seiten zueinander wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \tag{1.65}$$

Die Formeln (1.65) lassen sich als fortlaufende Proportion schreiben

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

oder wie folgt zusammenfassen und ergänzen (mit r_u als Radius des Umkreises)

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r_u$$

d.h., in einem Dreieck ist das Verhältnis jeder Seite zum Sinus des gegenüberliegenden Winkels konstant.

Cosinussatz

Im Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Produkt aus diesen beiden Seiten und dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels.

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned} \tag{1.66}$$

Im rechtwinkligen Dreieck folgt mit $\gamma = 90°$, $\cos\gamma = 0$ aus der letzten Gleichung von (1.66) als Sonderfall des Cosinussatzes der Satz von PYTHAGORAS. Weitere Sätze wie die Halbwinkelsätze und die Neperschen Gleichungen enthalten die Formelsammlungen. Diese Sätze spielten früher eine größere Rolle, da sie

bei verschiedenen Dreiecksaufgaben für logarithmische Berechnungen gut geeignet sind.

Die Dreieckswinkel α, β, γ können im I. oder II. Quadranten liegen:

$$0° < \alpha < 180°\,,\quad 0° < \beta < 180°\,,\quad 0° < \gamma < 180°.$$

Der Sinus eines Dreieckswinkels ist im I. und II. Quadranten positiv, während die Cosinus- und Tangenswerte im I. Quadranten positiv, im II. Quadranten negativ sind. Daraus ergeben sich Folgerungen für die Eindeutigkeit von Lösungen. Wird z.B. α nach dem Sinussatz berechnet und ist $\sin\alpha = 0,8412$, dann folgt zunächst

$$\arcsin 0,8412 = 57,267° = \overline{\alpha}.$$

Da α im I. oder II. Quadranten liegen kann, sind zwei Winkel möglich:

$$\alpha_1 = \overline{\alpha} = 57,267°\,,\quad \alpha_2 = 180° - \overline{\alpha} = 122,733°.$$

Es muß dann, z.B. mit Hilfe von Sätzen über das Dreieck, entschieden werden, ob beide Lösungen möglich sind, bzw. bei einer eindeutigen Lösung muß diese ausgewählt werden. Wichtige, dabei verwendete Dreieckssätze sind:

Im Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.

Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180°.

Bei der Berechnung des Winkels aus der Cosinus- oder Tangensfunktion bestimmt das Vorzeichen des Funktionswertes eindeutig den Quadranten des Dreieckswinkels. Nach den gegebenen Größen lassen sich bei der trigonometrischen Berechnung des Dreiecks vier **Grundaufgaben unterscheiden.**

1. Grundaufgabe

Gegeben sind **eine Seite und zwei Winkel** und zwar

a) eine Seite und zwei anliegende Winkel | wsw |

b) eine Seite, ein anliegender und ein gegenüberliegender Winkel | sww |

Die Summe der gegebenen Winkel muß kleiner als 180° sein. Die Winkelsumme im Dreieck wird zur Berechnung des dritten Winkels, der Sinussatz wird zur Berechnung der fehlenden Seiten verwendet.

Beispiel 1.79

Von einem Dreieck sind $a = 31,14$ m , $\beta = 65°18'$, $\gamma = 76°45'$ gegeben. Gesucht werden die fehlenden Seiten und Winkel.

Lösung:

$$\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = \underline{\underline{37°57'}}$$

$$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha} = \underline{\underline{46,00\text{ m}}}\,,\quad c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha} = \underline{\underline{49,29\text{ m}}}.$$

2. Grundaufgabe

Gegeben sind **zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel.** | sws |

Die fehlende Seite wird nach dem Cosinussatz berechnet, und dann ergeben sich die fehlenden Winkel nach dem Sinussatz.

Beispiel 1.80

Gegeben sind $a = 23,79\,\text{m}$, $b = 44,18\,\text{m}$, $\gamma = 40°12'$. Gesucht werden c, α, β.

Lösung:

$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = \underline{\underline{30,20\,\text{m}}}$

$\overline{\alpha} = \arcsin\dfrac{a\sin\gamma}{c} = 30°33'$ $\quad \overline{\beta} = \arcsin\dfrac{b\sin\gamma}{c} = 70°45'$

$\overline{\alpha}$ und $\overline{\beta}$ ergeben sich als spitze Winkel mit der Taste $\boxed{\text{arcsin}}$ des Taschenrechners. Da α und β mit der Sinusfunktion berechnet werden, ist zu entscheiden, ob sie im I. oder II. Quadranten liegen, denn diese Dreiecksauflösung ist eindeutig. Wegen $a < c$ muß $\alpha < \gamma$ sein, d.h. α ist ein spitzer Winkel:

$\alpha = \overline{\alpha} = \underline{\underline{30°33}}$.

Wegen der Winkelsumme im Dreieck muß β ein stumpfer Winkel sein:

$\beta = 180° - \overline{\beta} = \underline{\underline{109°15'}}$. Probe: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben und wird nur ein Winkel gesucht, dann ist die Berechnung mit dem Sinus- und Cosinussatz umständlich. Man erhält den Winkel einfacher aus einem rechtwinkligen Hilfsdreieck.

Beispiel 1.81

Gegeben sind $a = 116,15\,\text{m}$, $b = 84,03\,\text{m}$, $\gamma = 67,314°$. Gesucht wird α.

Lösung:

Man zeichnet im Dreieck die Höhe $h_0 = \overline{BD}$ (Bild 1.67). Dann ist

$\overline{BD} = a\sin\gamma$, $\overline{CD} = a\cos\gamma$

$\tan\alpha = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{AC} - \overline{CD}}$

$\tan\alpha = \dfrac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma} = 2,7315$ (I)

$\underline{\underline{\alpha = 69,892°}}$

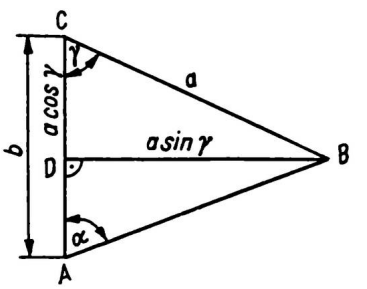


Bild 1.67

Aus der Tangensfunktion folgt α eindeutig. Die Formel (I) heißt *Tangentenformel.* Sie gilt auch für stumpfwinklige Dreiecke.

3. Grundaufgabe

Gegeben sind

zwei Seiten und einer der gegenüberliegenden Winkel $\boxed{\text{ssw}}$

z.B. a, b, α.

Zunächst wird nach dem Sinussatz β berechnet:

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$$

Je nach den gegebenen Größen erhält man keine Lösung, eine Lösung oder zwei Lösungen für β.

Fallunterscheidung

1.	$\frac{b \sin\alpha}{a} > 1$	Da stets $\sin\beta < 1$ sein muß, kann kein Winkel β existieren: **0 Lösungen**
2.	$\frac{b \sin\alpha}{a} = 1$	Wegen $\sin\beta = 1$, d.h. $\beta = 90°$ ist das Dreieck rechtwinklig: **1 Lösung:** $\beta = 90°$
3.	$\frac{b \sin\alpha}{a} < 1$	Es sei $\overline{\beta}$ der sich mit der Taste $\boxed{\text{arcsin}}$ ergebende spitze Winkel.
3.1	$b > a$	Dann ist $\beta > \alpha$
3.1.1	$\alpha < 90°$	Es ist $\beta < 90°$ und $\beta > 90°$ möglich: **2 Lösungen:** $\beta_1 = \overline{\beta}$, $\beta_2 = 180° - \beta$
3.1.2	$\alpha > 90°$	Wegen $\beta > \alpha$ muß auch β stumpf sein; das ist ein Widerspruch zur Winkelsumme im Dreieck: **0 Lösungen**
3.2	$b < a$	Dann ist $\beta < \alpha$
3.2.1	$\alpha < 90°$	β ist durch $\beta < \alpha < 90°$ eindeutig als spitzer Winkel bestimmt: **1 Lösung**: $\beta = \overline{\beta}$
3.2.2	$\alpha > 90°$	Wegen der Winkelsumme im Dreieck muß $\beta < 90°$ sein. **1 Lösung**: $\beta = \overline{\beta}$

Eine eindeutige Lösung ergibt sich also nur, wenn der der größeren gegebenen Seite gegenüberliegende Winkel gegeben ist (vgl.den entsprechenden Kongruenzsatz). Für die weitere Lösung der 3.Grundaufgabe werden zwei mögliche Winkel β_1 , β_2 angenommen. Damit lassen sich zwei Dreiecke berechnen:

$$\gamma_1 = 180° - (\alpha + \beta_1) \qquad \gamma_2 = 180° - (\alpha + \beta_2)$$

$$c_1 = \frac{a \sin\gamma_1}{\sin\alpha} \qquad c_2 = \frac{a \sin\gamma_2}{\sin\alpha}$$

Beispiel 1.82

Gegeben $a = 45,61\,\text{m}$, $b = 62,04\,\text{m}$, $\alpha = 44°54'$. Gesucht c, β, γ.

Lösung:

$$\overline{\beta} = \arcsin\frac{b \sin\alpha}{a} = \arcsin 0,96015 = 73°46'$$

Wegen $b > a$, $\alpha < 90°$ liegt Fall 3.1.1 vor, d.h. es gibt 2 Lösungen

$$\overline{\beta} = \underline{\underline{\beta_1 = 73°46'}} \qquad 180° - \overline{\beta} = \underline{\underline{\beta_2 = 106°14'}}$$

$$\underline{\underline{\gamma_1 = 61°20'}} \qquad \underline{\underline{\gamma_2 = 28°52'}}$$

$$\underline{\underline{c_1 = 56,69\,\text{m}}} \qquad \underline{\underline{c_2 = 31,20\,\text{m}}}$$

Beispiel 1.83

Gegeben $a = 26,2$ cm, $b = 38,5$ cm, $\alpha = 46,8°$. Gesucht c, β, γ.

Lösung:

Wegen

$$\overline{\beta} = \arcsin \frac{b \sin \alpha}{a} = \arcsin 1,0712$$

können die gegebenen Größen kein Dreieck bilden.

Anschaulich erkennt man die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten bei der Konstruktion des Dreiecks. Der Winkel α wird gezeichnet und von A aus auf dem einen Schenkel b abgetragen bis C. Der Kreisbogen um C mit a schneidet den freien Schenkel von α in B. Bild 1.68 zeigt die Konstruktionen für die betrachteten Fälle.

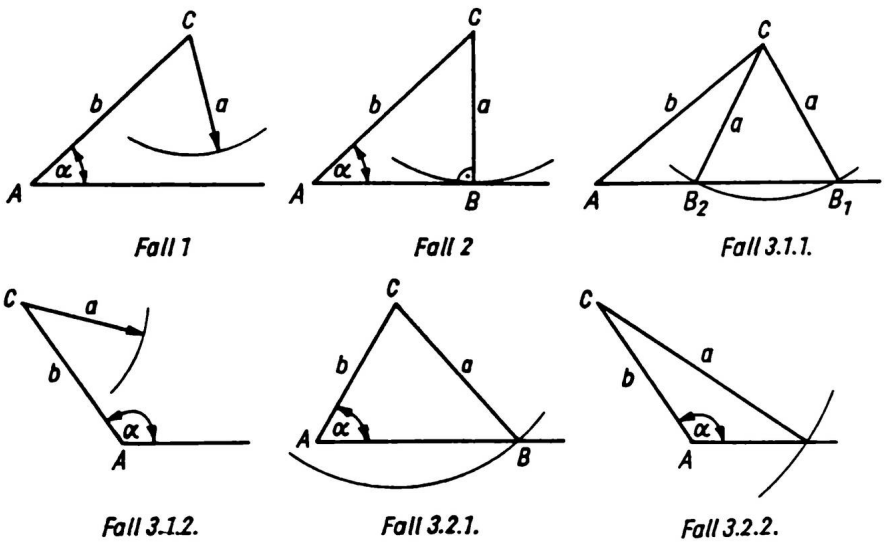


Bild 1.68

4. Grundaufgabe

Gegeben sind die **drei Seiten**. sss

Für die Seiten gelten die Bedingungen

$$a + b > c, \; b + c > a, \; c + a > b.$$

Man berechnet mit dem Cosinussatz zunächst den Winkel, der der größeren Seite gegenüberliegt: Dieser Winkel ergibt sich aus der Cosinusfunktion eindeutig als spitzer oder stumpfer Winkel. Die beiden anderen Winkel werden nach dem Sinussatz berechnet und ergeben sich ebenfalls eindeutig und zwar als spitze Winkel, da sie den kleineren Seiten gegenüberliegen. Als Probe dient die Winkelsumme im Dreieck.

Beispiel 1.84

Gegeben $a = 123,65$ m, $b = 138,05$ m, $c = 87,16$ m. Gesucht α, β, γ.

Lösung:

Für b als größte Seite wird der Cosinussatz aufgestellt.

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

und nach $\cos\beta$ umgeformt

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 0,17761\,, \quad \underline{\underline{\beta = 79,7693^\circ}}$$

Die beiden anderen Winkel folgen aus

$$\sin\alpha = \frac{a\sin\beta}{b} = 0,88145\,, \quad \underline{\underline{\alpha = 61,8176^\circ}}$$

$$\sin\gamma = \frac{c\sin\beta}{b} = 0,62133\,, \quad \underline{\underline{\gamma = 38,4131^\circ}}$$

Wegen $b > a$, $b > c \Longrightarrow \beta > \alpha$, $\beta > \gamma$ können α und γ nur spitz sein.
Probe: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Bei dem folgenden Beispiel kann die Lösung schrittweise aus den Grundaufgaben zusammengesetzt werden.

Beispiel 1.85

Die Entfernung e der Punkte P_1 und P_2 ist zu bestimmen (Bild 1.69). Zwischen beiden Punkten liegt ein Sichthindernis und P_2 ist nicht zugänglich. Es wurden deshalb zwei Hilfspunkte M, N gewählt und die Strecken $m = 50,61\,\text{m}$, $n = 56,47\,\text{m}$ sowie die Winkel $\delta = 96^\circ 32' 30''$, $\lambda = 108^\circ 21' 00''$, $\varepsilon = 115^\circ 03' 10''$ gemessen. Man berechne e.

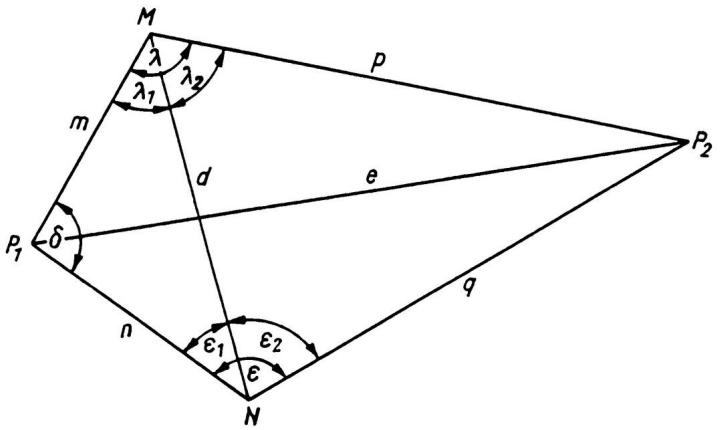


Bild 1.69

Lösung:

Durch die Diagonale $\overline{MN}$ wird das Viereck P_1NP_2M in zwei Dreiecke zerlegt.
Berechnung im Dreieck P_1MN, 2. Grundaufgabe:

$d = \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn\cos\delta} = 80,009\,\text{m}$

$$\sin\lambda_1 = \frac{n\sin\delta}{d}\,, \quad \lambda_1 = 44,5235^\circ$$

$$\sin\varepsilon_1 = \frac{m\sin\delta}{d}\,, \quad \varepsilon_1 = 38,9349^\circ \quad \text{Probe: } \delta + \lambda_1 + \varepsilon_1 = 180^\circ$$

Für die Winkel λ_2, ε_2 folgt

$\lambda_2 = \lambda - \lambda_1 = 63,8265^\circ \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1 = 76,1179^\circ$

Berechnung im Dreieck MNP_2, 1.Grundaufgabe:

$$p = \frac{d \sin \varepsilon_2}{\sin(\lambda_2 + \varepsilon_2)} = 120,697\,\text{m} \qquad q = \frac{d \sin \lambda_2}{\sin(\lambda_2 + \varepsilon_2)} = 111,580\,\text{m}$$

(wegen $\sin \measuredangle MP_2N = \sin(180° - (\lambda_2 + \varepsilon_2)) = \sin(\lambda_2 + \varepsilon_2)$)

Berechnung im Dreieck P_1P_2M, 2. Grundaufgabe:

$e = \sqrt{m^2 + p^2 - 2mp\cos\lambda} = \underline{\underline{144,83\,\text{m}}}$

Probe: Berechnung im Dreieck P_1NP_2, 2. Grundaufgabe:

$e = \sqrt{n^2 + q^2 - 2nq\cos\varepsilon} = 144,83\,\text{m}$

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist bekanntlich gleich dem halben Produkt aus einer Seite und der zugehörigen Höhe:

$$\boxed{A = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c} \tag{1.67}$$

Sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, z.B. a, b, γ, dann folgt aus $A = \frac{1}{2}ah_a$ mit $h_a = b\sin\gamma$ (Bild 1.70) die Gleichung $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

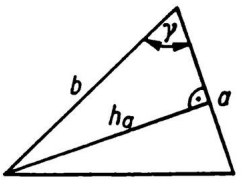


Bild 1.70

Der Flächeninhalt des Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus zwei Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels:

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta \tag{1.68}$$

Sind die drei Seiten des Dreiecks gegeben, dann berechnet man A nach der **Heron'schen Formel**[1]

$$\boxed{A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2}} \tag{1.69}$$

Die Summe $2s = a + b + c$ der Dreiecksseiten ist der *Dreiecksumfang.*

Beispiel 1.86

Die Eckpunkte A, B, C eines Dreiecks sind durch Polarkoordinaten gegeben (Bild 1.71):
$A(r_A = 62,0;\ \alpha_A = 14,68°)$, $B(r_B = 76,2;\ \alpha_B = 40,72°)$, $C(r_C = 44,1;\ \alpha_C = 77,15°)$. Man berechne den Flächeninhalt A des Dreiecks.

[1] HERON VON ALEXANDRIA, um 60 n. Chr.

Lösung:

A ist die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke OAB und OBC, vermindert um den Flächeninhalt des Dreiecks OAC:

$A = A_{OAB} + A_{OBC} - A_{OAC}$.

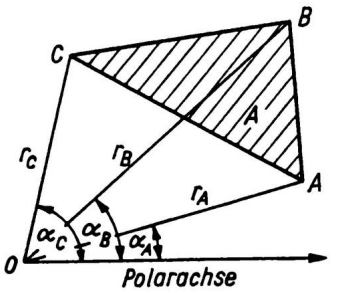


Bild 1.71

Mit der Flächenformel (1.68) folgt

$$A = \frac{1}{2} r_A r_B \sin(\alpha_B - \alpha_A) + \frac{1}{2} r_B r_C \sin(\alpha_C - \alpha_B) - \frac{1}{2} r_A r_C \sin(\alpha_C - \alpha_A)$$

$$A = 1037,00 + 997,78 - 1212,30$$

$$\underline{\underline{A = 822,48}}$$

Aufgaben 1.47 bis 1.64

1.5 Aufgaben

1.1 Welche der folgenden Zeichenreihen sind Aussagen oder Aussagenformen und welchen Wahrheitswert hat die Aussage?

a) $4 - 8 < 1$

b) $6x + 1 = 0$

c) $\sqrt{5}$ ist ein unechter Bruch

d) $\sqrt{36 - x^2} < 4$

e) y ist eine rationale Zahl

f) $(2a + 3b) \cdot c$

g) 537 ist keine Primzahl

h) Zwei Ebenen schneiden sich

1.2 Gegeben sind die Aussagen

p: Im rechtwinkligen Dreieck gilt der Satz von Pythagoras.

q: Im gleichschenkligen Dreieck gilt der Höhensatz von Euklid.

r: Das gleichschenklige Dreieck hat eine Symmetrieachse.

s: Das rechtwinklige Dreieck hat eine Symmetrieachse.

Welche Wahrheitswerte haben die Aussagenfunktionen
a) $\overline{p}$, b) $\overline{s}$, c) $p \wedge q$, d) $p \wedge r$, e) $p \vee q$, f) $q \vee s$, g) $p \Rightarrow q$,
h) $q \Rightarrow s$, i) $r \Leftrightarrow q$, k) $p \Leftrightarrow r$?

1.3 Ist die Aussagenform $p(x)$ hinreichend, notwendig oder notwendig und hinreichend für $q(x)$?

a) $p(x)$: x ist ein unendlicher nicht-periodischer Dezimalbruch.

$q(x)$: x ist keine rationale Zahl.

b $p(x)$: x ist eine durch 12 teilbare Zahl.

$q(x)$: x ist eine durch 4 teilbare Zahl.

c) $p(x)$: x ist ein Rhombus.

$q(x)$: x ist ein Quadrat.

1.4 Für welche Wahrheitswerte von p und q sind die folgenden Aussagenfunktionen wahr?

a) $(p \wedge q) \vee \overline{q}$ b) $(\overline{p} \vee \overline{q}) \wedge p$

1.5 Welche Wahrheitswerte haben die Verknüpfungen

a) $p \wedge \overline{p}$ b) $p \vee \overline{p}$?

1.6 Für die folgenden Aussagenfunktionen stelle man die Wahrheitswerttabelle auf. Welche Aussagenfunktionen sind äquivalent zueinander?

a) $\overline{p \Leftrightarrow q}$ b) $\overline{p} \wedge \overline{q}$ c) $(p \wedge q) \vee (p \vee q)$

d) $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$ e) $\overline{\overline{p} \Leftrightarrow \overline{q}}$ f) $\overline{p \vee q}$

g) $\overline{p \Rightarrow \overline{q}}$ h) $((p \Leftrightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ i) $((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow p$

k) $\overline{\overline{p} \vee \overline{q}}$ l) $((p \Rightarrow q) \wedge \overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ m) $((p \Leftrightarrow q) \wedge \overline{p}) \Rightarrow \overline{q}$

1.7 Die folgenden Formeln sind durch vollständige Induktion zu beweisen

a) $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

1.8 Die folgenden Mengen sind elementweise anzugeben

$A = \{x \mid x \text{ ist eine durch 17 teilbare zweistellige Zahl}\}$

$B = \{x \mid -2 < x < 3 \wedge x \in \mathbb{Z}\}$

$C = \{x \mid 2x^2 - 18 = 0\}$

$D = \{x \mid x^2 - 4x + 6 = 0 \wedge x \in \mathbb{R}\}$

$E = \{x \mid 2x + 8 = 0\}$

1.9 Man bilde alle echten Teilmengen der Menge $A = \{a, b, c\}$

1.10 Welche Relationen bestehen zwischen den folgenden Mengen:
V: Menge der Vierecke, T: Menge der Trapeze, P: Menge der Parallelogramme, D: Menge der Drachenvierecke, U: Menge der Rhomben, R: Menge der Rechtecke, Q: Menge der Quadrate

1.11 Mit den Mengen aus Aufgabe 1.10 bilde man

a) $T \cup D$ b) $R \cup U$ c) $D \cap R$ d) $P \cap D$

1.12 Man führe mit den Mengen

$A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c, e, f\}$, $C = \{c, d, e, f, g\}$

die folgenden Operationen aus:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A \setminus B$

d) $(A \cup B) \cap C$ e) $(A \cup B) \setminus C$ f) $(A \cap B) \cup C$

g) $(A \cap B) \setminus C$ h) $A \setminus (B \cup C)$ i) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

k) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ l) $(A \setminus B) \setminus C$ m) $A \cap (B \setminus C)$

1.13 Gegeben sind die Grundmenge $G = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ und die Teilmengen $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Man bilde

a) $\overline{A}$ b) $\overline{B}$ c) $\overline{A \cap B}$ d) $\overline{A \cup B}$

1.14 Die im Bild 1.72 dargestellten schraffierten Punktmengen beschreibe man durch Operationen mit den Mengen A, B, C

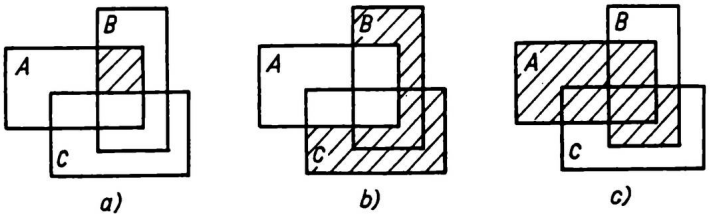


Bild 1.72

1.15 Die folgenden Brüche sind zu kürzen

a) $\dfrac{a^2 - 4}{(a+2)^2}$ b) $\dfrac{ax - 1 + x - a}{ax + 1 + x + a}$ c) $\dfrac{6x^2 - 7x - 3}{4x^2 - 9}$

1.16 Man berechne

a) $\dfrac{a-1}{a^2+a} - \dfrac{1}{a} + \dfrac{4}{a^2-1} - \dfrac{a+1}{a^2-a}$

b) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{x+y}{xy+y^2} + \dfrac{x+y}{x^2-xy}$

c) $\dfrac{7a+2b}{6ab-2b^2} - \dfrac{6a^2+7b^2}{9a^2b-b^2} - \dfrac{6a^2-4b^2}{27a^3-3ab^2} - \dfrac{3a-4b}{9a^2+3ab}$

d) $\left(\dfrac{2a^2}{9b} - \dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{2}{3b} + \dfrac{1}{a}\right)$

e) $\left(\dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x}\right) : \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$

1.17 Man vereinfache die Doppelbrüche

a) $\dfrac{\dfrac{1}{a-b} + \dfrac{1}{a+b}}{\dfrac{1}{a-b} - \dfrac{1}{a+b}}$ b) $\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1} - 1}{\dfrac{x+1}{x-1} + 1}$ c) $\dfrac{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{2}{ab} + \dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}}$

d) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}}$ e) $\dfrac{a}{2b-\dfrac{1}{5c+\dfrac{1}{3d}}}$

1.18 Durch Partialdivision ist zu berechnen

a) $(3a^2+5ab+2b^2):(a+b)$

b) $(40a^3-78a^2b+51ab^2-18b^3):(8a^2-6ab+3b^2)$

c) $(m^3-n^3):(m-n)$

d) $(2x^3-8x^2y^2z-6x^2y+27xy^3z-12y^5z^2):(x-4y^2z)$

1.19 Man schreibe die folgenden Summen ausführlich:

a) $\sum_{k=1}^{5}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ b) $\sum_{h=1}^{3}\frac{1}{2h+1}$ c) $\sum_{i=1}^{3}a_ib_i$ d) $\sum_{k=0}^{4}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$

1.20 Die folgenden Summen sind mit dem Summenzeichen darzustellen:

a) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}$ b) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$

c) $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}$ d) $aq+aq^2+aq^3+aq^4$

1.21 Man vereinfache

a) $4a^2b-5ab^2+2a^2b+11ab^2$

b) $\left(\frac{m}{n}\right)^3:\frac{m^4}{n^4}$ c) $\frac{x^{n-4}}{x^{n-5}}$ d) $x^{-2}y^3\cdot\left(\frac{y^2}{x^3}\right)^{-1}$

e) $\left(\frac{a^{-3}b^2}{c}\right)^2\cdot\left(\frac{b^3}{a^5c}\right)^{-1}$ f) $\frac{2+x^3}{x^7}-\frac{1}{x^4}$

g) $\frac{1}{a^{n+1}}+\frac{2}{a^{n-2}}-\frac{a^3+1}{a^{n+1}}-\frac{a^2-1}{a^n}$

h) $(a^{4x}-a^4):(a^{x-1}+1)$

1.22 Man vereinfache

a) $3\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{a}+5\sqrt{b}$ b) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$

c) $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^5}}\cdot\sqrt[3]{ab^2}$ d) $\sqrt[3]{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt[4]{\frac{y}{x}}$ e) $\sqrt{6x^2-6}\cdot\sqrt{\frac{3x-3}{2x+2}}$

f) $\frac{x-1}{x+1}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ g) $\left(x\sqrt{\frac{x}{y}}-y\right):\left(1-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)$

h) $\frac{\sqrt{a^3-a^2b-ab^2+b^3}}{\sqrt{a+b}}$ i) $\sqrt[7]{x^2\cdot\sqrt[3]{x}}$

k) $\frac{x}{\sqrt[4]{x^3}}$ l) $\frac{\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}{\sqrt[6]{a}}$

1.23 In den folgenden Termen ist der Nenner rational zu machen

a) $\dfrac{3\sqrt{2}+5\sqrt{3}}{5+\sqrt{6}}$ b) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}+a}$ e) $\dfrac{11+2\sqrt{6}}{4+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ f) $\dfrac{a\sqrt{1-a^2}+b\sqrt{1-b^2}}{a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}}$

1.24 Man schreibe als logarithmische Gleichung

a) $0,1^3 = 0,001$ b) $a^{n+1} = b$ c) $2^{-6} = \dfrac{1}{64}$

1.25 Man schreibe als Potenzgleichung

a) $\log_8 0,125 = -1$ b) $\log_{64} 0,5 = -\dfrac{1}{6}$ c) $\log_9 6561 = 4$

1.26 Man zerlege mit Hilfe der Logarithmengesetze die folgenden Terme

a) $\ln \sqrt[3]{\dfrac{a^2\,(b^2-c^2)}{\sqrt{d}}}$ b) $\lg \sqrt{\dfrac{1+a^2}{1-a^2}}$ c) $\ln \dfrac{2}{5x\,(y-z)^2}$

1.27 Man fasse zu einem Term zusammen

a) $\frac{1}{3}(\lg 5 + \lg a + 2\lg c - (\lg(a+b) + \lg(a-b)))$

b) $\frac{1}{2}\left(\ln a + \frac{1}{2}\left(\ln b + \frac{1}{2}\ln c\right)\right)$

c) $\ln T_2 + \dfrac{n-1}{n}(\ln p_1 - \ln p_2)$

1.28 Die folgenden Binomialkoeffizienten sind zu berechnen

a) $\binom{6}{4}$ b) $\binom{45}{2}$ c) $\binom{5}{7}$ d) $\binom{-3}{5}$ e) $\binom{\frac{1}{3}}{3}$

1.29 Man entwickle nach dem binomischen Satz

a) $(2k-0,2)^3$ b) $\left(2+\dfrac{x}{10}\right)^5$ c) $\left(2a-\dfrac{3}{2}b^2\right)^4$

1.30 Die folgenden Gleichungen sind zu lösen

a) $1+\dfrac{x}{2-3x} = \dfrac{2x+1}{3x+2}$ b) $1-\dfrac{5}{4-x} = \dfrac{3x-7}{x-4}$

c) $x-\dfrac{x}{a-b} = \dfrac{ax+b}{a}$ d) $\dfrac{\frac{x}{a}-\frac{x-a}{b}}{\frac{x}{b}-\frac{x+b}{a}} = \dfrac{a}{b}$

e) $8x^2-6x+1=0$ f) $4x^2-4x+3=0$

g) $1-\dfrac{4}{(x+1)(x-3)} = \dfrac{1}{x+1}$ h) $\dfrac{2c^2}{x^2-a^2}+\dfrac{c}{x+a} = -\dfrac{x}{a-x}$

1.31 Gesucht wird die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen (die Lösungsmenge enthält ganzzahlige Lösungen)

a) $x^3 - x^2 - 41x + 105 = 0$

b) $x^3 - 4x^2 + 25x - 100 = 0$

c) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$ (Substitution: $x^2 = z$)

d) $x^4 + 8x^3 - 46x^2 - 128x + 165 = 0$

1.32 Man löse die folgenden Wurzelgleichungen

a) $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$

b) $\sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{7-x}$

c) $x + 1 - \sqrt{2x^2 + 0,5x + 1,5} = 0$

d) $\sqrt{x+5} - \sqrt{2x+3} = 1$

e) $\sqrt{3-x} = 3 - \sqrt{x-4}$

f) $\sqrt{x + 2 + \sqrt{2x-4}} = 4$

1.33 Man löse die folgenden Exponentialgleichungen und logarithmischen Gleichungen

a) $a^{2x+1} = a^{4x-7}$

b) $4^{2x-1} = \dfrac{8^{x+1}}{2^{3x-3}}$

c) $3^x = 10$

d) $\sqrt[x]{12} = 7^x$

e) $\left(\dfrac{97}{12}\right)^{\frac{1}{x}} = \dfrac{15}{33}$

f) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$ (Subst.: $e^x = z$)

g) $4 + 3\lg x = 5,2$

h) $\ln x = 2\ln u + 3\ln v$

i) $\ln x = 3(1 - \ln a)$

k) $\ln x^3 + 2\ln x^2 = 20,4$

l) $\lg 5^x = \lg 2^x + 2$

m) $4^{3\lg x} = 2$

1.34 Die folgenden Formeln sind nach der angegebenen Größe umzustellen

a) $W = mRT \ln \dfrac{V_2}{V_1}$, $V_1 = ?$

b) $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}$, $R = ?$

c) $u = u_0 e^{-\frac{1}{RC}}$, $C = ?$

d) $\varphi = \ln \dfrac{D_0}{D_0 - d} - 0,16$, $D_0 = ?$

e) $\dfrac{T_1}{T_2} = \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{n-1}{n}}$, $n = ?$

f) $y = y_E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$, $t = ?$

1.35 Man löse die goniometrischen Gleichungen

a) $\sin 3x = -0,348$

b) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{18}\right) = -0,933$

c) $3\cos x + 4\sin x = 5$

d) $\cos x - \sin x = 1$

e) $\sin 2x = \cot x$

f) $2\tan x - 3\cot x = 1$

g) $3\sin x + 2\tan x = 0$

h) $\sin^2 \dfrac{x}{2} - \cos x = 0,2$

i) $1 - \cos x = \tan \dfrac{x}{2}$

1.36 Welche Werte kann die Summe $3x - 2y$ für $|x| = 4$, $|y| = 1$ annehmen?

1.37 Was ergibt

a) $\frac{a}{|a|}$ b) $\frac{a+|a|}{2}$ c) $\frac{a+b+|a-b|}{2}$ d) $\frac{a+b-|a-b|}{2}$

1.38 Mit den Intervallen $I_1=[-2,4]$, $I_2=(0,8)$, $I_3=(-4,2)$ bilde man

a) $I_1 \cup I_2$ b) $I_1 \setminus I_2$ c) $I_1 \cap I_2 \cap I_3$ d) $I_3 \cap (I_2 \setminus I_1)$

1.39 Man löse die Ungleichungen

a) $2(x+2)-4x<3(2x-1)+4$

b) $|x+3|\leq 2$ c) $|x+4|>3$

d) $(x-1)(x+2)>0$ e) $|x-2|\cdot|x-4|>3$

1.40 Wie lautet die explizite Darstellung der folgenden Funktionsgleichungen?

a) $x^2y-x+y=0$ b) $y^2-6y-8x=0,\ y\geq 0$

c) $e^y-2+x=0$ d) $2\ln y-x^2+1=0$

1.41 Für die folgenden Funktionen mit Parameterdarstellung ist die parameterfreie Gleichung herzuleiten

a) $x=6t,\ y=4t^2$ b) $x=\frac{1}{1+t},\ y=\frac{t}{1+t}$

c) $x=\ln t,\ y=t+\frac{1}{t}$ d) $x=0{,}5\sin^2 t,\ y=\cos t$

1.42 Man bestimme Definitions- und Wertebereich für die Funktionen mit den folgenden Gleichungen.

a) $y=\sqrt{16-x^2}$ b) $y=\sqrt{x^2-36}$ c) $y=\frac{1}{3x-5}$

d) $y=\frac{x+1}{x^2-3x-10}$ e) $y=2-\sqrt{4x-1}$ f) $y=\ln(x+3)$

g) $y=2+e^x$ h) $y=a^{\sqrt{x}}$

1.43 Welche der gegebenen Funktionsgleichungen stellt eine gerade bzw. ungerade Funktion dar?

a) $y=3x^4+6$ b) $y=x^3+x+2$ c) $y=\frac{x^3-2x}{x^2-1}$

d) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ e) $y=e^{-x^2}$ f) $y=\frac{\ln(1-x^2)}{x}$

g) $y=e^{\cos x}$ h) $y=\tan x-2\sin x$

1.44 Man bestimme die primitive Periode p der folgenden Funktionen

a) $y=1+\sin^2 x$ b) $y=\sin 2x+\cos x$ c) $f(t)=2\sin(3t-0{,}15)$

1.45 Für die folgenden Funktionen ist die Umkehrfunktion zu bilden

a) $y=\frac{1}{2x+8}$ b) $y=1+\sqrt{2-x}$ c) $y=\ln(x-2)$

d) $y=e^{\frac{x}{2}+1}$ e) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ f) $y=2^x$

1.46 Man stelle mit Hilfe des Newtonschen Interpolationspolynoms die Gleichung der ganzrationalen Funktion 3.Grades mit gegebenen Stützstellen auf.

a) $P_0(-2;-14,610)$, $P_1(-1;-7,610)$, $P_2(1,5;-3,235)$, $P_3(4;-2,610)$

b) $P_0(-1;-1)$, $P_1(1;25)$, $P_2(2;26)$, $P_3(4;-56)$

1.47 Man rechne die gegebenen Winkel in die jeweils anderen Winkelmaße (Grad, Radiant oder Gon) um.

a) $10,531°$ b) $2,256\,\text{rad}$ c) $128,360\,\text{gon}$ d) $14°15'23''$

1.48 Für folgende Funktionswerte sind die im Intervall $[0°, 360°)$ liegenden Winkel x zu bestimmen

a) $\sin x = 0,8241$ b) $\tan x = -1,5730$ c) $\cos x = 0,0169$

d) $\cot x = 41,2860$ e) $\sin x = -0,5422$ f) $\cos x = -1$

1.49 Man vereinfache unter Verwendung der Quadrantenrelationen

a) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right)$ b) $\tan\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)$ c) $\sin(x + 3\pi)$

d) $\sin\left(\frac{9}{2}\pi - x\right)$ e) $\dfrac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right)}{\sin(\pi + x)}$

1.50 Man vereinfache

a) $\sin x \cdot \cot x$ b) $\cos x\sqrt{1 + \tan^2 x}$ c) $\dfrac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\tan x}$

1.51 Gegeben ist a) $\tan x = \dfrac{1}{n}$, b) $\cos x = \dfrac{1-a}{1+a}$. Gesucht werden die drei anderen Funktionswerte.

1.52 Man vereinfache die Terme

a) $\sin(330° - \alpha) - \cos(120° + \alpha)$ b) $\sin(150° + \alpha) + \cos(300° + \alpha)$

c) $\dfrac{1 - \cos^2 \alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ d) $\sqrt{\dfrac{1 - \cos(x+y)}{1 + \cos(x+y)}}$ e) $\dfrac{\cot x - \tan x}{\cot x + \tan x}$

1.53 Die folgenden Gleichungen sind zu beweisen

a) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ b) $\dfrac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

c) $\tan x + \cot x = \dfrac{2}{\sin 2x}$ d) $\sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 - 2\cos x}$

e) $\dfrac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \tan\dfrac{x-y}{2} \cdot \cot\dfrac{x+y}{2}$

1.54 Im rechtwinkligen Dreieck sind von den Größen $a, b, c, \alpha, \beta, h, p, q$ zwei Größen gegeben; die restlichen Größen sind zu berechnen.

a) $a = 13,26\,\text{cm}$, $\beta = 67,606°$ b) $b = 189,17\,\text{m}$, $c = 316,78\,\text{m}$

c) $h = 33,06\,\text{m}$, $\alpha = 36,166°$ d) $a = 156,13\,\text{m}$, $q = 333,31\,\text{m}$

1.55 Aus den gegebenen Polarkoordinaten von drei Punkten sind die rechtwinkligen Koordinaten zu berechnen

a) $r = 23,10$; $\alpha = 156,23°$ b) $r = 55,19$; $\alpha = 285,16°$

c) $r = 8,74$; $\alpha = 214,85°$

1.56 Aus den rechtwinkligen Koordinaten sind die Polarkoordinaten zu berechnen

a) $x = 68,61$; $y = -33,18$ b) $x = -10,97$; $y = 8,82$

c) $x = -18,46$; $y = -27,48$

1.57 Um wieviel ist im Kreis mit dem Radius $r = 180\,\text{m}$ der Bogen b länger als die zugehörige Sehne $s = 40\,\text{m}$?

1.58 Die Punkte A, B von zwei geraden Straßen sind durch einen Kreisbogen zu verbinden (Bild 1.73). Gegeben: $\overline{AS} = \overline{BS} = t = 178,50\,\text{m}$, $\beta = 136°52'20''$. Man berechne den Kreisradius r, die Bogenlänge $\overset{\frown}{AB}$ und für die Absteckung der Bogenmitte die Strecke $\overline{SC}$.

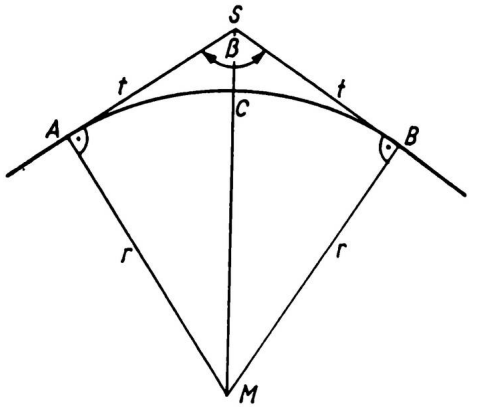


Bild 1.73

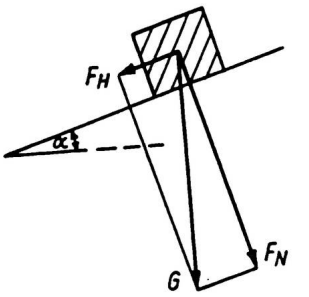


Bild 1.74

1.59 Auf einer schrägen Ebene mit dem Anstiegswinkel $\alpha = 11,2°$ (Bild 1.74) liegt ein Körper mit der Masse $m = 420\,\text{kg}$. Man berechne die Normalkraft F_N und die Hangabtriebskraft F_H ($g = 9,81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).

1.60 Für die gegebenen Dreiecke sind die gesuchten Größen zu berechnen

a) geg.: $a = 215,26\,\text{m}$, $b = 191,04\,\text{m}$, $\alpha = 134,400°$, ges.: c, β, γ

b) geg.: $a = 399,60\,\text{m}$, $c = 315,81\,\text{m}$, $\beta = 115°46'30''$, ges.: α, γ

c) geg.: $a = 559,67\,\text{m}$, $b = 585,56\,\text{m}$, $c = 194,23\,\text{m}$, ges.: β

d) geg.: $b = 266,09\,\text{m}$, $c = 305,76\,\text{m}$, $\beta = 136°48'00''$, ges.: γ

e) geg.: $a = 283,45\,\text{m}$, $c = 91,17\,\text{m}$, $\beta = 22,85°$, ges.: b, α

f) geg.: $a = 265,06\,\text{m}$, $b = 474,75\,\text{m}$, $c = 393,13\,\text{m}$, ges.: α, β, γ

g) geg.: $b = 66,93\,\text{m}$, $c = 106,25\,\text{m}$, $\alpha = 55,344°$, ges.: a, β, γ

h) geg.: $a = 462,40\,\text{m}$, $b = 651,82\,\text{m}$, $\alpha = 39°07'00''$, ges.: c, β, γ

i) geg.: $b = 420,13\,\text{m}$, $\gamma = 53,2083°$, $\alpha = 80,0833°$, ges.: a, c, β

k) geg.: $b = 130,18\,\text{m}$, $c = 297,15\,\text{m}$, $\alpha = 36,200°$, ges.: γ

1.61 Drei Kräfte $F_1 = 500\,\text{N}$, $F_2 = 700\,\text{N}$, $F_3 = 800\,\text{N}$ greifen in einem Punkt an und halten sich das Gleichgewicht. Welche Winkel schließen ihre Wirkungslinien miteinander ein?

1.62 Um die Enfernung e der Turmspitzen P_1, P_2 zu bestimmen, wurden die Basis $b = 81,92\,\text{m}$ und die Winkel $\alpha_1 = 107°53'30''$, $\alpha_2 = 29°10'00''$, $\beta_1 = 40°00'30''$, $\beta_2 = 114°03'00''$ gemessen (Bild 1.75). Wie groß ist e?

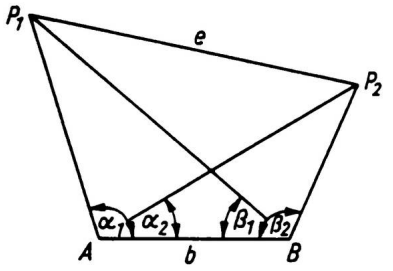


Bild 1.75

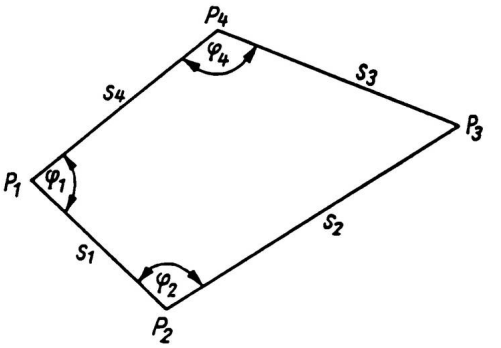


Bild 1.76

1.63 Von dem Viereck $P_1P_2P_3P_4$ sind die Seiten $s_1 = 260,43\,\text{m}$, $s_4 = 335,19\,\text{m}$ und die Winkel $\varphi_1 = 80°04'20''$, $\varphi_2 = 105°26'00''$, $\varphi_4 = 121°19'30''$ gegeben (Bild 1.76). Gesucht sind die Seiten s_2 und s_3.

1.64 Zur trigonometrischen Bestimmung der Höhe x des Punktes C über A wurde ein Punkt B gewählt, der mit A und C in einer Vertikalebene liegt (Bild 1.77), und es wurden $h = 26,01\,\text{m}$, $s = 83,95\,\text{m}$, $\alpha = 37°04'40''$, $\beta = 21°50'20''$ gemessen. Man berechne x.

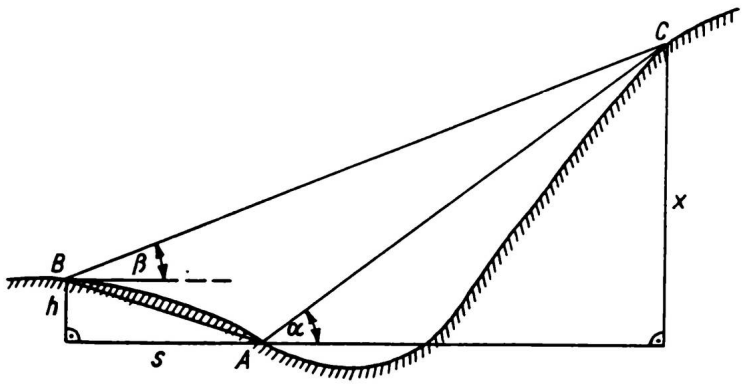


Bild 1.77

2 Komplexe Zahlen

2.1 Imaginäre Zahlen

Im Bereich der reellen Zahlen ist es bekanntlich nicht möglich, die Wurzel mit geradzahligem Exponenten aus einer negativen Zahl zu ziehen. So ist z.B. die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0 \qquad \text{oder allgemein} \qquad x^2 + a = 0 \qquad \text{für } a > 0$$

im Bereich der reellen Zahlen nicht lösbar, denn es ergibt sich

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-1} \qquad \text{bzw.} \qquad x_{1,2} = \pm\sqrt{-a}\,.$$

Legt man fest, daß die Beziehung $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ auch für negative Radikanden gilt, genügt das Einführen einer neuen Zahl für $\sqrt{-1}$ zum Lösen der Gleichung. Die Zahl $\sqrt{-1}$ wird als **imaginäre Einheit i** oder auch **j** (um Verwechslungen mit dem Symbol i für die elektrische Stromstärke zu vermeiden) bezeichnet.[1]

Definition

Die **imaginäre Einheit j** bzw. **i** ist eine Zahl, deren Quadrat -1 ist:

$$\mathrm{j}^2 = -1 \tag{2.1}$$

Als Lösungen der oben angegebenen Gleichungen erhält man

$$\begin{array}{rcl} x_{1,2} & = & \pm\sqrt{-1} \\ x_1 & = & +\mathrm{j} \\ x_2 & = & -\mathrm{j} \end{array} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{array}{rcl} x_{1,2} & = & \pm\sqrt{a}\sqrt{-1} \\ x_1 & = & +\sqrt{a}\,\mathrm{j} \\ x_2 & = & -\sqrt{a}\,\mathrm{j} \end{array}$$

Man beachte, daß gemäß der Definition (2.1) für die imaginäre Einheit auch $(-\mathrm{j})^2 = ((-1)\cdot\mathrm{j})^2 = (-1)^2\cdot\mathrm{j}^2 = 1\cdot(-1) = -1$ ist.
Das Produkt einer reellen Zahl b mit j wird als *rein imaginäre Zahl* $b\,\mathrm{j}$ bezeichnet. Damit ergibt sich ein zum Bereich der reellen Zahlen gleichmächtiger, d.h. auf diesen eineindeutig abbildbarer Zahlenbereich der imaginären Zahlen.
Die Gesetze für das Rechnen mit reellen Zahlen gelten deshalb auch für imaginäre Zahlen.

---

[1] Die Bezeichnung der imaginären Einheit mit i stammt von LEONHARD EULER (1707 – 1783). lat.: imaginarius, scheinbar, eingebildet

Beispiel 2.1

a) $3\mathrm{j} - 2\mathrm{j} + c\mathrm{j} = (1 + c)\mathrm{j}$ b) $m\mathrm{j} \pm n\mathrm{j} = (m \pm n)\mathrm{j}$
c) $p\mathrm{j} \cdot q\mathrm{j} = pq\mathrm{j}^2 = -pq$

Für höhere Potenzen von j erhält man mit

$$\mathrm{j}^2 = -1$$
$$\mathrm{j}^3 = \mathrm{j}^2 \cdot \mathrm{j} = -\mathrm{j} \quad \mathrm{j}^4 = \mathrm{j}^2 \cdot \mathrm{j}^2 = 1 \quad \mathrm{j}^5 = \mathrm{j}^4 \cdot \mathrm{j} = \mathrm{j}$$
$$\mathrm{j}^6 = \mathrm{j}^4 \cdot \mathrm{j}^2 = -1 \quad \mathrm{j}^7 = \mathrm{j}^4 \cdot \mathrm{j}^3 = -\mathrm{j} \quad \mathrm{j}^8 = \mathrm{j}^4 \cdot \mathrm{j}^4 = 1$$

usw.
Somit gilt allgemein

$$\boxed{\mathrm{j}^{4n} = 1\,,\ \mathrm{j}^{4n+1} = \mathrm{j}\,,\ \mathrm{j}^{4n+2} = -1\,,\ \mathrm{j}^{4n+3} = -\mathrm{j} \qquad n \in \mathbb{Z}} \tag{2.2}$$

Ist der Nenner eines Bruches imaginär, so erweitert man entweder mit einer geeigneten Potenz von j oder multipliziert den Zähler mit $\mathrm{j}^4 = 1$ bzw. $\mathrm{j}^{4n} = 1$.

Beispiel 2.2

a) $\dfrac{1}{\mathrm{j}} = \dfrac{\mathrm{j}^3}{\mathrm{j}^4} = -\mathrm{j}$ oder $\dfrac{1}{\mathrm{j}} = \dfrac{\mathrm{j}^4}{\mathrm{j}} = \mathrm{j}^3 = -\mathrm{j}$

b) $\dfrac{1}{\mathrm{j}^6} = \dfrac{\mathrm{j}^2}{\mathrm{j}^8} = -1$ oder $\dfrac{1}{\mathrm{j}^6} = \dfrac{\mathrm{j}^8}{\mathrm{j}^6} = \mathrm{j}^2 = -1$

Aufgaben 2.1 bis 2.3

2.2 Arithmetische Form komplexer Zahlen

2.2.1 Definition der komplexen Zahl

Die unbeschränkte Anwendung der Rechenoperationen Addition und Subtraktion auf reelle und imaginäre Zahlen führt zur komplexen[1] Zahl

$$z = a + b\mathrm{j} \qquad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

Definition

Eine **komplexe Zahl** z ist die algebraische Summe einer reellen Zahl a und einer imaginären Zahl $b\mathrm{j}$ (**arithmetische Form**):

$$z = a + b\mathrm{j} \qquad (a, b \in \mathbb{R})\,,$$

a heißt **Realteil**, b **Imaginärteil** von z.
Die Menge der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

[1] lat.: completus, vollständig

Eine reelle Zahl kann als komplexe Zahl $a+0\cdot \mathrm{j}$, eine imaginäre Zahl als komplexe Zahl $0+b\cdot \mathrm{j}$ dargestellt werden, d.h., die komplexen Zahlen umfassen die bisher bekannten reellen und die imaginären Zahlen.

Wie noch gezeigt wird, ergibt die Anwendung der Rechenoperationen 1. bis 3. Stufe (von der Addition bis zum Logarithmieren) auf komplexe Zahlen stets wieder komplexe Zahlen. Der Bereich der komplexen Zahlen bedarf bezüglich dieser Rechenoperationen keiner Erweiterung mehr, er ist vollständig. Diese Erkenntnis gab den komplexen Zahlen ihren Namen.

Bereits CARDANO[1] rechnete mit komplexen Zahlen, ohne sie so zu bezeichnen, als er 1545 die Aufgabe formulierte, die Zahl 10 in zwei Teile zu zerlegen, deren Produkt gleich 40 ist.

Die sich ergebende quadratische Gleichung

$$x(10-x)=40$$

$$x^2-10x+40=0$$

hat die Lösungen

$$x_{1,2}=5\pm\sqrt{25-40}=5\pm\sqrt{-15}$$

CARDANO kam bis zu dieser Form des Ergebnisses. Mit Kenntnis der komplexen Zahlen kann als Lösung angegeben werden:

$$L=\left\{5+\sqrt{15}\mathrm{j};\ 5-\sqrt{15}\mathrm{j}\right\}$$

Die beiden Lösungen unterscheiden sich nur im Vorzeichen des Imaginärteils.

Definition

Zwei komplexe Zahlen z und $\overline{z}$, die sich nur im Vorzeichen des Imaginärteils unterscheiden, heißen **konjugiert komplex**:

$$z=a+b\mathrm{j}, \qquad \overline{z}=a-b\mathrm{j}$$

Ohne Beweis soll angegeben werden, daß die komplexwertigen Lösungen algebraischer Gleichungen paarweise als konjugiert komplexe Zahlen auftreten.

Für die Gleichheit zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 und das Verschwinden (gleich null sein) einer komplexen Zahl gilt die

[1] GERONIMO CARDANO (1501 – 1576), italien. Mathematiker

Definition

Zwei komplexe Zahlen $z_1 = a_1 + b_1\mathrm{j}$ und $z_2 = a_2 + b_2\mathrm{j}$ heißen genau dann gleich, wenn Real- und Imaginärteil einzeln gleich sind:

$$a_1 + b_1\,\mathrm{j} = a_2 + b_2\mathrm{j} \iff a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$$

Eine komplexe Zahl $z = a + b\,\mathrm{j}$ ist genau dann gleich null, wenn Real- und Imaginärteil zugleich null sind:

$$a + b\,\mathrm{j} = 0 \iff a = 0 \wedge b = 0$$

2.2.2 Gaußsche Zahlenebene

Die komplexen Zahlen $z = a + b\,\mathrm{j}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ stellen geordnete Zahlenpaare $(a; b)$ dar.
Die reellen Zahlen wurden den Punkten der Zahlengeraden zugeordnet und umgekehrt. In gleicher Weise kann die Zuordnung der imaginären Zahlen zu den Punkten einer anderen Geraden mit der Einheit j erfolgen. Zur Darstellung der komplexen Zahlen wird eine Ebene mit einem rechtwinkligen Koordinatensystem verwendet, dessen waagerechte Achse die **reelle Achse** und dessen senkrechte Achse die **imaginäre Achse** ist (Bild 2.1). Diese Ebene heißt **komplexe** oder **Gaußsche Zahlenebene**[1].

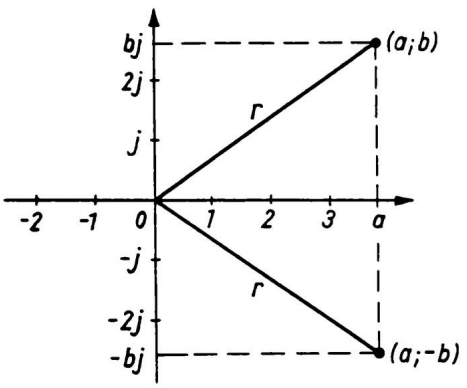


Bild 2.1

Jeder komplexen Zahl entspricht genau ein Punkt dieser Zahlenebene und umgekehrt, d.h., es liegt eine eineindeutige Abbildung der Menge der komplexen Zahlen auf die Menge der Punkte der Gaußschen Zahlenebene vor.
Ordnungsrelationen kleiner (<) oder größer (>) zwischen komplexen Zahlen sind nicht möglich; auch gibt es keine positiven oder negativen komplexen Zahlen. Wohl aber kann der Abstand des dem Zahlenpaar $(a; b)$ zugeordneten Punktes vom Ursprung 0 angegeben werden. Er heißt **(absoluter) Betrag** r der komplexen Zahl $z = a + b\,\mathrm{j}$.

[1] Carl Friedrich Wilhelm Gauss (1777 – 1855), Professor der Mathematik und Leiter der Sternwarte in Göttingen. Er führte die komplexe Zahlenebene ein und entwickelte die Theorie der komplexen Zahlen.

Definition

Der (absolute) Betrag r einer komplexen Zahl $z = a + b\,\mathrm{j}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ ist

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Beispiel 2.3

a) $z = 3 + 2\,\mathrm{j}$: $|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \approx 3,606$

b) $z = -3 - 2\,\mathrm{j}$: $|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} \approx 3,606$

c) $z = 4 + 3\,\mathrm{j}$, $\overline{z} = 4 - 3\,\mathrm{j}$: $|z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, $|\overline{z}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$

Allgemein gilt für zwei konjugiert komplexe Zahlen $z = a + b\,\mathrm{j}$ und $\overline{z} = a - b\,\mathrm{j}$:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},\quad |\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \Longrightarrow |z| = |\overline{z}|$$

In der Gaußschen Zahlenebene läßt sich jede komplexe Zahl z als (zweidimensionaler) **Vektor** darstellen, der vom Nullpunkt zu dem durch das Zahlenpaar $(a; b)$ bestimmten Punkt führt (Bild 2.2).

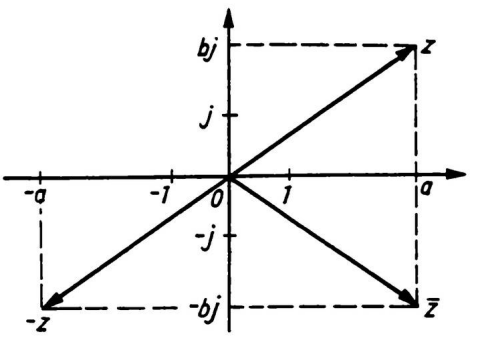


Bild 2.2

Die Vektoren zweier konjugiert komplexer Zahlen $z = a + b\,\mathrm{j}$ und $\overline{z} = a - b\,\mathrm{j}$ liegen *symmetrisch zur reellen Achse.* Der Vektor $z = a + b\,\mathrm{j}$ und der Vektor $-z = -a - b\,\mathrm{j}$ liegen *symmetrisch zum Nullpunkt*, sie sind *entgegengesetzte Vektoren.*

2.2.3 Rechenoperationen der ersten und zweiten Stufe mit komplexen Zahlen

Für die Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen gelten – wie bei reellen Zahlen – die Eigenschaften der

Kommutativität	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ und $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$	
Assoziativität	$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ und $(z_1 \cdot z_2) z_3 = z_1 (z_2 \cdot z_3)$	
Distributivität	$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$	(2.3)

Addition und Subtraktion

Da eine komplexe Zahl die algebraische Summe aus einer reellen und einer imaginären Zahl ist, also von zwei Elementen aus zwei disjunkten Zahlenmengen (außer der Null), gilt der

Satz

Komplexe Zahlen werden addiert bzw. subtrahiert, indem man ihre Real- und ihre Imaginärteile getrennt addiert bzw. subtrahiert:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1\,\mathrm{j}) \pm (a_2 + b_2\,\mathrm{j}) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\,\mathrm{j}$$

Für die Summe bzw. Differenz zweier konjugiert komplexer Zahlen ergibt sich:

$$(a + b\,\mathrm{j}) + (a - b\,\mathrm{j}) = 2a$$

$$(a + b\,\mathrm{j}) - (a - b\,\mathrm{j}) = 2b\mathrm{j}$$

d.h.: die *Summe* zweier konjugiert komplexer Zahlen ist *reell*,

die *Differenz* zweier konjugiert komplexer Zahlen ist *imaginär*.

Beispiel 2.4

a) $z_1 = 5 + 2\,\mathrm{j}$, $z_2 = 2 + 3\,\mathrm{j}$: $z_1 + z_2 = 7 + 5\mathrm{j}$; $z_1 - z_2 = 3 - \mathrm{j}$

b) $z_1 = 3{,}8 + 1{,}75\,\mathrm{j}$, $z_2 = -1{,}7 + 3{,}25\mathrm{j}$: $z_1 + z_2 = 2{,}1 + 5\,\mathrm{j}$;
$z_1 - z_2 = 5{,}5 - 1{,}5\,\mathrm{j}$

c) $$\left(1 + \frac{3}{2}\mathrm{j}\right) - \left(\frac{1}{4} + 2\mathrm{j}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\mathrm{j}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\mathrm{j}\right)$$
$$= \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2\right) + \left(\frac{3}{2} - 2 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{j} = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\mathrm{j}$$

Die Addition und Subtraktion komplexer Zahlen kann geometrisch in der Gaußschen Zahlenebene erfolgen. Bei der Addition wird der eine Vektor parallel so verschoben, daß sein Anfang mit der Spitze des anderen zusammenfällt. Die Summe wird durch den Summenvektor dargestellt, der vom Anfang des ersten, d.h. vom Nullpunkt, zur Spitze des verschobenen zweiten Vektors geht. Die Subtraktion kann auf die Addition zurückgeführt werden, indem man zum Vektor des Minuenden den zum Subtrahenden entgegengesetzten Vektor addiert. Bild 2.3 und Bild 2.4 zeigen die Additionen und Subtraktionen von Beispiel 2.4 b) und c) in der Gaußschen Zahlenebene.

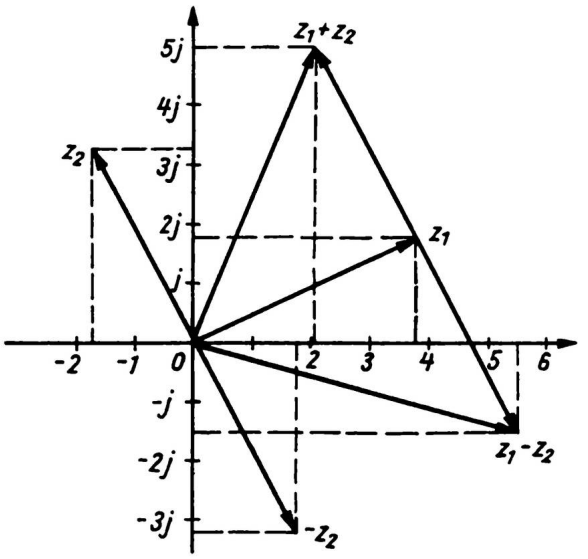


Bild 2.3

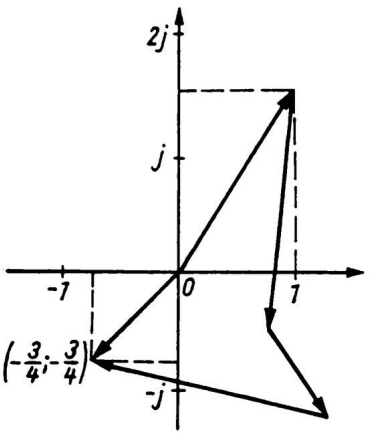


Bild 2.4

Multiplikation

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen $z_1 = a_1 + b_1\mathrm{j}$ und $z_2 = a_2 + b_2\mathrm{j}$ ergibt

$$(a_1 + b_1\,\mathrm{j})(a_2 + b_2\,\mathrm{j}) = a_1a_2 + a_1b_2\,\mathrm{j} + a_2b_1\,\mathrm{j} + b_1b_2\,\mathrm{j}^2$$

und wegen $\mathrm{j}^2 = -1$

$$\boxed{(a_1 + b_1\mathrm{j})(a_2 + b_2\,\mathrm{j}) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\,\mathrm{j}}$$

d.h. wieder eine komplexe Zahl.

Sind die beiden Zahlen konjugiert komplex, so wird

$$\boxed{z \cdot \overline{z} = (a + b\mathrm{j})(a - b\,\mathrm{j}) = a^2 + b^2}$$

d.h.:

1. das Produkt zweier konjugiert komplexer Zahlen ist eine reelle Zahl;
2. $a^2 + b^2$ kann in das Produkt von zwei konjugiert komplexen Zahlen zerlegt werden.

Beispiel 2.5

a) $(4 + 5\,\mathrm{j})(3 - 2\mathrm{j}) = 12 - 8\,\mathrm{j} + 15\,\mathrm{j} - 10\,\mathrm{j}^2 = 22 + 7\,\mathrm{j}$

b) $(4 + 5\,\mathrm{j})(5 + 4\,\mathrm{j}) = 20 + 16\,\mathrm{j} + 25\,\mathrm{j} + 20\,\mathrm{j}^2 = 41\,\mathrm{j}$

c) $(2 + 3\,\mathrm{j})(3 - 2\,\mathrm{j})(12 - 5\,\mathrm{j}) = (6 - 4\,\mathrm{j} + 9\,\mathrm{j} - 6\,\mathrm{j}^2)(12 - 5\mathrm{j})$
$= (12 + 5\,\mathrm{j})(12 - 5\,\mathrm{j}) = 144 - 25\,\mathrm{j}^2 = 169$

d) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\,\mathrm{j})(\sqrt{2} - \sqrt{3}\,\mathrm{j}) = 2\sqrt{6} - 6\,\mathrm{j} - 6\,\mathrm{j} + 3\sqrt{6}\mathrm{j}^2 = -\sqrt{6} - 12\,\mathrm{j}$

Division

Die Division einer komplexen Zahl durch eine reelle oder imaginäre Zahl erfolgt, indem Realteil und Imaginärteil einzeln dividiert werden. Der Quotient ist wieder eine komplexe Zahl.

$$\frac{a_1 + b_1\mathrm{j}}{a_2} = \frac{a_1}{a_2} + \frac{b_1}{a_2}\mathrm{j}; \qquad \frac{a_1 + b_1\,\mathrm{j}}{b_2\mathrm{j}} = \frac{b_1}{b_2} - \frac{a_1}{b_2}\,\mathrm{j}$$

Bei der Division durch eine komplexe Zahl wird durch Erweitern mit dem konjugiert komplexen Wert des Divisors im Nenner ein reeller Wert erzeugt.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1\mathrm{j}}{a_2 + b_2\,\mathrm{j}} = \frac{(a_1 + b_1\,\mathrm{j})(a_2 - b_2\,\mathrm{j})}{(a_2 + b_2\,\mathrm{j})(a_2 - b_2\,\mathrm{j})} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (-a_1b_2 + a_2b_1)\,\mathrm{j}}{a^2 + b^2}$$

$$\boxed{\frac{a_1 + b_1\mathrm{j}}{a_2 + b_2\,\mathrm{j}} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{-a_1b_2 + a_2b_1}{a_2^2 + b_2^2}\,\mathrm{j}}$$

Beispiel 2.6

a) $\dfrac{4+3\,\mathrm{j}}{3+4\,\mathrm{j}} = \dfrac{(4+3\,\mathrm{j})(3-4\,\mathrm{j})}{(3+4\,\mathrm{j})(3-4\mathrm{j})} = \dfrac{12-16\,\mathrm{j}+9\,\mathrm{j}-12\,\mathrm{j}^2}{3^2+4^2} = \dfrac{24-7\mathrm{j}}{25} = 0,96-0,28\,\mathrm{j}$

b) $\dfrac{4-3\,\mathrm{j}}{3+4\,\mathrm{j}} = \dfrac{(4-3\,\mathrm{j})(3-4\,\mathrm{j})}{(3+4\,\mathrm{j})(3-4\mathrm{j})} = \dfrac{12-16\,\mathrm{j}-9\,\mathrm{j}+12\,\mathrm{j}^2}{3^2+4^2} = -\dfrac{25\mathrm{j}}{25} = -\mathrm{j}$

c) Für $z = 3+4\,\mathrm{j}$ sollen $z:\overline{z}$ und $\overline{z}:z$ berechnet werden.

$$\frac{z}{\overline{z}} = \frac{3+4\,\mathrm{j}}{3-4\mathrm{j}} = \frac{(3+4\,\mathrm{j})^2}{(3-4\,\mathrm{j})(3+4\,\mathrm{j})} = \frac{9+24\,\mathrm{j}+16\,\mathrm{j}^2}{25} = \frac{-7+24\,\mathrm{j}}{25}$$

$$= -0,28+0,96\,\mathrm{j}$$

$$\frac{\overline{z}}{z} = \frac{3-4\,\mathrm{j}}{3+4\mathrm{j}} = \frac{(3-4\,\mathrm{j})^2}{(3+4\,\mathrm{j})(3-4\,\mathrm{j})} = \frac{9-24\,\mathrm{j}+16\,\mathrm{j}^2}{25} = -0,28-0,96\,\mathrm{j}$$

2.3 Goniometrische Form komplexer Zahlen

2.3.1 Goniometrische Form

In 2.2.3 wurde gezeigt, daß jede komplexe Zahl z durch einen Vektor in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt werden kann. Der Vektor ist bestimmt durch seine Länge, seine Richtung und seinen Richtungssinn. Der Richtungssinn sei stets festgelegt vom Nullpunkt des Koordinatensystems zu dem dem Wertepaar $(a;b)$ zugeordneten Punkt hin.

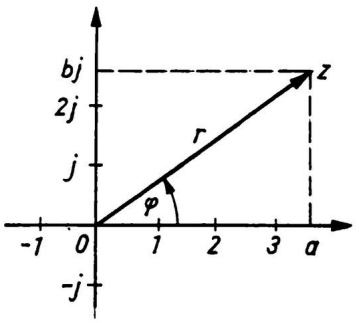


Bild 2.5

Die Länge des Vektors ist sein (absoluter) **Betrag** $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, der auch als der *Modul* der komplexen Zahl bezeichnet wird. Die Richtung ergibt sich (Bild 2.5) aus dem Winkel φ zwischen der reellen Achse und dem Vektor. Im mathematisch positiven Drehsinn (entgegen dem Uhrzeigersinn) gemessen ist er positiv, andernfalls negativ. φ ist das **Argument**[1] oder die *Phase* der komplexen Zahl z und kann ermittelt werden aus $\tan\varphi = (b/a)$ bzw. $\sin\varphi = (b/r)$ bzw. $\cos\varphi = (a/r)$. Eine komplexe Zahl ist somit auch bestimmt durch

$$\boxed{\begin{array}{lll} \textbf{Betrag} & r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} & \text{und} \\ \textbf{Argument} & \tan\varphi = \dfrac{b}{a} \quad \text{mit} \quad \sin\varphi = \dfrac{b}{r} & \text{oder} \quad \cos\varphi = \dfrac{a}{r} \end{array}} \tag{2.4}$$

Da die Tangensfunktion (und auch die Sinus- und Cosinusfunktion) im Bereich $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ i.allg. zweideutig ist, ergibt sich φ eindeutig nur durch Verwendung von zwei der drei angegebenen Beziehungen, oder man bestimmt den Quadranten, in dem φ liegt, aus den Vorzeichen von Real- und Imaginärteil:

Vorzeichen des Realteils von z	+	−	−	+
Vorzeichen des Imaginärteils von z	+	+	−	−
Quadrant, in dem φ liegt	I	II	III	IV

Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl z ergeben sich aus Betrag r und Argument φ:

$$\boxed{a = r\cos\varphi \qquad b = r\sin\varphi} \tag{2.4a}$$

Damit ist $z = a + b\,\mathrm{j} = r\cos\varphi + \mathrm{j}\,r\sin\varphi$.

[1] Die Bezeichnungen Modul und Argument stammen von dem franz. Mathematiker CAUCHY (1789 - 1869)

Satz

Jede komplexe Zahl z läßt sich durch Betrag r und Argument φ in ihrer **goniometrischen Form**

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi) \tag{2.5}$$

mit $r \in \mathbb{R}$ und $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ darstellen.

Beim Rechnen mit komplexen Zahlen in ihrer goniometrischen Form ist die Periodizität der Winkelfunktionen zu beachten, d.h., es ist

$$\cos(\varphi + k \cdot 2\pi) + \mathrm{j}\sin(\varphi + k \cdot 2\pi) = \cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi \quad k \in \mathbb{Z} \tag{2.6}$$

Beispiel 2.7

a) $z = 3 + 4\mathrm{j} \Rightarrow r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $\tan\varphi = \frac{4}{3}$, $\varphi = 0,9273$
$z = 5(\cos 0,9273 + \mathrm{j}\sin 0,9273)$
Das Argument φ wurde im Bogenmaß angegeben. Es könnte hier auch die Angabe im Winkelgrad erfolgen.

b) $z = 3 - 4\mathrm{j} \Rightarrow r = 5$, $\tan\varphi = -\frac{4}{3}$, $\varphi = 5,3559 = 306,870°$
$z = 5(\cos 5,3559 + \mathrm{j}\sin 5,3559)$

c) $z = -3 - 4\mathrm{j} \Rightarrow r = 5$, $\tan\varphi = \frac{4}{3}$, $\varphi = 4,0689 = 233,130°$
$z = 5(\cos 4,0689 + \mathrm{j}\sin 4,0689)$

Beispiel 2.8

a) $r = 1,2$, $\varphi = \frac{\pi}{6} = 30°$
$z = 1,2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{6}\right) = 1,2(0,8660 + 0,5\mathrm{j}) = 1,0392 + 0,6\mathrm{j}$

b) $r = 1,5$, $\varphi = 2,1729 = 124,5°$
$z = 1,5(\cos 2,1729 + \mathrm{j}\sin 2,1729) = 1,5(-0,5664 + 0,8241\mathrm{j})$
$= -0,8496 + 1,2362\mathrm{j}$

Aufgaben 2.4 bis 2.8

2.3.2 Multiplikation und Division

Auch für komplexe Zahlen in der goniometrischen Form sind die Rechenoperationen der 2. Stufe (Multiplikation und Division) und der 3. Stufe (Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren) ausführbar. Für die Addition und Subtraktion komplexer Zahlen verwendet man allerdings die arithmetische Form.

Multiplikation

Aus $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{j}\sin\varphi_1)$ und $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{j}\sin\varphi_2)$

folgt $z = z_1 \cdot z_2$
$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \mathrm{j}\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \mathrm{j}\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \mathrm{j}^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2)$
$= r_1 r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \mathrm{j}(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2))$

Durch Anwenden der Additionstheoreme (vgl. Abschn. 1.4.2.4) entsteht

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{j}\sin(\varphi_1 + \varphi_2))} \tag{2.7}$$

Satz

Zwei komplexe Zahlen in der goniometrischen Form werden multipliziert, indem man ihre **Beträge multipliziert** und ihre **Argumente addiert**.

Multipliziert man Gleichung (2.7) mit einem 3. Faktor z_3, 4. Faktor z_4, ..., n–ten Faktor z_n, so erhält man

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \ldots \cdot z_n \;=\; & r_1 r_2 r_3 \ldots r_n(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots + \varphi_n) + \\ & + \mathrm{j}\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots + \varphi_n)) \qquad n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \end{aligned}} \tag{2.8}$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Es gilt (Induktionsanfang) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{j}\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

Induktionsannahme

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_k &= r_1 r_2 r_3 \ldots r_k(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_k) + \mathrm{j}\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_k)) \\ &= r'(\cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha) \\ &\text{mit } r' = r_1 r_2 r_3 \ldots r_k\,, \quad \alpha = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_k \end{aligned}$$

Induktionsbehauptung

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_k \cdot z_{k+1} &= r_1 r_2 r_3 \ldots r_k r_{k+1}(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_k + \varphi_{k+1}) \\ &\quad + \mathrm{j}\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_k + \varphi_{k+1})) \\ &= r' r_{k+1}(\cos(\alpha + \varphi_{k+1}) + \mathrm{j}\sin(\alpha + \varphi_{k+1})) \end{aligned}$$

Beweis:

Mit den obenstehenden Werten für r' und α erhält man die für zwei Faktoren bewiesene Gleichung (2.7). Daraus folgt: Gilt der Satz für k Faktoren, so auch für $k+1$ Faktoren, und somit für beliebig viele Faktoren.

Division

Für $z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{j}\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{j}\sin\varphi_2)} \quad (z_2 \neq 0)$

ergibt sich nach Erweitern mit $(\cos\varphi_2 - \mathrm{j}\sin\varphi_2)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \mathrm{j}\,(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2}$$

Wegen $\sin^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_2 = 1$ folgt daraus nach Anwenden der Additionstheoreme (vgl. Abschn. 1.4.2.4)

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{j}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \qquad (z_2 \neq 0)} \tag{2.9}$$

Satz

Zwei komplexe Zahlen in der goniometrischen Form werden dividiert, indem man ihre **Beträge dividiert** und ihre **Argumente subtrahiert**.

Beispiel 2.9

Für $z_1 = 1,2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{6}\right)$ und $z_2 = 1,5\,(\cos 2,1729 + \mathrm{j}\sin 2,1729)$
(vgl. Beisp. 2.8) sind $z_1 \cdot z_2$ und $z_1 : z_2$ zu berechnen.

Es ist $r = r_1 r_2 = 1,8$, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 2,6965$
Somit $z = z_1 \cdot z_2 = 1,8\,(\cos 2,6965 + \mathrm{j}\sin 2,6965)$
Es ist $r = \frac{r_1}{r_2} = 0,8$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = -1,6493$
Daraus folgt nach Addieren von 2π (gemäß Gleichung (2.7)) $\varphi = 4,6339$
$z = \frac{z_1}{z_2} = 0,8\,(\cos 4,6339 + \mathrm{j}\sin 4,6339)$

Multiplikation und Division in der Gaußschen Zahlenebene

Aus Gleichung (2.7) folgt für den Produktvektor $z = z_1 \cdot z_2$ der beiden in der Gaußschen Zahlenebene dargestellten Vektoren z_1 und z_2, daß er durch

1. Streckung von r_1 um das $r_2$fache (ggf. auch Verkürzung, wenn $r_2 < 1$) und
2. Drehung von φ_1 um φ_2 im positiven Sinne

entsteht.

Analog ergibt sich der Vektor für den Quotienten
$z = z_1/z_2$ in der Gaußschen Zahlenebene gemäß Gleichung (2.9) durch

1. Verkürzung von r_1 auf den r_2-ten Teil (für $r_2 < 1$ ergibt sich eine Streckung) und
2. Drehung von φ_1 um φ_2 im negativen Sinne.

Für die beiden Vektoren z_1 und z_2 des Beispiels 2.9 zeigt Bild 2.6 die Multiplikation und Division in der Gaußschen Zahlenebene.

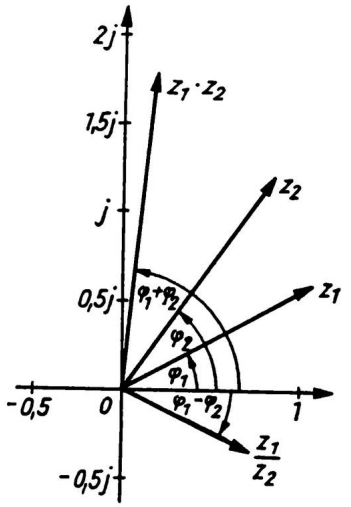


Bild 2.6

Für den Fall $z_2 = \mathrm{j}$, d.h. $r_2 = 1$ und $\varphi_2 = \pi/2 = 90°$, folgt:
- die Multiplikation einer komplexen Zahl (z_1) mit j bedeutet die Drehung des zugehörigen Vektors um 90°,
- die Division einer komplexen Zahl (z_1) durch j bedeutet die Drehung des zugehörigen Vektors um −90°.

2.3.3 Potenzieren und Radizieren

Potenzieren

Setzt man in Gleichung (2.8)

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 1 \text{ und } \varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = \varphi,$$

so erhält man zunächst den

Satz von MOIVRE[1]

$$\boxed{(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{j}\sin n\varphi \qquad n \in \mathbb{R}} \tag{2.10}$$

Für $r_i = r$, $\varphi_i = \varphi$, $z = r(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$ folgt dann aus Gl. (2.8)

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + \mathrm{j}\sin n\varphi) \qquad n \in \mathbb{R}} \tag{2.11}$$

Der für positive ganze Exponenten hergeleitete Satz gilt für beliebige reelle Exponenten (für negative ganze Exponenten s. Aufg. 2.12).

Radizieren

Wegen der Periodizität der Winkelfunktionen kann man für Gleichung (2.10) auch schreiben

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)^n &= (\cos(\varphi + k\cdot 2\pi) + \mathrm{j}\sin(\varphi + k\cdot 2\pi))^n \\ &= \cos(n\varphi + n\cdot k\cdot 2\pi) + \mathrm{j}\sin(n\varphi + n\cdot k\cdot 2\pi) \qquad \text{mit } k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Wenn $n \in \mathbb{Z}$, ist auch $n \cdot k$ ganzzahlig, und es ergibt sich wieder

$$(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{j}\sin n\varphi,$$

d.h., beim Potenzieren einer komplexen Zahl mit einer ganzen Zahl ist das Ergebnis eindeutig.
Ist hingegen n ein Wurzelexponent, so wird

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a+b\mathrm{j}} &= \sqrt[n]{r(\cos(\varphi + k\cdot 2\pi) + \mathrm{j}\sin(\varphi + k\cdot 2\pi))} \\ &= r^{\frac{1}{n}}(\cos(\varphi + k\cdot 2\pi) + \mathrm{j}\sin(\varphi + k\cdot 2\pi))^{\frac{1}{n}} \\ &= r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + \mathrm{j}\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right) \qquad \text{mit } n \in \mathbb{N}^*,\ k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

[1] ABRAHAM MOIVRE (1667 – 1754), franz. Mathematiker

Satz

Für die n-te Wurzel aus einer komplexen Zahl
$z = a + b\,\mathrm{j} = r\,(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi) \quad (z \neq 0)$ gilt

$$\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + \mathrm{j}\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right)$$
$$\text{mit} \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{2.12}$$

Für $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ ergeben sich n verschiedene Wurzelwerte.
Der Wurzelwert für $k = 0$ heißt der **Hauptwert** von $\sqrt[n]{z}$.

Da bei allen n verschiedenen Wurzelwerten der Betrag $r^{\frac{1}{n}}$ der gleiche ist, haben die den Wurzelwerten zugeordneten Vektoren die gleiche Länge. Aus dem Vektor des Hauptwertes ergeben sich die Vektoren der $n-1$ weiteren Wurzelwerte durch Drehen um einen Winkel von jeweils $2\pi/n$. Daraus folgt der

Satz

Die Endpunkte aller n Vektoren für $\sqrt[n]{z}$ liegen auf einem Kreis, dessen Radius $\sqrt[n]{z}$ ist und der von dem zum Argument φ/n gehörenden Punkt aus in n gleiche Teile geteilt ist.

Beispiel 2.10

$$\begin{aligned}(-1,2 + 0,5\mathrm{j})^5 &= 1,3^5\,(\cos 2,7468 + \mathrm{j}\sin 2,7468)^5\\ &= 3,7129\,(\cos 13,7340 + \mathrm{j}\sin 13,7340)\\ &= 3,7129\,(\cos 1,1676 + \mathrm{j}\sin 1,1676)\\ &= 3,7129\,(0,3923 + 0,9198\,\mathrm{j}) = 1,457 + 3,415\,\mathrm{j}\end{aligned}$$

Beispiel 2.11

Es sollen die dritten Wurzeln aus $3+4\,\mathrm{j}$ gezogen und in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt werden!

Lösung:

$$\begin{aligned}z = \sqrt[3]{3+4\,\mathrm{j}} &= \sqrt[3]{5\,(\cos\,(0,9273 + k\cdot 2\pi) + \mathrm{j}\sin\,(0,9273 + k\cdot 2\pi))}\\ &= \sqrt[3]{5\,(\cos\,(53,13^\circ + k\cdot 360^\circ) + \mathrm{j}\sin\,(53,13^\circ + k\cdot 360^\circ))}\\ &= \sqrt[3]{5\,(\cos\,(17,71^\circ + k\cdot 120^\circ) + \mathrm{j}\sin\,(17,71^\circ + k\cdot 120^\circ))}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k = 0: \quad z_0 &= 1,710(\cos 17,71^\circ + \mathrm{j}\sin 17,71^\circ) &&= 1,629 + 0,518\,\mathrm{j}\\ k = 1: \quad z_1 &= 1,710(\cos 137,71^\circ + \mathrm{j}\sin 137,71^\circ) &&= -1,265 + 1,151\,\mathrm{j}\\ k = 2: \quad z_2 &= 1,710(\cos 257,71^\circ + \mathrm{j}\sin 257,71^\circ) &&= -0,367 - 1,671\,\mathrm{j}\end{aligned}$$

Die Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene zeigt Bild 2.7.

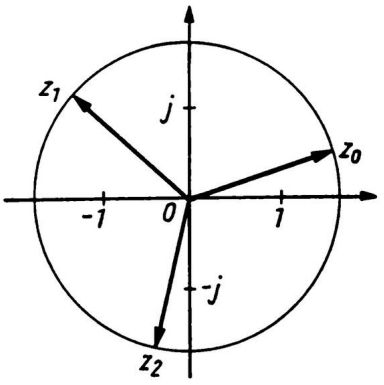


Bild 2.7

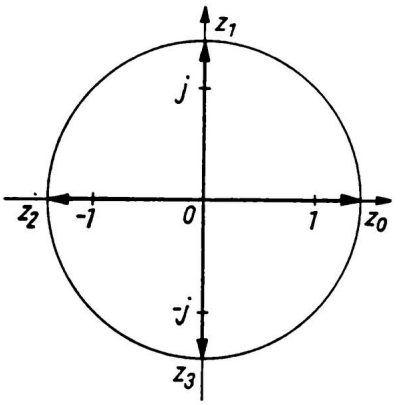


Bild 2.8

Beispiel 2.12

Die vierten Wurzeln aus 4 sollen berechnet und in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt werden!

Lösung:

Die Berechnung könnte analog Beispiel 2.11 erfolgen. Auf kürzerem Wege kommt man zum Ziel, wenn man den Hauptwert $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2} = 1,414$ verwendet. Die weiteren drei Wurzelwerte ergeben sich durch dreimaliges Multiplizieren mit j, was – wie oben ausgeführt – eine Drehung des zugehörigen Vektors um jeweils $\pi/2 = 90°$ bedeutet.

$z_0 = 1,414\,;\ z_1 = 1,414\,\mathrm{j}\,;\ z_2 = 1,414\,\mathrm{j}^2 = -1,414\,;\ z_3 = -1,414\,\mathrm{j}$

Die Vektoren der vier Wurzelwerte sind in Bild 2.8 dargestellt.

Das Logarithmieren von komplexen Zahlen kann in der Exponentialform erfolgen (s. Abschn. 2.4).

2.3.4 Binomische Gleichungen

Das Radizieren komplexer Zahlen in der goniometrischen Form ermöglicht das Lösen der für die Algebra wichtigen binomischen Gleichungen

$$x^n = c \qquad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \ \text{und} \ c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Da sich die Lösungsmenge durch Radizieren beider Seiten der Gleichung mit n ergibt, gilt nach den Erkenntnissen von Abschn. 2.3.3 der

Satz

Eine binomische Gleichung n-ten Grades besitzt genau n verschiedene Lösungen.

Von besonderem Interesse sind binomische Gleichungen mit reellem c. Dann ist in der goniometrischen Form der komplexen Zahl $r = c$ und $\varphi = 0$. Man erhält

$$x = \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + \mathrm{j}\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right) \quad \text{mit} \ k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Die Lösungen der Gleichung $x^n = c \quad (c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\})$ unterscheiden sich gegenüber dem Fall $c = 1$ nur um den Faktor $\sqrt[n]{r}$. Nur dieser Fall soll deshalb weiter untersucht werden.

Aus $x^n = 1$

folgt $x = \sqrt[n]{1} = \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + \mathrm{j}\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$

Die n verschiedenen Werte von $\sqrt[n]{1}$ heißen **die n-ten Einheitswurzeln.**
Sie können wegen $r = 1$ als Punkte des Einheitskreises dargestellt werden, die diesen vom Punkt $+1$ der reellen Achse aus in n gleiche Teile teilen. Die Argumentunterschiede sind jeweils $\frac{2\pi}{n} = \frac{360°}{n}$.
Die Gleichungen $x^n = 1$ werden deshalb auch als **Kreisteilungsgleichungen** bezeichnet.

Beispiel 2.13

Die binomischen Gleichungen a) $x^3 = 1$, b) $x^5 = 20$ sind zu lösen.

a) *Lösung* (Bild 2.9):

$x^3 = 1 = \cos 0 + \mathrm{j}\sin 0$

$x = \sqrt[3]{1} = \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{j}\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = \cos k \cdot 120° + \mathrm{j}\sin k \cdot 120° \quad k \in \{0, 1, 2\}$

$x_0 = \cos 0 + \mathrm{j}\sin 0 = 1$

$x_1 = \cos 120° + \mathrm{j}\sin 120° = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j} = -0,5 + 0,866\,\mathrm{j}$

$x_2 = \cos 240° + \mathrm{j}\sin 240° = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{j} = -0,5 - 0,866\,\mathrm{j}$

b) *Lösung* (Bild 2.10):

$x^5 = 20 = 20\,(\cos 0 + \mathrm{j}\sin 0)$

$x = \sqrt[5]{20}\left(\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{5}\right) + \mathrm{j}\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{5}\right)\right) = 1,8206\,(\cos k \cdot 72° + \mathrm{j}\sin k \cdot 72°)$

$k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

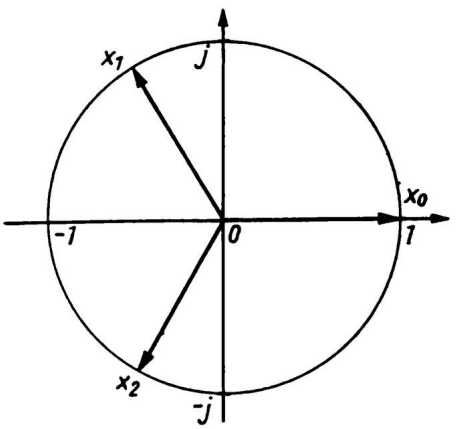


Bild 2.9

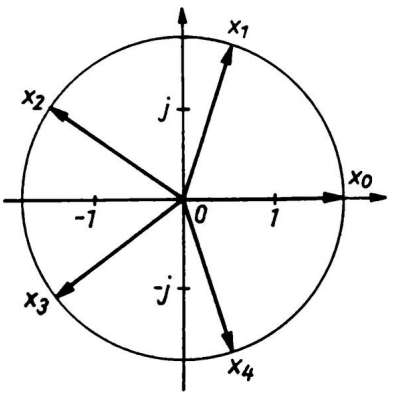


Bild 2.10

$$x_0 = 1,8206\,(\cos 0 + \mathrm{j}\sin 0) = 1,8206$$
$$x_1 = 1,8206\,(\cos 72^\circ + \mathrm{j}\sin 72^\circ) = 0,563 + 1,731\,\mathrm{j}$$
$$x_2 = 1,8206\,(\cos 144^\circ + \mathrm{j}\sin 144^\circ) = -1,473 + 1,070\,\mathrm{j}$$
$$x_3 = 1,8206\,(\cos 216^\circ + \mathrm{j}\sin 216^\circ) = -1,473 - 1,070\,\mathrm{j}$$
$$x_4 = 1,8206\,(\cos 288^\circ + \mathrm{j}\sin 288^\circ) = 0,563 - 1,731\,\mathrm{j}$$

Aufgaben 2.9 bis 2.15

2.4 Exponentialform komplexer Zahlen

2.4.1 Exponentialform

Beim Multiplizieren komplexer Zahlen in der goniometrischen Form werden die Argumente addiert, beim Dividieren subtrahiert, beim Potenzieren multipliziert und beim Radizieren dividiert. Die Argumente haben demnach logarithmischen Charakter.
Dies wurde von EULER in der nach ihm benannten Formel dargestellt, deren Richtigkeit erst im Kapitel Potenzreihen bewiesen werden kann.

Eulersche Formel

$$\boxed{\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}} \tag{2.13}$$

Wegen der Periodizität von Cosinus- und Sinusfunktion gilt auch hier

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi + k\cdot 2\pi)} \quad k \in \mathbb{Z}} \tag{2.14}$$

d.h., die Exponentialfunktion mit imaginärem Exponenten hat die Periode 2π.
Gemäß Gleichung (2.5) ergibt sich damit der

Satz

Jede komplexe Zahl z läßt sich in der **Exponentialform**

$$z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

darstellen. r ist der **Betrag** der komplexen Zahl, $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ der **Winkelfaktor**.

Beispiel 2.14

Die komplexen Zahlen $z_1 = 1 + \mathrm{j}$ und $z_2 = \overline{z}_1 = 1 - \mathrm{j}$ sollen in der Exponentialform dargestellt werden.

$$r_1 = \sqrt{2},\quad \varphi_1 = \frac{\pi}{4},\quad z_1 = 1 + \mathrm{j} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$$

$$r_2 = \sqrt{2},\quad \varphi_2 = \frac{7}{4}\pi,\quad z_2 = 1 - \mathrm{j} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{7}{4}\pi}$$

Beispiel 2.15

Wie lautet die arithmetische Form der komplexen Zahlen

$z_1 = e^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\pi j}$ und $z_2 = e^{0,5+0,7854\,j}$?

$$z_1 = e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{3}{2}\pi j} = \frac{1}{\sqrt{e}}\left(\cos\frac{3}{2}\pi + j\sin\frac{3}{2}\pi\right) = 0,6065\,(0 - j) = -0,607\,j$$

$$z_2 = \sqrt{e}\,(\cos 0,7854 + j\sin 0,7854) = 1,6487\,(0,707 + 0,707\,j) = 1,166 + 1,166\,j$$

Beispiel 2.16

Die komplexe Zahl $z = 16\left(\cos\frac{\pi}{3} - j\sin\frac{\pi}{3}\right)$ soll in die Exponentialform umgewandelt werden.
z liegt nicht in der goniometrischen Form vor, da vor dem Imaginärteil das Minuszeichen steht. Die Umformung ergibt

$$z = 16\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,j\right) = 8 - 8\sqrt{3}\,j = 16\left(\cos\frac{11\pi}{6} + j\sin\frac{11\pi}{6}\right) = 16\,e^{j\frac{11\pi}{6}}$$

2.4.2 Multiplikation und Division

Aus den Gleichungen (2.7), (2.9) und (2.13) folgt

$$\boxed{\textbf{Produkt}\quad z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{j\varphi_2} = r_1 r_2\, e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}} \tag{2.15}$$

$$\boxed{\textbf{Quotient}\quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\, e^{j\varphi_1}}{r_2\, e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}} \tag{2.16}$$

Beispiel 2.17

Die komplexen Zahlen z_1 und z_2 des Beispiels 2.15 sollen miteinander multipliziert und das Produkt in der arithmetischen Form dargestellt werden.

Lösung:

$$z = z_1 \cdot z_2 = e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{0,5} \cdot e^{j\cdot\frac{3}{2}\pi} \cdot e^{j\cdot 0,7854} = e^0 \cdot e^{j\cdot 5,4978}$$
$$= 1 \cdot (\cos 315^\circ + j\sin 315^\circ) = 0,707 - 0,707\,j$$

Das Produkt ergibt einen Vektor vom Betrag 1 und dem Argument 315°.

Beispiel 2.18

Mittels der Exponentialform soll $z = \dfrac{(5 + 12\,j)\,j}{1,2 - 0,9\,j}$ berechnet werden.

Lösung:

$$z = \frac{13 \cdot e^{j\cdot 1,1760} \cdot 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}}{1,5 \cdot e^{-j\cdot 0,6435}} = 8,667\,e^{j\cdot 3,390}$$

Es ist hier nicht zweckmäßig, zum Argument des Nenners 2π zu addieren, da dieses bei der Division sowieso subtrahiert werden muß.

2.4.3 Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren

Durch Einsetzen der Eulerschen Formel (2.13) in Gleichung (2.11) und (2.12) folgt für das

$$\boxed{\textbf{Potenzieren} \quad z^n = \left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\right)^n = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi} \qquad n \in \mathbb{Z}} \tag{2.17}$$

$$\boxed{\textbf{Radizieren} \quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}} = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} \quad n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}} \tag{2.18}$$

Die imaginäre Einheit j ergibt sich in der Exponentialform (als komplexe Zahl mit $r = 1$ und $\varphi = \pi/2$) zu

$$\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}.$$

Analog ist

$$\mathrm{j}^2 = -1 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}, \quad \mathrm{j}^3 = -\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{3\pi}{2}}, \quad \mathrm{j}^4 = +1 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi} = \mathrm{e}^0.$$

Für die höheren Potenzen von j gelten die Ausführungen von Abschn. 2.1.

Beispiel 2.19

Für die komplexen Zahlen $z_1 = 1 + \mathrm{j}$ und $z_2 = 1 - \mathrm{j}$ sollen

a) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3$ b) $\sqrt[3]{z_1\,z_2}$

in der Exponentialform berechnet werden.

Lösung:

$z_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{7\pi}{4}}$ (vgl. Beisp. 2.15)

a) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{7\pi}{4}}}\right)^3 = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{3\pi}{4}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{21\pi}{4}}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{3\pi}{4}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{j}$

b) $\sqrt[3]{z_1\,z_2} = \sqrt[3]{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{7\pi}{4}}} = \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi}} = 1{,}260$

Logarithmieren

Da die komplexen Zahlen in der Exponentialform als Produkt von Betrag und Winkelfaktor dargestellt werden, ergibt sich für $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ $(z \neq 0)$

$$\boxed{\ln z = \ln\left(r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\right) = \ln r + \mathrm{j}\,(\varphi + k \cdot 2\pi) \qquad k \in \mathbb{Z}} \tag{2.19}$$

Satz

Der (natürliche) Logarithmus einer komplexen Zahl ist eine komplexe Zahl mit dem (natürlichen) Logarithmus des Betrages als Realteil und dem periodischen Imaginärteil $\varphi + k \cdot 2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Beispiel 2.20

Es soll der Logarithmus von a) $z_1 = -3$, b) $z_2 = \mathrm{j}$ berechnet werden.

Lösung

a) $z_1 = -3 + 0 \cdot \mathrm{j} = 3 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi + k \cdot 2\pi)}$. Für $k = 0$ ergibt sich
$\ln z_1 = \ln(-3) = \ln 3 + \mathrm{j}\pi = 1,099 + 3,142\,\mathrm{j}$

b) $z_2 = \mathrm{j} = 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi)}$. Für $k = 0$ wird
$\ln z_2 = \ln \mathrm{j} = \mathrm{j} \cdot \frac{\pi}{2} = 1,571\,\mathrm{j}$

Wie aus Beispiel 2.20 folgt, ist mit dem Logarithmus komplexer Zahlen z ($z \neq 0$) auch der Logarithmus einer negativen Zahl definiert.

Aufgaben 2.16 bis 2.20

2.5 Komplexe Funktionen einer reellen Variablen, Ortskurven

2.5.1 Komplexe Funktionen einer reellen Variablen

In der Technik, inbesondere der Elektro-, Nachrichten- und Regelungstechnik, werden viele Probleme mit Hilfe der komplexen Rechnung gelöst. Dabei treten u.a. Funktionen auf, in denen der Definitionsbereich eine Menge *komplexer* Zahlen mit einer *reellen* Variablen p umfaßt, denen eindeutig eine Menge *komplexer Funktionswerte* zugeordnet ist: $p \longmapsto z$.

Definition

Sind in $z = x + y\,\mathrm{j}$ x und y Funktionen einer reellen Variablen p,
d.h. $x = a(p)$ und $y = b(p)$, so heißt

$$z(p) = a(p) + b(p) \cdot \mathrm{j}$$

eine **komplexwertige** (oder kurz: *komplexe*) **Funktion der reellen Variablen** p.

Den drei Darstellungsformen komplexer Zahlen entsprechend kann die komplexe Funktion $z(p)$ auch

$$z(p) = r(p)\,(\cos\varphi(p) + \mathrm{j}\sin\varphi(p)) \qquad \text{oder}$$

$$z(p) = r(p)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(p)}$$

geschrieben werden, wobei ebenso wie Realteil $a(p)$ und Imaginärteil $b(p)$ auch Betrag (Modul) $r(p)$ und Argument (Winkel) $\varphi(p)$ reelle Funktionen von p sind.
Die komplexe Funktion kann auch ein analytischer Ausdruck folgender Form sein:

$$z(p) = a + b \cdot p \qquad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{C} \tag{I}$$

$$z(p) = \frac{1}{a + b \cdot p} \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{C} \tag{II}$$

$$z(p) = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_n p^n \quad \text{mit } a_i \in \mathbb{C} \tag{III}$$

$$z(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots + b_m p^m} \quad \text{mit } a_i, b_i \in \mathbb{C} \tag{IV}$$

Wie man erkennt, stellt die komplexe Funktion (I) einen Spezialfall von (III), die komplexe Funktion (II) einen Spezialfall von (IV) dar.

Eine komplexe Funktion einer reellen Variablen kann in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt werden. Jedem Wert p_i von p entspricht ein Punkt bzw. ein Vektor $z(p_i)$. Die Menge aller Punkte $z(p)$ ergibt den Graphen der komplexen Funktion, der als ihre **Ortskurve** bezeichnet wird. Die Werte p_i der reellen Variablen können als Skala an die Ortskurve geschrieben werden.

Beispiel 2.21

Es soll die Ortskurve der komplexen Funktion $z(p) = p \cdot e^{j\frac{\pi}{6}}$ $(p \in \mathbb{R})$ gezeichnet werden.

Lösung:

Es ist $r(p) = p$, $\varphi(p) = \frac{\pi}{6}$.

Die Richtung der Ortskurve ist konstant gleich $\pi/6$, der Betrag $r(p)$ des Vektors $z(p)$ ändert sich linear mit p. Die Ortskurve ist eine Gerade durch den Ursprung, der Punkt für $p = 0$ liegt im Ursprung (Bild 2.11).

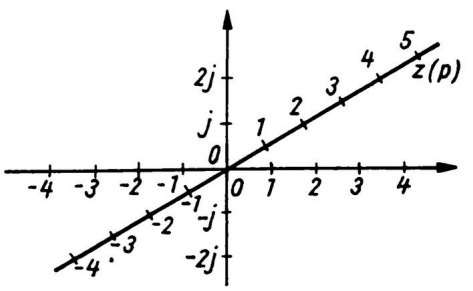


Bild 2.11

Die Funktion kann auch in der arithmetischen Form dargestellt werden:

$$z(p) = p \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} = p\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right) = 0,866p + 0,5p \cdot j$$

Aus dem Beispiel 2.21 folgt, daß die Ortskurve einer Funktion

$$z(p) = p \cdot e^{j\varphi}$$

eine *Ursprungsgerade* mit dem Anstiegswinkel φ ist.

Für eine *durch einen beliebigen Punkt z_1 gehende Gerade* mit dem Anstiegswinkel φ (Bild 2.12a) als Ortskurve lautet die Funktionsgleichung

$$z(p) = z_1 + p \cdot e^{j\varphi}.$$

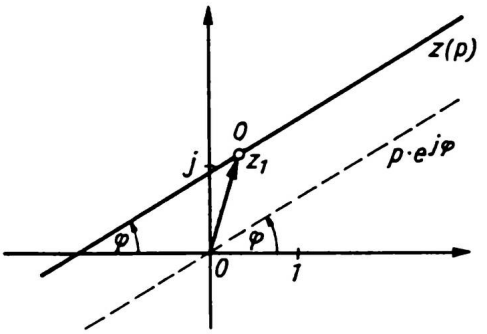


Bild 2.12a

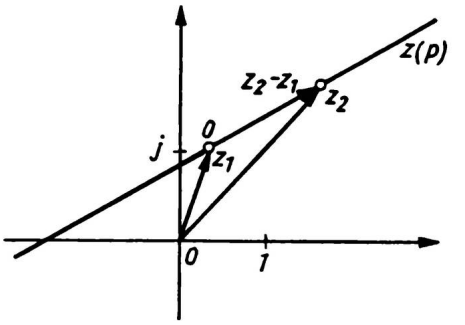


Bild 2.12b

Soll die *Gerade durch zwei Punkte* z_1 und z_2 hindurchgehen (Bild 2.12b), ergibt sich als Funktionsgleichung

$$z(p) = z_1 + p\,(z_2 - z_1).$$

In beiden Fällen trägt der Punkt z_1 den Skalenwert 0 der Variablen p.

Beispiel 2.22

Es soll die Ortskurve der komplexen Funktion

$z(p) = z_1 + p \cdot z_2$ für $z_1 = -1 + 2\,\mathrm{j}$, $z_2 = -2 - \mathrm{j}$

gezeichnet und für $-3 \leq p \leq 2$ mit Skalenwerten versehen werden.

Lösung:

Die Spitze des Vektors z_1 liefert den Punkt der Ortskurve für $p = 0$. Diese ist – da p nur linear auftritt – eine Parallele zu z_2 durch diesen Punkt, d.h. eine nicht durch den Ursprung gehende Gerade. Durch Einsetzen der Werte von p in

$z(p) = (-1 - 2p) + (2 - p)\,\mathrm{j}$

ergibt sich die Skala (Bild 2.13).

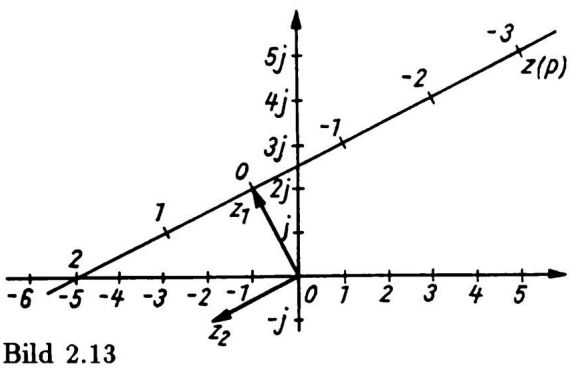


Bild 2.13

Ist in der komplexen Funktion

$$z(p) = r(p) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(p)}$$

$r(p) = r = \text{const.}$ und $\varphi(p) = p \qquad (0 \leq p \leq 2\pi)$,

so lautet die Funktionsgleichung

$$z(p) = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}p} \qquad \text{(V)}$$

Die Vektoren $z(p)$ haben den konstanten Betrag r, d.h. gleichbleibende Länge. Das Argument φ (der Richtungswinkel) ändert sich linear mit p. Somit liegen die Spitzen der Vektoren $z(p_i)$ auf einem **Kreis um den Ursprung** mit dem Radius r, der die Ortskurve der Funktion $z(p)$ ist. Bild 2.14 zeigt die Ortskurve für $r = 2$ und die ganzzahligen Zahlenwerte im vorgegebenen Bereich von p.

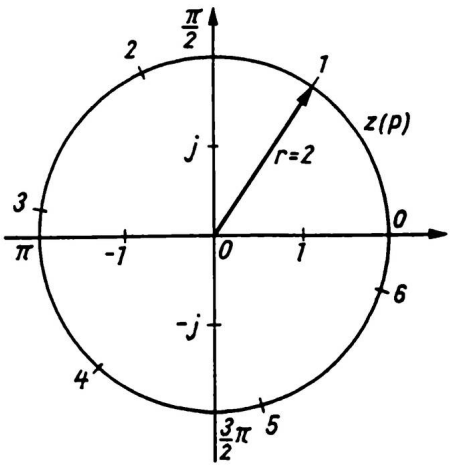


Bild 2.14

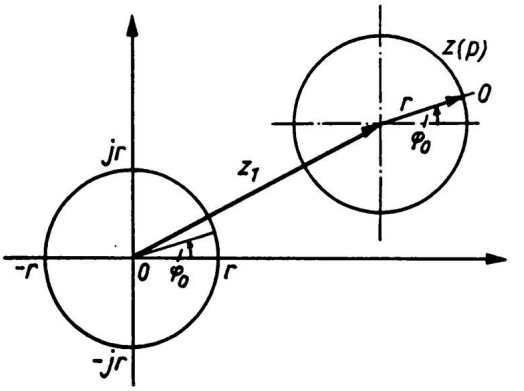


Bild 2.15

Bei dem Kreis um den Ursprung als Ortskurve der komplexen Funktion (V) liegt der Skalenwert $p = 0$ auf der positiven reellen Achse. Eine Multiplikation der rechten Seite von Gleichung (V) mit $e^{j\varphi_0}$ ergibt die Funktion

$$z(p) = r \cdot e^{jp} \cdot e^{j\varphi_0} = r \cdot e^{j(p+\varphi_0)} \qquad \text{(VI)}$$

Dieser entspricht wieder ein Kreis um den Ursprung mit dem Radius r, nur ergibt sich jetzt der dem Skalenwert $p = 0$ zugeordnete Punkt als Spitze des Vektors $r \cdot e^{j\varphi_0}$. Das bedeutet eine zentrische Drehung des Kreises (V) um φ_0 im Gegenuhrzeigersinn.

Addiert man auf der rechten Seite von Gleichung (VI) noch eine komplexe Größe z_1, so wird jeder Punkt des Kreises (VI) um den Vektor z_1 verschoben. Die Gleichung der komplexen Funktion, deren Ortskurve ein Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt im Punkt z_1 ist, lautet somit

$$z(p) = z_1 + r\, e^{j(p+\varphi_0)}$$

φ_0 bestimmt wiederum den Anfangswert der Skala für $p = 0$ (Bild 2.15).

2.5.2 Ortskurven und ihre Inversion

Wie bereits erwähnt, finden in verschiedenen Gebieten der Technik komplexe Funktionen Anwendung, z.B. in der Elektrotechnik bei der Beschreibung des Verhaltens komplexer Widerstände oder Leitwerte passiver linearer Zweipole. Für Reihen- und Parallelschaltungen von ohmschen (reellen) Widerständen, induktiven Blindwiderständen $j\omega L$ und kapazitiven Blindwiderständen $-\frac{j}{\omega C}$ ergeben sich komplexe Funktionen der reellen Variablen $\omega = 2\pi f$ (f ist die Frequenz, ω die sogenannte

Kreisfrequenz von Strom bzw. Spannung). Deren Ortskurven sind in den meisten Fällen Geraden und Kreise oder – wegen des eingeschränkten Definitionsbereiches – Teile davon. Diese sollen im folgenden vorzugsweise betrachtet werden.

Aus den Darlegungen des vorausgegangenen Abschnittes folgt der

Satz

Die Ortskurve einer linearen komplexen Funktion

$$z(p) = z_1 + z_2 p \qquad (z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ z_2 \neq 0,\ p \in \mathbb{R}) \tag{I}$$

ist eine Gerade mit linearer Skala für p.

Tritt p in der Funktionsgleichung (I) nicht linear auf, allgemein als eine reelle Funktion $f(p)$, so ist die Ortskurve weiterhin eine Gerade, deren Skala aber nicht linear ist, wenn $f(p)$ nicht linear ist.

Beispiel 2.23

Die Ortskurve der Funktion

$z(p) = z_1 + \dfrac{z_2}{p}$ mit $z_1 = -2 + \mathrm{j}$, $z_2 = -2 - \mathrm{j}$

soll gezeichnet werden.

Lösung:

Als Ortskurve ergibt sich eine Gerade durch die Spitze des Vektors z_1 parallel zum Vektor z_2. Dem Skalenwert $p = 0$ ist kein Punkt der Geraden im Endlichen zugeordnet. Für p gegen ∞ geht $z(p)$ gegen z_1 , d.h., der Spitze des Vektors z_1 ist der uneigentliche Wert ∞ zugeordnet. Wie Bild 2.16 zeigt, ist die Skala für p nicht linear.

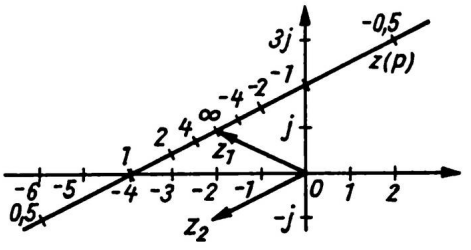


Bild 2.16

In der Elektrotechnik erhält man z.B. den komplexen Leitwert einer Schaltung als Kehrwert des komplexen Widerstandes dieser Schaltung und umgekehrt: $\boldsymbol{G = \dfrac{1}{R}}$.

Für diese und analoge Fälle gilt allgemein die

Definition

Zwei komplexe Funktionen einer reellen Variablen p

$$z(p) \quad \text{und} \quad z^*(p) = \frac{1}{z(p)}$$

heißen zueinander **invers**.
Die Ortskurve von $z^*(p)$ ergibt sich durch **Inversion** der Ortskurve von $z(p)$ und umgekehrt.

Der einem bestimmten Wert p_i der Variablen p zugeordnete Funktionswert ist eine komplexe Zahl, die in der Exponentialform

$$z(p_i) = r_i \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}$$

dargestellt werden kann. Der entsprechende Wert der inversen Funktion ist

$$z^*(p_i) = \frac{1}{z(p_i)} = \frac{1}{r_i} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_i} = r_i^* \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_i}$$

Der Vektor $z^*(p_i)$ ergibt sich somit aus dem Vektor $z(p_i)$

1. durch Spiegelung des Vektors $z(p_i)$ an der reellen Achse (Winkel φ_i und $-\varphi_i$)
2. mit dem Betrag (Länge des Vektors)
$$|z^*(p_i)| = r_i^* = \frac{1}{r_i} = \frac{1}{|z(p_i)|}$$

Für die Inversion einer durch den Ursprung gehenden Geraden bringt man deren Gleichung auf die Form

$$z(p) = z_1 \cdot p = p \cdot r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \qquad z_1 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\,, \quad p, r, \varphi \in \mathbb{R}$$

Durch Inversion ergibt sich

$$z^*(p) = \frac{1}{z_1 \cdot p} = \frac{1}{p \cdot r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}} = \frac{1}{p} r^* \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} \qquad r^* = \frac{1}{r} \tag{II}$$

Die inverse Ortskurve ist also wieder eine Ursprungsgerade. Durch das Argument $-\varphi$ ist ihre Richtung gleich der des konjugiert komplexen Vektors $\overline{z}_1$, d.h., die Ortskurven $z(p)$ und $z^*(p)$ liegen symmetrisch zur reellen Achse. Da die (reelle) Variable p jetzt im Nenner steht, verläuft ihre Skala reziprok. Es folgt der

1. Inversionssatz

Eine durch den Ursprung gehende Gerade ergibt durch Inversion wieder eine Gerade durch den Ursprung.

Es soll nun die Inversion einer nicht durch den Ursprung gehenden Geraden durchgeführt werden. Für diese Gerade gilt

$$z(p) = z_1 + z_2 p \quad \text{mit} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,, \quad z_1 \neq 0\,, \quad z_2 \neq \lambda z_1\,, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Die inverse Funktion lautet

$$z^*(p) = \frac{1}{z_1 + z_2 p} \tag{III}$$

Setzt man hierin

$z_1 = a_1 + b_1 \mathrm{j}$, $z_2 = a_2 + b_2 \mathrm{j}$ und $z^*(p) = x + y\mathrm{j}$

und trennt nach Erweitern der rechten Seite von Gleichung (III) mit der konjugiert komplexen Größe $(a_1 + a_2 p) - (b_1 + b_2 p)\mathrm{j}$ in Real- und Imaginärteil auf, so ergibt sich

$$x = f(a_1, a_2, b_1, b_2, p) \quad \text{und} \quad y = g(a_1, a_2, b_1, b_2, p)\,.$$

Nach Eliminieren von p (auf die umfangreiche Zwischenrechnung soll hier verzichtet werden) ergibt sich eine Gleichung in der Form

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey = 0 \tag{IV}$$

worin A, D und E aus a_1, a_2, b_1 und b_2 sich ergebende Terme darstellen. Gleichung (IV) ist wegen der Gleichheit der Koeffizienten von x^2 und y^2 die Gleichung eines Kreises, der durch den Ursprung geht, denn sie wird durch $x = 0$, $y = 0$ erfüllt.

2. Inversionssatz

Eine nicht durch den Ursprung gehende Gerade ergibt durch Inversion einen Kreis durch den Ursprung.

Wegen $z(p) = \dfrac{1}{z^*(p)}$ gilt auch die Umkehrung:

Ein durch den Ursprung gehender Kreis ergibt durch Inversion eine nicht durch den Ursprung gehende Gerade.

Einen Kreis in beliebiger Lage erhält man, indem man den durch den Ursprung gehenden Kreis mit der Funktionsgleichung (III) durch die Addition eines Vektors $z_0 \in \mathbb{C}$ verschiebt. Man erhält für den Kreis in beliebiger Lage die Gleichung

$$z(p) = z_0 + \frac{1}{z_1 + z_2 p} = \frac{z_0 z_1 + 1 + z_0 z_2 p}{z_1 + z_2 p}$$

Setzt man $z_0 z_1 + 1 = z_3$ und $z_0 z_2 = z_4$, so folgt

$$z(p) = \frac{z_3 + z_4 p}{z_1 + z_2 p} \qquad \text{mit } z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \tag{V}$$

Die Gleichung der inversen Ortskurve ist

$$z^*(p) = \frac{z_1 + z_2 p}{z_3 + z_4 p}$$

d.h. derselbe Gleichungs- und somit auch Ortskurventyp. Es gilt der

3. Inversionssatz

Ein nicht durch den Ursprung gehender Kreis ergibt durch Inversion wieder einen nicht durch den Ursprung gehenden Kreis.

Die Konstruktion der inversen Ortskurven für die in den drei Inversionssätzen enthaltenen Fälle wird in den folgenden Beispielen gezeigt.

Beispiel 2.24

Für die Funktion des Beispiels 2.21 (Bild 2.11)

$$z(p) = p\,e^{j\frac{\pi}{6}} = p(0,866 + 0,5\,j)$$

soll die inverse Ortskurve gezeichnet werden.

Lösung:

Die inverse Funktion

$$z^*(p) = \frac{1}{p}\,e^{-j\frac{\pi}{6}} = \frac{0,866}{p} - \frac{0,5}{p}\,j$$

liefert als Ortskurve eine Ursprungsgerade mit dem Anstiegswinkel $-\frac{\pi}{6}$. Die Skala für p verläuft reziprok. Im Ursprung hat die Ortskurve $z(p)$ den Skalenwert $p = 0$, die Ortskurve $z^*(p)$ den uneigentlichen Wert $p = \infty$ (Bild 2.17).

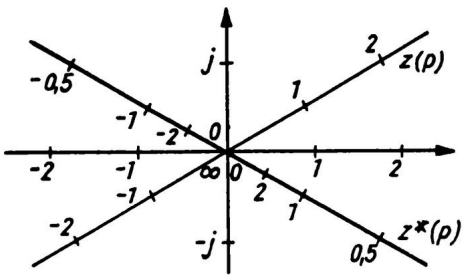


Bild 2.17

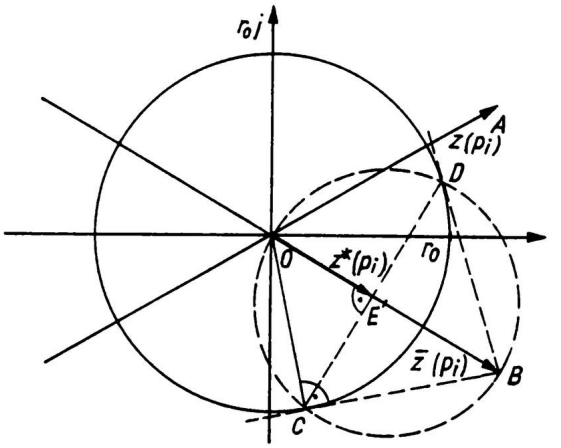


Bild 2.18

Rein konstruktiv, d.h. ohne Berechnung der Werte $z^*(p)$ in Abhängigkeit von p, kann die Inversion einer Ortskurve mittels des **Inversionskreises** erfolgen. Dieser ist ein Kreis um den Ursprung und hat den Radius $r_0 = 1$, wenn für die Ortskurven von $z(p)$ und $z^*(p)$ der gleiche Maßstab verwendet werden soll. Insbesondere bei der Darstellung und Inversion von Ortskurven, die einen technischen Sachverhalt widerspiegeln, ist es oft zweckmäßig, $r_0 \neq 1$ zu wählen. Beide Achsen müssen dann für $z(p)$ und $z^*(p)$ unterschiedlich geteilt werden. Handelt es sich um Größen der Technik, so ist durch deren an die Achsen geschriebenen unterschiedlichen Maßeinheiten zu erkennen, welche Skala zu $z(p)$ und welche zu $z^*(p)$ gehört.

Für einen Punkt $z(p_i)$ einer Ortskurve $z(p)$ ist die Inversion in Bild 2.18 dargestellt. Nach Wahl eines geeigneten Wertes für den Radius r_0 wird der Inversionskreis mit r_0 geschlagen. Zum Vektor $z(p_i)$ mit der Spitze in A wird zunächst der konjugiert komplexe Vektor $\overline{z}(p_i)$ mit Spitze in B gezeichnet. Über $\overline{0B}$ als Durchmesser schlägt man den Thaleskreis (gestrichelt), seine Schnittpunkte mit dem Inversionskreis sind C und D. $\overline{BC}$ und $\overline{BD}$ sind die von B aus an den Kreis gelegten Tangenten. Die Verbindung von C und D schneidet den Vektor $\overline{z}(p_i)$ in E. E ist der Endpunkt (die Spitze) des gesuchten Vektors $z^*(p_i)$.

Beweis:

Es ist $\triangle 0CB \sim \triangle 0CE$

Für die beiden ähnlichen Dreiecke gilt die Proportion

$$\overline{0E} : r_0 = r_0 : \overline{0B}$$

Mit $\overline{0B} = |z'(p_i)| = |z(p_i)|$ und $\overline{0E} = |z^*(p_i)|$ folgt daraus

$$|z^*(p_i)| = \frac{r_0^2}{|z(p_i)|} \tag{VI}$$

Der Vektor $z^*(p_i)$ ist somit um den Faktor r_0^2 vergrößert (verkleinert) dargestellt. Allgemein erfordert die Inversion einer Ortskurve die Realisierung der beiden Schritte

1. Spiegelung an der reellen Achse,
2. Spiegelung am Inversionskreis.

Die Reihenfoge der beiden Schritte kann vertauscht werden.

Punkte einer Ortskurve, die auf dem Inversionskreis liegen, ergeben bei der Inversion wegen (VI) wieder Punkte auf dem Inversionskreis, aus Punkten außerhalb des Inversionskreises werden durch die Inversion Punkte innerhalb des Inversionskreises und umgekehrt.

Für die Punkte innerhalb des Inversionskreises muß die oben beschriebene Spiegelung am Inversionskreis in umgekehrter Reihenfolge durchgeführt werden. Die Punkte D und C sind die Schnittpunkte der Senkrechten zu $\overline{0B}$ in B (jetzt innerhalb des Kreises), Punkt E (jetzt außerhalb des Kreises) der Schnittpunkt der in C oder D an den Kreis gelegten Tangente mit der Verlängerung von $\overline{0B}$.

Beispiel 2.25

Die Ortskurve für $z(p) = (1 + 4p) + (3 - p)\,\mathrm{j}$ soll gezeichnet und daraus die Ortskurve der inversen Funktion $z^*(p)$ ermittelt werden. Als Maßstabsfaktor soll $|z^*(p)| = \dfrac{16}{|z(p)|}$ verwendet werden, d.h. $r_0 = 4$.

Lösung:

Schreibt man für $z(p)$

$z(p) = (1 + 3\,\mathrm{j}) + (4 - \mathrm{j})\,p$

so erkennt man wegen $z(p) = z_1 + z_2 p$, daß die Ortskurve eine nicht durch den Ursprung gehende Gerade ist. Deren Inversion liefert gemäß 1. Inversionssatz einen durch den Ursprung gehenden Kreis.

Mittels geeigneter Werte von p kann die Gerade $z(p)$ gezeichnet und mit Skalenwerten versehen werden (Bild 2.19).

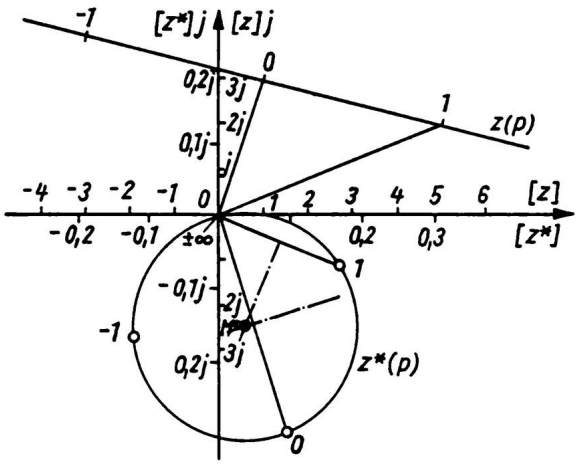


Bild 2.19

$$p_0 = 0 \quad z(p_0) = 1 + 3\,\mathrm{j} \quad |z(p_0)| = \sqrt{10} = 3,16 \quad |z^*(p_0)| = \frac{16}{3,16} = 5,06$$

$$p_1 = 1 \quad z(p_1) = 5 + 2\,\mathrm{j} \quad |z(p_1)| = \sqrt{29} = 5,39 \quad |z^*(p_1)| = \frac{16}{5,39} = 2,97$$

Aus den Vektoren $z(p_0)$ und $z(p_1)$ können durch Spiegelung an der reellen Achse die Richtungen der inversen Vektoren festgelegt und nach Abtragen der ermittelten Beträge die Vektoren $z^*(p_0)$ und $z^*(p_1)$ gezeichnet werden. Mit dem Ursprung und den Endpunkten dieser beiden Vektoren liegen drei Punkte des Kreises als Ortskurve der inversen Funktion fest. Durch Zeichnen von zwei Mittelsenkrechten zu Sehnen des Kreises, z.B. der Längen der Vektoren $z^*(p_0)$ und $z^*(p_1)$, erhält man den Mittelpunkt M des Kreises mit Radius $\overline{OM}$.

Beispiel 2.26

Die Ortskurven der Funktion $z(p) = \dfrac{z_1 + z_2 p}{z_3 + z_4 p}$
und der inversen Funktion $z^*(p)$ sind zu zeichnen.
$z_1 = 2$; $z_2 = 1 - \mathrm{j}$; $z_3 = 1 - 2\,\mathrm{j}$; $z_4 = 3\,\mathrm{j}$.

Lösung:

Die Ortskurve von $z(p)$ ist ein nicht durch den Ursprung gehender Kreis. Die Inversion liefert auch für $z^*(p)$ einen Kreis, der nicht durch den Ursprung geht. Da für die Konstruktion eines Kreises drei Punkte auf seiner Peripherie benötigt werden, wird $z(p)$ für $p = 0$, $p = 1$ und $p \to \infty$ berechnet.
Für die Ermittlung des dritten Wertes formt man $z(p)$ nach Einsetzen der Werte für z_1 bis z_4 um:

$$z(p) = \frac{2 + p - p\,\mathrm{j}}{1 - (2 - 3p)\,\mathrm{j}} = \frac{\dfrac{2}{p} + 1 - \mathrm{j}}{\dfrac{1}{p} - \left(\dfrac{2}{p} - 3\right)\mathrm{j}}$$

In dem erhaltenen Term gehen für $p \to \infty$ alle Glieder mit p im Nenner gegen null.

Man erhält für

$p_0 = 0$	$z(p_0) = 0,4 + 0,8\,\mathrm{j}$	$\lvert z(p_0)\rvert = 0,89$	$\lvert z^*(p_0)\rvert = 1,12$
$p_1 = 1$	$z(p_1) = 1 - 2\,\mathrm{j}$	$\lvert z(p_1)\rvert = 2,24$	$\lvert z^*(p_1)\rvert = 0,45$
$p_2 \to \infty$	$z(p_2) = -0,33 - 0,33\,\mathrm{j}$	$\lvert z(p_2)\rvert = 0,47$	$\lvert z^*(p_2)\rvert = 2,12$

Mittels der Endpunkte der drei Vektoren $z(p_0)$, $z(p_1)$ und $z(p_2)$ kann die Ortskurve (der Kreis) für $z(p)$ gezeichnet werden.
Der Kreismittelpunkt ergibt sich als Schnittpunkt von zwei Mittelsenkrechten (Bild 2.20).
Mittels Spiegelung der drei Vektoren $z(p_i)$ an der reellen Achse und der errechneten Beträge $z^*(p_i)$ erhält man drei Punkte der Ortskurve (des Kreises) für $z^*(p)$, aus denen der Kreis selbst konstruiert werden kann.

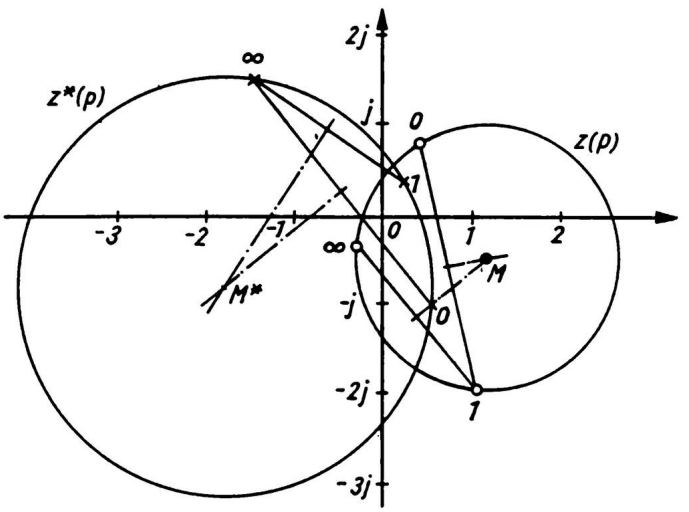


Bild 2.20

Die Teilung der Achsen war diesmal für beide Ortskurven die gleiche, d.h., es war $r_0^2 = 1$.

Wie man erkennt, war der im Beispiel 2.26 eingeschlagene Weg einfacher, als bei der Inversion jeden Punkt einzeln durch Konstruktion zu ermitteln. Der konstruktive Weg muß gegangen werden, wenn die Ortskurve für $z(p)$ empirisch ermittelt wurde und nur als Graph – ohne Funktionsgleichung – vorliegt.

Aufgaben 2.21 bis 2.30

2.6 Aufgaben

2.1 a) $\sqrt{-9}+\sqrt{-x^2}-\sqrt{-y^2}+\sqrt{-25}$ b) $\mathrm{j}\sqrt{-25}\sqrt{-\frac{2}{9}}\sqrt[3]{-27}$

2.2 a) $\sqrt{-a^2}\sqrt{-b^2}$ b) $\frac{1}{\mathrm{j}}\sqrt{-x}\sqrt{-xy^2}\quad (x>0)$

2.3 a) $\frac{3\mathrm{j}^3\cdot 5\mathrm{j}^4}{6\mathrm{j}^{20}}$ b) $\frac{1}{\mathrm{j}^5}+\frac{1}{\mathrm{j}^7}$

2.4 a) $(1+2\mathrm{j})-(-2+3\mathrm{j})+(-3+\mathrm{j})-(5+4\mathrm{j})-(-1+9\mathrm{j})+(5-8\mathrm{j})$

b) $(-2a+3\mathrm{j})-(u-u\mathrm{j})+(-2a-3\mathrm{j})-(-u-v\mathrm{j})$

2.5 a) $(5-2\mathrm{j})(-3+\mathrm{j})$ b) $\left(3\sqrt{2}+5\sqrt{3}\mathrm{j}\right)\left(3\sqrt{2}-5\sqrt{3}\mathrm{j}\right)$

2.6 a) $\frac{3+4\mathrm{j}}{2+\mathrm{j}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{5}-\mathrm{j}}$ c) $\frac{3\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}}$

2.7 a) $\frac{1+\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}}+\frac{1-\mathrm{j}}{1+\mathrm{j}}$ b) $\frac{1-\mathrm{j}}{1+\mathrm{j}}-\frac{1+\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}}$

2.8 Für die Vektoren $z_1=1+2\mathrm{j}$ und $z_2=3-\mathrm{j}$ sind die Vektoren z_1+z_2 und z_1-z_2 zu ermitteln.

2.9 Die folgenden komplexen Zahlen sind in der goniometrischen Form darzustellen:

a) $6+8\mathrm{j}$ b) $-5+12\mathrm{j}$ c) $-1-\mathrm{j}$ d) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{j}$

2.10 Die folgenden komplexen Zahlen sind in der arithmetischen Form darzustellen:

a) $2(\cos 150^\circ+\mathrm{j}\sin 150^\circ)$ b) $9(\cos 330^\circ+\mathrm{j}\sin 330^\circ)$

c) $\frac{1}{2}(\cos 4,189+\mathrm{j}\sin 4,189)$ d) $6(\cos 13,090+\mathrm{j}\sin 13,090)$

2.11 $z_1=0,75+\mathrm{j}$ und $z_2=1,25-\mathrm{j}$ sind in die goniometrische Form umzuwandeln und $z_1\cdot z_2$ sowie $z_1:z_2$ zu ermitteln. Das Ergebnis ist zusätzlich in der arithmetischen Form darzustellen.

2.12 Es ist $(\cos\varphi+\mathrm{j}\sin\varphi)^{-n}=\cos n\varphi-\mathrm{j}\sin n\varphi$ für $n\in\mathbb{N}^*$ und damit die Gültigkeit des Satzes von MOIVRE für negative ganzzahlige Exponenten zu beweisen!

2.13 Mittels der goniometrischen Form sind zu berechnen

a) $(3+2\mathrm{j})^6$ b $\left(3+\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^4$ c) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^6$

2.14 Mittels der goniometrischen Form sind zu ermitteln

a) $\sqrt[3]{\mathrm{j}}$ b) $\sqrt{-5+12\mathrm{j}}$ c) $\sqrt[4]{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{j}}$

2.15 Die folgenden binomischen Gleichungen sind zu lösen:

a) $x^4=-36$ b) $x^5=-32$ c) $x^3=7$

2.16 Die folgenden komplexen Zahlen sind in der Exponentialform darzustellen:

a) $0,5-\sqrt{6}\mathrm{j}$ b) $\sqrt{3}+\sqrt{3}\mathrm{j}$ c) $3-2\mathrm{j}$

2.17 Die folgenden komplexen Zahlen sollen in die goniometrische und arithmetische Form überführt werden:

a) $83\,e^{j\cdot 1{,}1083}$ b) $3{,}8\,e^{-j\cdot 5{,}524}$ c) $e^{0{,}2+1{,}2\,j}$

2.18 Nach Umwandlung in die Exponentialform sind zu berechnen

a) $(1+3\,j)^6$ b) $\sqrt[3]{3-\sqrt{3}\,j}$

2.19 Für $z_1 = 1{,}5 - 0{,}5\,j$ und $z_2 = 3 + 0{,}5\,j$ sind mittels der Exponentialform zu berechnen und in der arithmetischen Form anzugeben:

a) $z = \dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2}$ b) $x = \sqrt[3]{\dfrac{z_2}{z_1}}$

2.20 Für $z_1 = -2$ und $z_2 = 3 + 0{,}5\,j$ sind zu berechnen und in der arithmetischen Form anzugeben

a) $\ln z_1$ b) $\ln z_2$ c) $z = \ln\sqrt{\dfrac{1+z_2}{1-z_2}}$

Die Ortskurven folgender komplexer Funktionen sind zu zeichnen:

2.21 a) $z(p) = z_1 + z_2 p$ $z_1 = 2 + 2\,j$ $z_2 = -1 + 2\,j$

b) $z(p) = z_1 + z_2 p^2$ $z_1 = -2 - 3\,j$ $z_2 = 1 + j$

2.22 a) $z(R) = R + j\omega L$ $0 \le R \le 1\,k\Omega$ $\omega = 1\,kHz$ $L = 0{,}2\,H$

b) $z(\omega) = R + j\omega L$ $0 < \omega \le 1\,kHz$ $R = 100\,\Omega$ $L = 0{,}5\,H$

2.23 a) $z(p) = p\,(2 + pj)$ b) $z(p) = 1 + p^2 + 2pj$

2.24 Die Ortskurven der inversen Funktionen sind zu zeichnen.

a) $z(p) = p \cdot e^{0{,}5\,j}$ b) $z(p) = \dfrac{1}{p}\,(2 - j)$

2.25 Für die Funktionen der Aufgaben 2.21a) und b) sind die Ortskurven der inversen Funktionen zu zeichnen.

2.26 Für die Funktionen der Aufgaben 2.22a) und b) sind die Ortskurven der inversen Funktionen zu zeichnen.

2.27 Die Ortskurven der inversen Funktionen sind zu zeichnen.

a) $z(p) = 2 \cdot e^{jp}$ b) $z(p) = 4\left(\cos\left(p + \dfrac{\pi}{6}\right) + j\sin\left(p + \dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

2.28 Für die Funktion $z(p) = \dfrac{1}{5 - 2pj}$ soll die Ortskurve gezeichnet und daraus die Ortskurve der inversen Funktion ermittelt werden.

2.29 Für die Funktion $z(p) = \dfrac{1}{z_1 + z_2 p}$ mit $z_1 = 5 + j$, $z_2 = 1 - j$ und die inverse Funktion $z^*(p)$ sollen die Ortskurven gezeichnet werden.

2.30 Die Ortskurven der Funktion $z(p) = \dfrac{z_1 + z_2 p}{z_3 + z_4 p}$ und der inversen Funktion $z^*(p)$ sind zu zeichnen.

a) $z_1 = j$, $z_2 = 1 - j$, $z_3 = -1 + j$, $z_4 = 1$

b) $z_1 = 1 - j$, $z_2 = -3$, $z_3 = 2$, $z_4 = -2 + 2\,j$

3 Vektorrechnung und analytische Geometrie

3.1 Koordinaten

Besondere Bedeutung haben in der Ebene das **ebene rechtwinklige** oder **cartesische Koordinatensystem**, das jedem Punkt P der Ebene eineindeutig die Abszisse $x \in \mathbb{R}$ und die Ordinate $y \in \mathbb{R}$ zuordnet sowie das **ebene Polarkoordinatensystem**, das jedem Ebenenpunkt eineindeutig den Abstand $r \in (0, \infty)$ und den Richtungswinkel $\varphi \in [0, 2\pi]$ zuordnet.

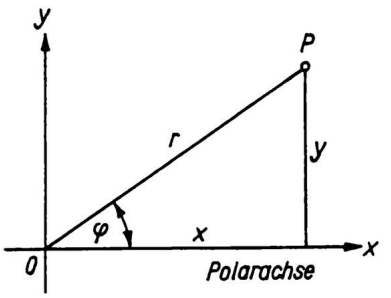


Bild 3.1

Der Übergang vom cartesischen Koordinatensystem zum Polarkoordinatensystem und umgekehrt erfolgt bei der in Bild 3.1 angegebenen gegenseitigen Lage beider Systeme durch die Formeln

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\varphi &= \frac{y}{x} \end{aligned}} \qquad (3.1a)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}} \qquad (3.1b)$$

Ein **dreiachsiges rechtwinkliges** oder **cartesisches Koordinatensystem** besteht aus drei paarweise orthogonal zueinander stehenden Achsen, der x-, y- und der z-Achse, die sich im Ursprung O schneiden. Man unterscheidet Rechts- und Linkssysteme. Spreizt man Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger rechtwinklig zueinander und ordnet dem Daumen die x-Achse, dem Zeigefinger die y-Achse und dem Mittelfinger die z-Achse zu, dann entspricht das Rechtssystem der rechten Hand, das Linkssystem der linken Hand (Bild 3.2).

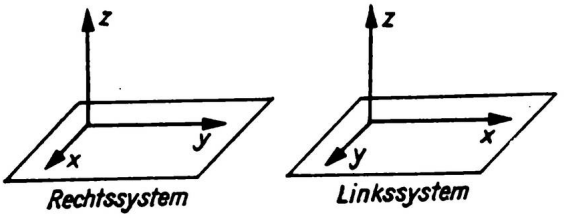


Bild 3.2

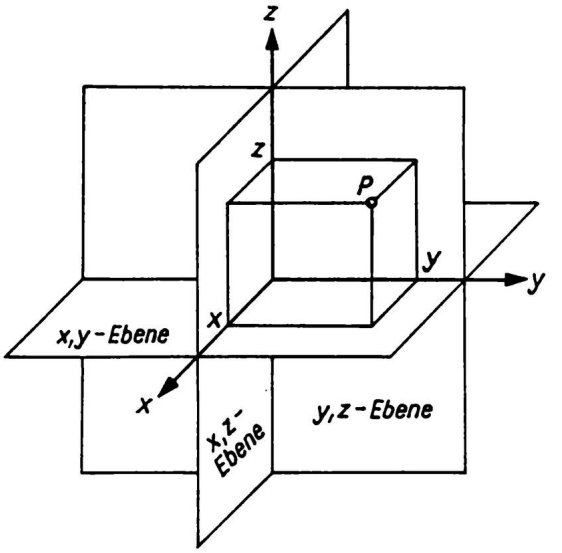


Bild 3.3

Im folgenden wird das **Rechtssystem** verwendet. Je zwei Koordinatenachsen spannen eine Koordinatenebene auf, die x, y-Ebene, die x, z-Ebene und die y, z-Ebene.

Die Koordinaten x, y, z eines Punktes P sind dessen Abstände von den Koordinatenebenen (Bild 3.3); man schreibt $P(x; y; z)$. Weitere räumliche Koordinatensysteme (Kugelkoordinaten, Zylinderkoordinaten) werden im Abschnitt 11 verwendet.

Die Gleichung einer Kurve ist abhängig von der Lage der Kurve zum Koordinatensystem. Zum Beispiel ist die Kreisgleichung am einfachsten, wenn der Kreismittelpunkt mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt. Man kann daher häufig bei vorliegendem Koordinatensystem durch Übergang zu einem günstiger gelegenen neuen Koordinatensystem die Kurvengleichung vereinfachen. Eine andere Aufgabe liegt vor, wenn die Koordinaten von Punkten in verschiedenen Systemen gegeben sind und für Berechnungen, z.B. von Strecken oder Flächen, alle Koordinaten in einem System gebraucht werden.

Der Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen heißt **Koordinatentransformation**.

In der Ebene seien zwei cartesische Koordinatensysteme K und K' gegeben:

$K(O, x, y)$ mit der x- und der y-Achse und dem Ursprung O, $K'(O', x', y')$ mit der x'- und der y'-Achse und dem Ursprung O' (Bild 3.4). Der Übergang vom "alten" System K zum "neuen" System K' kann stets durch eine Parallelverschiebung und eine Drehung erfolgen. Zum Beispiel kann K parallel verschoben werden, bis O mit O' zusammenfällt. Durch eine Drehung um O' mit einem Drehwinkel φ wird dann K mit K' zur Deckung gebracht.

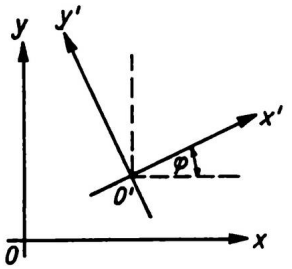


Bild 3.4

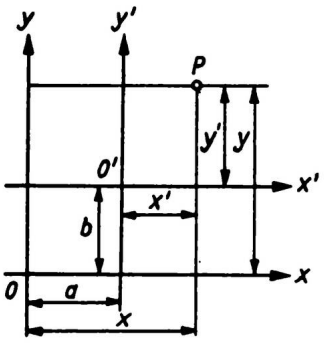


Bild 3.5

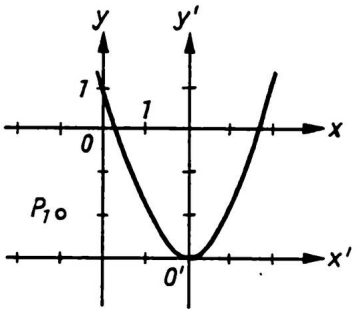


Bild 3.6

Parallelverschiebung des Koordinatensystems in der Ebene

K und K' haben die in Bild 3.5 angegebene parallele Lage der Achsen, d.h., K' geht aus K durch eine Parallelverschiebung hervor. Hat O' im System K die Koordinaten a, b und ist P ein beliebiger Punkt mit den Koordinaten x, y im System K und x', y' im System K', dann lauten die **Transformationsgleichungen der Parallelverschiebung**:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x' + a \\ y &= y' + b \end{aligned}} \quad (3.2a) \qquad \boxed{\begin{aligned} x' &= x - a \\ y' &= y - b \end{aligned}} \quad (3.2b)$$

Die Formeln gelten für beliebige Lagen von O' und P bezüglich des Koordinatensystems K.

Beispiel 3.1

Eine Parabel hat im Koordinatensystem K die Gleichung:
$y = x^2 - 4x + 1$.
Wie heißt die Gleichung im System K', (Bild 3.6), das durch $0'(a = 2,\ b = -3)$ festgelegt ist.

Lösung:
Mit den Formeln (3.2a) folgt
$x = x' + 2$
$y = y' - 3$
In die Parabelgleichung eingesetzt, ergibt
$y' - 3 = (x' + 2)^2 - 4(x' + 2) + 1$
$y' = x'^2$

Beispiel 3.2

K und K' sind wie im Beispiel 3.1 angegeben. Ein Punkt P_1 hat in K die Koordinaten $x_1 = -1$, $y_1 = -2$. Gesucht sind seine Koordinaten x_1', y_1' in K'.

Lösung:
Mit den Formeln (3.2b) folgt
$x_1' = x_1 - a = -1 - 2 = \underline{\underline{-3}}$
$y_1' = y_1 - b = -2 + 3 = \underline{\underline{1}}$

Drehung des Koordinatensystems in der Ebene

K und K' haben nach Bild 3.7 einen gemeinsamen Ursprung $0 = 0'$ und K' geht aus K durch eine Drehung um den Winkel φ hervor. Für einen Punkt P gilt:

$$x = \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{CD}$$
$$y = \overline{AP} = \overline{AC} + \overline{CP} = \overline{BD} + \overline{CP}$$

Mit $\overline{OB} = x' \cos\varphi$, $\overline{CD} = y' \sin\varphi$,
$\overline{BD} = x' \sin\varphi$, $\overline{CP} = y' \cos\varphi$
folgen die

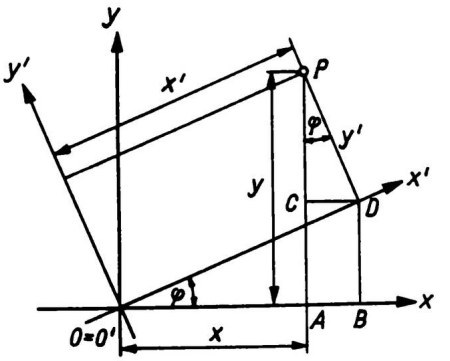


Bild 3.7

Transformationsgleichungen der Drehung

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi - y' \sin\varphi \\ y &= x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \end{aligned}} \tag{3.3a}$$

Die Auflösung des Gleichungssystems nach x', y' ergibt

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x \cos\varphi + y \sin\varphi \\ y' &= -x \sin\varphi + y \cos\varphi \end{aligned}} \tag{3.3b}$$

Bei Verwendung der Formeln (3.3) beachte man, daß der Winkel φ von der positiven Richtung der x-Achse mathematisch positiv bis zur positiven Richtung der x'-Achse gemessen wird.

Beispiel 3.3

Eine Gerade hat im System K die Gleichung $y = -3x + 2\sqrt{2}$. Wie lautet ihre Gleichung im System K' (Bild 3.8)?

Lösung:

Nach (3.3a) ist mit $\varphi = 225°$

$$x = x' \cos 225° - y' \sin 225° = -\frac{1}{2}\sqrt{2}x' + \frac{1}{2}\sqrt{2}y'$$
$$y = x' \sin 225° + y' \cos 225° = -\frac{1}{2}\sqrt{2}x' - \frac{1}{2}\sqrt{2}y'.$$

x und y in die Geradengleichung eingesetzt ergibt

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2}x' - \frac{1}{2}\sqrt{2}y' = -3\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}x' + \frac{1}{2}\sqrt{2}y'\right) + 2\sqrt{2}$$

$$\underline{\underline{y' = -2x' + 2}}$$

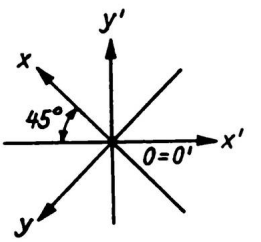


Bild 3.8

Drehung und Parallelverschiebung des Koordinatensystems in der Ebene
Die Transformationsgleichungen (3.2) und (3.3) werden zusammengefaßt:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi - y' \sin\varphi + a \\ y &= x' \sin\varphi + y' \cos\varphi + b \end{aligned}} \tag{3.4a}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\varphi + (y-b)\sin\varphi \\ y' &= -(x-a)\sin\varphi + (y-b)\cos\varphi \end{aligned}} \tag{3.4b}$$

$a; b$ sind die Koordinaten von O' im System K; φ wird positiv von der x- zur x'-Achse gemessen.

Mit $\quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

lauten die Gleichungen (3.4) in Matrizenform

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}) \tag{I}$$

$\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$ sind die Ortsvektoren von P im System K bzw. K'. $\boldsymbol{a}$ ist der Ortsvektor von O' im System K. Die *Transformationsmatrix* $\boldsymbol{A}$ ist eine orthogonale Matrix, d.h. $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T$ und $\det \boldsymbol{A} = 1$.
Eine Transformation mit einer orthogonalen Matrix heißt *metrische Transformation.*
Anmerkung: Ist $\boldsymbol{A}$ eine beliebige reguläre Matrix, dann stellen die Gleichungen (I) eine *affine Transformation* dar.

Aufgaben 3.1 bis 3.3

3.2 Vektoralgebra

3.2.1 Vektorbegriff

In der Naturwissenschaft und Technik treten zwei unterschiedliche Größen auf.
Skalare Größen oder **Skalare** lassen sich durch eine reelle Zahl als Maßzahl und ggf. durch eine Maßeinheit kennzeichnen. Skalare sind zum Beispiel Länge, Zeit, Masse, Temperatur, Arbeit usw.
Vektorielle Größen oder **Vektoren** sind Größen, zu deren Kennzeichnung neben Maßzahl und Maßeinheit noch die Angabe einer orientierten Richtung notwendig ist, in der diese Größen wirken. Vektorielle Größen sind zum Beispiel Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung, elektrische Feldstärke usw.
Ein Vektor wird geometrisch durch einen *Pfeil* dargestellt (Bild 3.9), das heißt eine orientierte Strecke. Die Länge der Strecke gibt die Maßzahl der vektoriellen Größe an, die Pfeilspitze die orientierte Richtung (Richtungssinn).

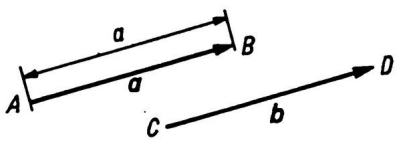


Bild 3.9

Vektoren werden bezeichnet durch
halbfett gedruckte lateinische Buchstaben: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ..., $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{P}$, ...
lateinische Buchstaben mit darüber gesetztem Pfeil: $\vec{a}$, $\vec{b}$, ..., $\vec{F}$, $\vec{P}$, ...
Angabe des Anfangs- und Endpunktes mit Pfeil: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, ...
(Früher wurden Vektoren auch durch Frakturbuchstaben dargestellt.)

Der **Betrag des Vektors** ist die Maßzahl der Länge des Pfeils, d.h. die Maßzahl der Vektorgröße. Für den Betrag des Vektors $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ schreibt man $|\boldsymbol{a}| = |\overrightarrow{AB}| = a$. Die orientierte Richtung des Vektors, meist kurz **Richtung des Vektors** genannt, ist die durch den Pfeil gegebene orientierte Richtung der Strecke.

Bei Anwendungen sind drei Arten von Vektoren zu unterscheiden.
Freie Vektoren können beliebig parallel in der Ebene oder im Raum verschoben werden.

Liniengebundene Vektoren (linienflüchtige Vektoren) dürfen nur auf der durch den Pfeil festgelegten Geraden (Wirkungslinie) verschoben werden. Z.B. kann die auf einen starren Körper wirkende Kraft, dargestellt durch den Kraftvektor $\boldsymbol{F}$, längs ihrer Wirkungslinie verschoben werden.

Ortsgebundene Vektoren sind an einen festen Anfangspunkt gebunden. Als Beispiel dient der **Ortsvektor** $\boldsymbol{r}$, der bei zugrunde gelegtem cartesischem Koordinatensystem den Ursprung O mit einem Raumpunkt P verbindet.
Im folgenden werden, wenn nicht anders festgelegt, freie Vektoren betrachtet.

Für die **Gleichheit der Vektoren** gilt:

Zwei Vektoren heißen gleich genau dann, wenn sie in Betrag und Richtung übereinstimmen.
In Bild 3.9 ist z.B. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

3.2.2 Addition und Subtraktion von Vektoren

Definition der Vektoraddition (Bild 3.10)

Um zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ zu addieren, wird $\boldsymbol{b}$ parallel so verschoben, daß sein Ausgangspunkt auf den Endpunkt von $\boldsymbol{a}$ fällt. Der vom Anfangspunkt von $\boldsymbol{a}$ zum Endpunkt von $\boldsymbol{b}$ führende Vektor $\boldsymbol{s}$ heißt der *Summenvektor* oder die *Summe* von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$$

Sind mehrere Vektoren zu addieren, z.B. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, dann wird aus diesen entsprechend der Definition der Addition ein Vektorzug (Vektorpolygon) gebildet (Bild 3.11). Der Summenvektor $\boldsymbol{s}$ führt vom Anfangs- zum Endpunkt des Vektorzuges:

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}.$$

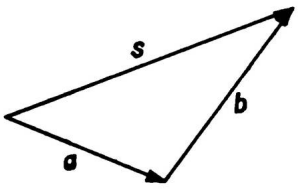


Bild 3.10

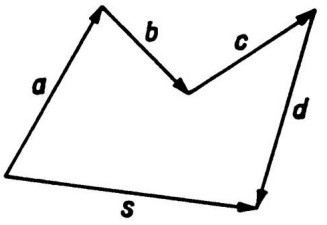


Bild 3.11

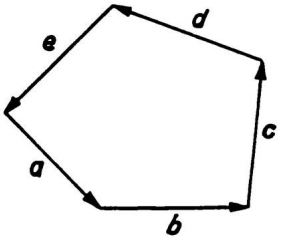


Bild 3.12

Für die Vektoraddition gelten das

Kommutativgesetz $\boxed{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}}$ (3.5)

Assoziativgesetz $\boxed{\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}}$ (3.6)

Fallen bei der Addition mehrerer Vektoren Anfangs- und Endpunkt des Vektorzuges zusammen, so daß ein *Vektoreck* entsteht (Bild 3.12), dann hat der Summenvektor den Betrag Null.

Ein Vektor mit dem Betrag Null heißt **Nullvektor** und wird mit $\boldsymbol{o}$ oder $\vec{o}$ bezeichnet. Der Nullvektor hat keine Richtung. Nach Bild 3.12 ist

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} + \boldsymbol{e} = \boldsymbol{o}$$

Wie bei den reellen Zahlen gilt: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{a}$.

Zwei Vektoren mit gleicher Länge und Richtung, aber entgegengesetzter Orientierung, heißen **entgegengesetzte Vektoren** oder **Gegenvektoren**. Der zu $\boldsymbol{a}$ entgegengesetzte Vektor wird mit $-\boldsymbol{a}$ bezeichnet (Bild 3.13). Es ist $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$.

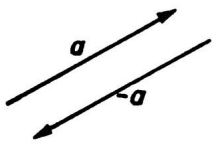


Bild 3.13

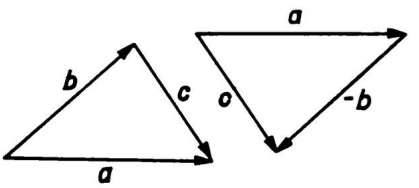


Bild 3.14

Wie bei der Arithmetik reeller Zahlen wird die Subtraktion von Vektoren als Umkehrung der Addition erklärt, d.h. aus der Gleichung (Bild 3.14)

$$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \qquad \text{(I)}$$

ist $\boldsymbol{c}$ zu bestimmen. Addition von $-\boldsymbol{b}$ zu (I) ergibt

$$-\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) \quad \text{und mit} \quad -\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}, \quad \boldsymbol{o} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}$$

folgt

$c = a + (-b)$ (Bild 3.14) oder kurz
$c = a - b$.

Subtraktion von Vektoren

Man subtrahiert von dem Vektor a den Vektor b, indem man zu a den entgegengesetzten Vektor von b addiert.

$$a - b = a + (-b)$$

Beispiel 3.4

Gegeben sind die Vektoren a, b, c nach Bild 3.15 mit $|a| = 5$, $|b| = 4$, $|c| = 3,5$, $\alpha = 80°$, $\beta = 65°$. Man konstruiere $d = a + b - c$ und bestimme $|d|$ und den Winkel γ zwischen d und a.

Lösung:

Nach Bild 3.15 ist $d = a + b + (-c)$, $|d| = 8,8$, $\gamma = 13°$.

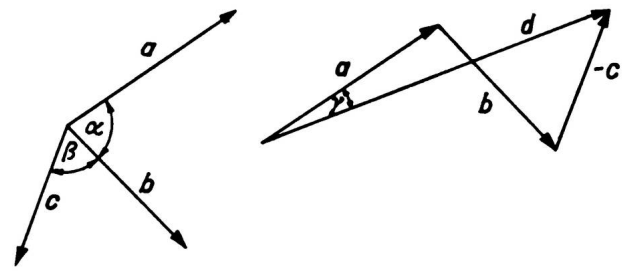


Bild 3.15

3.2.3 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Definition

Es sei der Skalar λ eine beliebige reelle Zahl. Dann ist λa ein Vektor, der parallel zu a ist und dessen Betrag das $|\lambda|$-fache des Betrages von a ist:
$|\lambda \cdot a| = |\lambda| \cdot |a|$.

a und $\lambda \cdot a$ sind für	$\lambda > 0$	gleichsinnig parallel
	$\lambda < 0$	gegensinnig parallel
	$\lambda = -1$	Gegenvektoren

Für $\lambda = 0$ ist $\lambda \cdot a = o$.

Für die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar gelten mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ das

Kommutativgesetz $\boxed{\lambda a = a\lambda}$ (3.7)

Assoziativgesetz $\boxed{\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = \lambda\mu a}$ (3.8)

und zwei

Distributivgesetze

$$\boxed{\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b} \tag{3.9a}$$

$$\boxed{(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a} \tag{3.9b}$$

Beispiel 3.5

Es ist zu beweisen, daß sich die Diagonalen im Parallelogramm gegenseitig halbieren.

Lösung:

Im Parallelogramm $ABCD$ (Bild 3.16) sei $\overrightarrow{AB}=a$, $\overrightarrow{AD}=b$, $\overrightarrow{AC}=e$, $\overrightarrow{BD}=f$. Dann ist

$e=a+b$

$f=b-a$

Daraus folgt

$e+f=2b$ oder $b=\frac{1}{2}(e+f)=\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}f$

$e-f=2a$ oder $a=\frac{1}{2}(e-f)=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}f$

mit $\frac{1}{2}e=\overrightarrow{AE}$ und $\frac{1}{2}f=\overrightarrow{ED}$, d.h. beide Diagonalen werden durch ihren Schnittpunkt E halbiert.

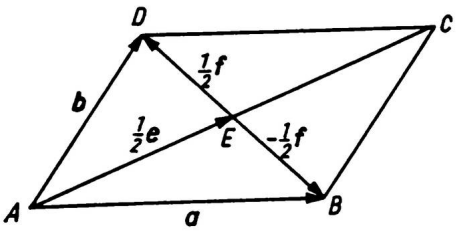


Bild 3.16

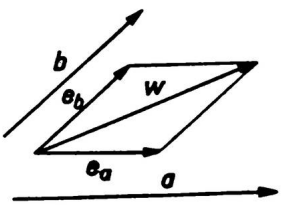


Bild 3.17

Ist a ein beliebiger Vektor ($a\neq o$), dann heißt der zu a gleichsinnig parallele Vektor, dessen Betrag gleich Eins ist, der zu a gehörende **Einsvektor** oder **Einheitsvektor**. Er wird mit e_a bezeichnet: $|e_a|=1$. Es ist

$$a=|a|\cdot e_a=a\cdot e_a \qquad \text{oder}$$

$$\boxed{e_a=\frac{a}{|a|}} \tag{3.10}$$

Beispiel 3.6

Gesucht wird ein Vektor w in Richtung der Winkelhalbierenden des Winkels, der von zwei Vektoren a und b gebildet wird (Bild 3.17)

Lösung:

Die Einsvektoren $e_a=\frac{a}{|a|}$ und $e_b=\frac{b}{|b|}$ bilden einen Rhombus, dessen Diagonale den Winkel zwischen e_a und e_b halbiert. Daher ist $w=e_a+e_b$ ein Vektor in Richtung der Winkelhalbierenden.

3.2.4 Darstellung von Vektoren im Koordinatensystem

Zur rechnerischen Behandlung von Vektoren wird ein dreiachsiges cartesisches Koordinatensystem zugrunde gelegt. Die Einsvektoren, deren orientierte Richtungen mit der positiven Richtung der x-, y- bzw. z-Achse übereinstimmen, werden mit $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ bzw. $\boldsymbol{k}$ bezeichnet (Bild 3.18). Das von ihnen gebildete *Dreibein* wird **Basis** genannt; $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sind die **Basisvektoren**.

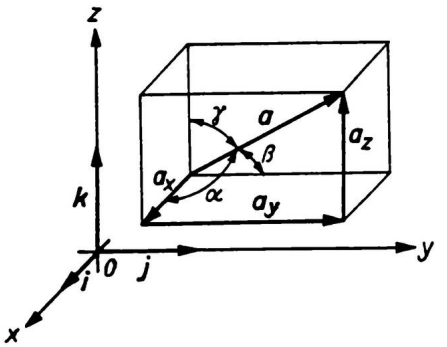


Bild 3.18

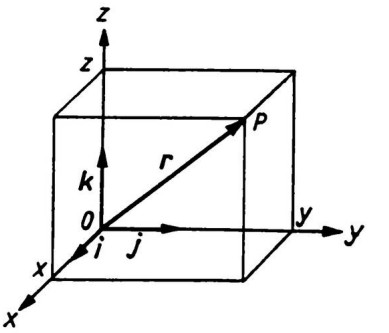


Bild 3.19

Ein Vektor $\boldsymbol{a}$ $(\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o})$ kann als Summe von drei Vektoren $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$, $\boldsymbol{a}_z$ dargestellt werden, die parallel zu $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ bzw. $\boldsymbol{k}$ sind und als **Komponenten** von $\boldsymbol{a}$ bezüglich der Basisvektoren bezeichnet werden:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_z .$$

Die Komponenten lassen sich durch die Basisvektoren darstellen:

$$\boldsymbol{a}_x = a_x \boldsymbol{i} , \quad \boldsymbol{a}_y = a_y \boldsymbol{j} , \quad \boldsymbol{a}_z = a_z \boldsymbol{k}$$

a_x ist positiv oder negativ, je nachdem, ob $\boldsymbol{a}_x$ und $\boldsymbol{i}$ gleichsinnig oder gegensinnig parallel sind. Entsprechendes gilt für a_y, a_z.
Man erhält für $\boldsymbol{a}$:

$$\boxed{\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}} \tag{3.11}$$

Gegeben sei ein Ortsvektor $\boldsymbol{r}$, d.h. ein Vektor mit dem Anfangspunkt O (Bild 3.19). Der Endpunkt P habe die Koordinaten x, y, z. Dann läßt sich für $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP}$ schreiben

$$\boxed{\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}} \tag{3.12}$$

x, y, z werden als *Koordinaten des Vektors* bezeichnet. Häufig nennt man auch die a_x, a_y, a_z aus (3.11) Vektorkoordinaten, da bei jedem freien Vektor durch Parallelverschiebung der Anfangspunkt nach O gelegt werden kann.
Da ein Vektor durch ein Zahlentripel x, y, z bzw. a_x, a_y, a_z gegeben ist, kann auch umgekehrt ein Zahlentripel als Vektor gedeutet werden. Es wird daher häufig

wie in der linearen Algebra (vgl. Abschn. 4.3.1) die Schreibweise des Vektors als einspaltige Matrix verwendet:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

oder durch Transponieren als einzeilige Matrix

$$\boldsymbol{a}^T = (a_x\, a_y\, a_z), \quad \boldsymbol{r}^T = (x\, y\, z).$$

Für die Basisvektoren ist

$$\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus der Definition der **Gleichheit von Vektoren** folgt sofort

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow a_x = b_x\,;\; a_y = b_y\,;\; a_z = b_z} \tag{3.13}$$

Aus

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) \pm (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k})$$

folgt mit dem Kommutativgesetz (3.5) und dem Distributivgesetz (3.9b) für die **Addition bzw. Subtraktion von Vektoren**

$$\boxed{\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_x \pm b_x)\boldsymbol{i} + (a_y \pm b_y)\boldsymbol{j} + (a_z \pm b_z)\boldsymbol{k}} \tag{3.14}$$

Für die **Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar**

$$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})$$

erhält man mit dem Distributivgesetz (3.9a)

$$\boxed{\lambda\boldsymbol{a} = \lambda a_x\boldsymbol{i} + \lambda a_y\boldsymbol{j} + \lambda a_z\boldsymbol{k}} \tag{3.15}$$

In Matrixschreibweise lauten die Gleichungen (3.14) und (3.15):

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}, \quad \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.7

Mit den Vektoren $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 8\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 10\boldsymbol{k}$ bilde man $\boldsymbol{d} = 2\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

Lösung:

Unter Verwendung der Matrizenschreibweise ist

$$\boldsymbol{d} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{d} = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 15\boldsymbol{k}}}$$

Für den Betrag eines Vektors folgt aus den Bildern 3.18 und 3.19 nach dem Satz von PYTHAGORAS:

$$\boxed{|\boldsymbol{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \quad \text{bzw.} \tag{3.16}$$

$$\boxed{|\boldsymbol{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{3.17}$$

Beispiel 3.8

Gegeben sind die Ortsvektoren $\overrightarrow{OP_1} = \boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$ und $\overrightarrow{OP_2} = \boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$. Man berechne den Abstand $\overline{P_1P_2}$.

Lösung:

Es ist

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}$$

$$\overline{P_1P_2} = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Ein Vektor $\boldsymbol{a}$ bildet mit den Basisvektoren die Winkel $\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}) = \alpha$, $\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{j}) = \beta$, $\sphericalangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}) = \gamma$ (Bild 3.18). Die Cosinuswerte dieser Winkel heißen die **Richtungscosinus des Vektors**:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}} \tag{3.18}$$

Für die Summe ihrer Quadrate ergibt sich

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_x^2}{a^2} + \frac{a_y^2}{a^2} + \frac{a_z^2}{a^2}$$

$$= \frac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1} \tag{3.19}$$

Die drei Winkel α, β, γ sind voneinander abhängig. Die Umstellung nach einem Winkel ergibt diesen wegen des doppelten Vorzeichens der Wurzel jedoch nicht eindeutig, er kann spitz oder stumpf sein. Außer zwei Winkeln muß deshalb auch der Quadrant des dritten Winkels bekannt sein.
Aus (3.18) folgt

$$a_x = |\boldsymbol{a}| \cos\alpha\,,\quad a_y = |\boldsymbol{a}| \cos\beta\,,\quad a_z = |\boldsymbol{a}| \cos\gamma$$

und damit für $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos\alpha \cdot \boldsymbol{i} + |\boldsymbol{a}| \cos\beta \cdot \boldsymbol{j} + |\boldsymbol{a}| \cos\gamma \cdot \boldsymbol{k}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\,(\boldsymbol{i} \cos\alpha + \boldsymbol{j} \cos\beta + \boldsymbol{k} \cos\gamma)} \tag{3.20}$$

Damit ist ein Vektor durch seine Länge und seine Richtung (gegeben durch die Richtungscosinus) festgelegt.
Für den Einsvektor $\boldsymbol{e}_a$ gilt wegen $|\boldsymbol{e}_a| = 1$:

$$\boxed{\boldsymbol{e}_a = \boldsymbol{i} \cos\alpha + \boldsymbol{j} \cos\beta + \boldsymbol{k} \cos\gamma} \tag{3.21}$$

Beispiel 3.9

Gesucht werden Länge, Einsvektor und die mit den Basisvektoren gebildeten Winkel des Vektors $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$.

Lösung:

Länge: $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{4+1+4} = \underline{\underline{3}}$

Einsvektor: $\boldsymbol{e}_a = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{2}{3}\boldsymbol{i} - \dfrac{1}{3}\boldsymbol{j} - \dfrac{2}{3}\boldsymbol{k}$

Die Richtungswinkel:
Die Richtungscosinus sind nach (3.21) gleich den Koordinaten des Einsvektors.

$\cos\alpha = \dfrac{2}{3}\,,\quad \cos\beta = -\dfrac{1}{3}\,,\quad \cos\gamma = -\dfrac{2}{3}$

$\underline{\underline{\alpha = 48°11'}}\,,\quad \underline{\underline{\beta = 109°28'}}\,,\quad \underline{\underline{\gamma = 131°49'}}$

3.2.5 Lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit

Es sind n Vektoren $\boldsymbol{a}_i$ $(\boldsymbol{a}_i \neq \boldsymbol{o})$ und n reelle Zahlen $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ gegeben. Der Vektor

$$\boldsymbol{s} = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n$$

heißt **Linearkombination** der Vektoren $\boldsymbol{a}_i$.
Die Vektoren $\boldsymbol{a}_i$ heißen **linear abhängig**, wenn gilt

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o} \tag{I}$$

und nicht alle λ_i zugleich null sind. Die Vektoren $\boldsymbol{a}_i$ heißen **linear unabhängig**, wenn (I) nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ erfüllt ist.

Mit $n = 2$ folgt:
Für zwei linear abhängige Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ gilt

$$\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \qquad \text{Es sei } \lambda_1 \neq 0\,,\ \lambda_2 \neq 0.$$

Dann folgt, wenn z.B. nach $\boldsymbol{b}$ aufgelöst wird

$$\boldsymbol{b} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\boldsymbol{a} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{b} = \mu \boldsymbol{a} \tag{II}$$

d.h. $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ sind parallel.

Zwei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sie parallel sind.

Parallele Vektoren heißen **kollineare[1] Vektoren**.
Mit $n = 3$ folgt:
Für drei linear abhängige Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ gilt:

$$\lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b} + \lambda_3 \boldsymbol{c} = \boldsymbol{o} \qquad \text{(nicht alle } \lambda_i \text{ gleich null)} \tag{III}$$

Ist z.B. $\lambda_3 \neq 0$ und wird nach $\boldsymbol{c}$ aufgelöst, dann folgt

$$\boldsymbol{c} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\boldsymbol{a} - \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\boldsymbol{b} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{c} = \mu \boldsymbol{a} + \nu \boldsymbol{b} \tag{IV}$$

d.h. $\boldsymbol{c}$ liegt in der von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannten Ebene.

Drei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sie in einer Ebene liegen.

Drei in einer Ebene liegende Vektoren heißen **komplanare[2] Vektoren**.
Die Vektorgleichung (III) enthält drei skalare Gleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x &= 0 \\ \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y &= 0 \\ \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z &= 0 \end{aligned} \tag{V}$$

Das ist ein homogenes lineares Gleichungssystem für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mit der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_2 & c_z \end{vmatrix} \tag{VI}$$

Das Gleichungssystem (V) hat eine eindeutige Lösung (vgl. Abschn. 4.5.2), wenn $D = 0$ ist. Für $D \neq 0$ hat das System nur die triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, d.h. die Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ sind linear unabhängig.

[1] collinearis (lat.), auf der gleichen Geraden liegend
[2] planum (lat.), in der gleichen Ebene liegend

Drei Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ sind linear abhängig, wenn

$$D = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_2 & c_z \end{vmatrix} = 0$$

ist. Sie sind linear unabhängig für $D \neq 0$.

In der Ebene gibt es nur zwei, im Raum nur drei linear unabhängige Vektoren. Jeder andere Vektor der Ebene bzw. des Raumes läßt sich als Linearkombination der zwei bzw. drei linear unabhängigen Vektoren darstellen. Deshalb können in der Ebene zwei, im Raum drei beliebige linear unabhängige Vektoren als Basisvektoren eines nicht notwendig rechtwinkligen Koordinatensystems verwendet werden.

3.2.6 Skalarprodukt

Für die Multiplikation von Vektoren werden zwei verschiedene Arten von Produkten definiert, die für die mathematische Beschreibung physikalischer und technischer Vorgänge geeignet sind.

Definition

Das **Skalarprodukt** von zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ist das Produkt aus den Beträgen beider Vektoren und dem Cosinus des von beiden Vektoren eingeschlossenen Winkels $\measuredangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \varphi$.

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos\varphi = ab\cos\varphi. \tag{3.22}$$

Das Ergebnis der skalaren Multiplikation ist also ein Skalar, d.h. eine reelle Zahl, kein Vektor.

Der Punkt kann auch entfallen: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{ab}$. Nach Bild 3.20 ist $b\cos\varphi$ die Orthogonalprojektion der Strecke b auf den Vektor $\boldsymbol{a}$:

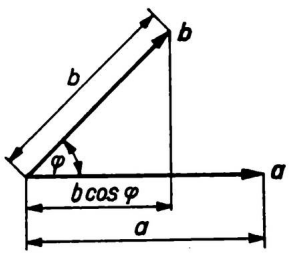


Bild 3.20

Das Skalarprodukt ist gleich dem Betrag des einen Vektors, multipliziert mit der Projektion des Betrages des zweiten Vektors auf den ersten.

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist gleich null, wenn mindestens einer der beiden Vektoren der Nullvektor ist oder beide Vektoren senkrecht aufeinander stehen (wegen $\cos\varphi = \cos 90° = 0$):

$$\boxed{\boldsymbol{ab} = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o} \vee \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \vee \measuredangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 90°.} \tag{3.23}$$

Die skalare Multiplikation eines Vektors mit sich selbst ergibt

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{a}| \cos 0° = a \cdot a \cdot 1 = a^2$$

Weiter wird vereinbart: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^2$.

Der **Betrag eines Vektors** ist dann

$$\boxed{|\boldsymbol{a}| = a = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{\boldsymbol{a}^2}} \tag{3.24}$$

Rechengesetze für das Skalarprodukt:

Kommutativgesetz $\boxed{\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}}$ (3.25)

Für die Multiplikation eines Skalars mit einem Skalarprodukt gilt das

Assoziativgesetz $\boxed{\lambda \cdot (\boldsymbol{ab}) = (\lambda \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}(\lambda \boldsymbol{b})}$ (3.26)

Das skalare Produkt von drei Vektoren in der Form $\boldsymbol{abc}$ ist nicht definiert, denn es würde $(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}$ einen zu $\boldsymbol{c}$ parallelen Vektor und $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc})$ einen zu $\boldsymbol{a}$ parallelen Vektor bedeuten.

Distributivgesetz $\boxed{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}}$ (3.27)

Beispiel 3.10

Es ist der Cosinussatz der ebenen Trigonometrie herzuleiten.

Lösung:

Nach Bild 3.21 ist

$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$

Beide Seiten der Gleichung werden skalar mit sich selbst multipliziert:

$\boldsymbol{c}^2 = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$

$= a^2 - 2ab\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + b^2$

und mit $\measuredangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \gamma$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

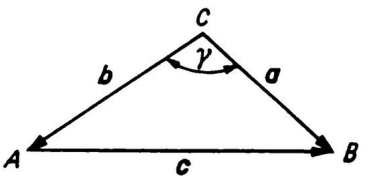


Bild 3.21

Es ist das Skalarprodukt $\boldsymbol{ab}$ zu berechnen, wenn $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ im Koordinatensystem gegeben sind: $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$.
Für die paarweise orthogonalen Einsvektoren der Basis gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{ij} = \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{ki} &= 0 \\ \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 &= 1 \end{aligned}} \tag{3.28}$$

Damit wird

$$\begin{aligned}\boldsymbol{ab} &= (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) \\ &= a_xb_x\boldsymbol{i}^2 + a_xb_y\boldsymbol{ij} + a_xb_z\boldsymbol{ik} + a_yb_x\boldsymbol{ji} + a_yb_y\boldsymbol{j}^2 \\ &\quad + a_yb_z\boldsymbol{jk} + a_zb_x\boldsymbol{ki} + a_zb_y\boldsymbol{kj} + a_zb_z\boldsymbol{k}^2\end{aligned}$$

und mit (3.28) folgt für das Skalarprodukt von zwei Vektoren

$$\boxed{\boldsymbol{ab} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z} \tag{3.29}$$

oder in Matrizenform

$$\boldsymbol{a}^T \cdot \boldsymbol{b} = (a_x\ a_y\ a_z)\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

Beispiel 3.11

Welchen Winkel φ schließen die Vektoren $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ miteinander ein?

Lösung:

Aus $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\varphi$ folgt

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{-14}{\sqrt{45}\sqrt{69}} = -0,2512\,, \quad \underline{\underline{\varphi = 104,55^\circ}}$$

Beispiel 3.12

Ein Körper wird durch eine Kraft längs eines geradlinigen Weges verschoben. Die dabei aufzuwendende Arbeit ergibt sich bekanntlich aus dem Produkt der Weglänge und der Kraftkomponente in Richtung des Weges. Werden Kraft und Weg durch die Vektoren $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{s}$ beschrieben, dann ist die Arbeit das Skalarprodukt

$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}$.

Sind z.B. der Kraftvektor $\boldsymbol{F} = (43\boldsymbol{i} - 21\boldsymbol{j} + 38\boldsymbol{k})$ N und der Wegvektor $\boldsymbol{s} = (5\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})$ m gegeben, dann ist die geleistete Arbeit

$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s} = (43 \cdot 5 - 21 \cdot 8 + 38 \cdot 2)$ Nm

$\underline{\underline{W = 123\ \text{J}}}$

3.2.7 Vektorprodukt

Definition

Unter dem **Vektorprodukt** zweier Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ wird ein Vektor

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b},$$ gelesen: "c gleich a kreuz b" oder "Vektorprodukt ab",

verstanden mit folgenden drei Eigenschaften:
$\boldsymbol{c}$ ist orthogonal zu $\boldsymbol{a}$ und zu $\boldsymbol{b}$
$|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Es sei $\measuredangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \varphi$. Der Betrag von $\boldsymbol{c}$ ist nach Definition gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannt wird (Bild 3.22): $|c| = a \cdot b \sin\varphi$.

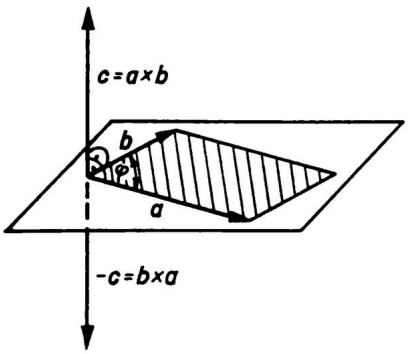


Bild 3.22

Das Vektorprodukt ist gleich dem Nullvektor, wenn mindestens einer der beiden Vektoren der Nullvektor ist oder beide Vektoren parallel sind (wegen $\sin\varphi = \sin 0° = 0$).

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \Longleftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o} \vee \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \vee \boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \tag{3.30}$$

Als wichtige Umkehrung von (3.23) und (3.30) folgt

Für die Vektoren $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$ und $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$ gilt:

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \iff \boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ sind orthogonal zueinander
$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \iff \boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ sind parallel zueinander

Für das Vektorprodukt gilt nicht das Kommutativgesetz, denn aus der dritten Eigenschaft der Definition folgt (s. Bild 3.22)

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) \tag{3.31}$$

Für die Multiplikation des Vektorprodukts mit einem Skalar gilt das

Assoziativgesetz $$\lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\lambda \boldsymbol{b}) \tag{3.32}$$

Weiterhin gilt das

Distributivgesetz

$$\boxed{\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}} \tag{3.33}$$

Beispiel 3.13

Man berechne $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$

Lösung:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b} \\ &= \boldsymbol{o} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} - \boldsymbol{o} \\ &= \underline{\underline{2(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})}}\end{aligned}$$

Für das Vektorprodukt der Basisvektoren $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ folgt aus der Definition

$$\boxed{\begin{array}{lll} \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, & \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, & \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}, & \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}, & \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{o} & & \end{array}} \tag{3.34}$$

Damit erhält man für das Vektorprodukt aus zwei im Koordinatensystem gegebenen Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}) \times (b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k})$$

und nach Ausmultiplizieren (wegen (3.33)) und Beachtung von (3.34) ist

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k}$$

oder in Matrizenschreibweise

$$\boxed{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}} \tag{3.35}$$

Das Vektorprodukt läßt sich formal als Determinante darstellen:

$$\boxed{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}} \tag{3.36}$$

Bei der praktischen Berechnung der Determinanten wird diese zweckmäßig nach den Elementen der ersten Zeile entwickelt (vgl. Abschn. 4.4.1).

Beispiel 3.14

Man berechne $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ für $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}$

Lösung:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -5 & 1 \\ 4 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{i}(30 - 2) - \boldsymbol{j}(-12 - 4) + \boldsymbol{k}(4 + 20)$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 28\boldsymbol{i} + 16\boldsymbol{j} + 24\boldsymbol{k}}}$$

Beispiel 3.15

Ein Massenpunkt P drehe sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine feste Achse. Die Winkelgeschwindigkeit wird durch einen Vektor $\boldsymbol{\omega}$ dargestellt, dessen Betrag gleich dem Betrag ω der Winkelgeschwindigkeit ist, dessen Richtung die Richtung der Drehachse angibt und der so orientiert ist, daß von der Spitze aus betrachtet die Drehung im mathematisch positiven Drehsinn erfolgt. Der Massenpunkt werde festgelegt durch den Ortsvektor $\boldsymbol{r}$, dessen Anfangspunkt auf der Drehachse liegt (Bild 3.23). Es sei $\sphericalangle(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}) = \varphi$.
Der Betrag der Tangentialgeschwindigkeit des Massenpunktes ist

$v = \omega \cdot r' = \omega \cdot r \sin \varphi$.

Als Vektorgröße erhält man für die Tangentialgeschwindigkeit

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$

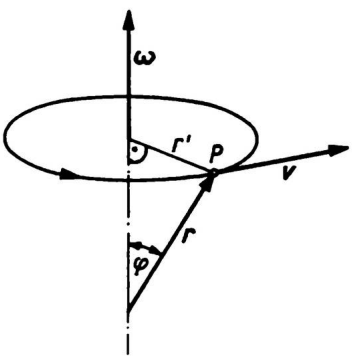


Bild 3.23

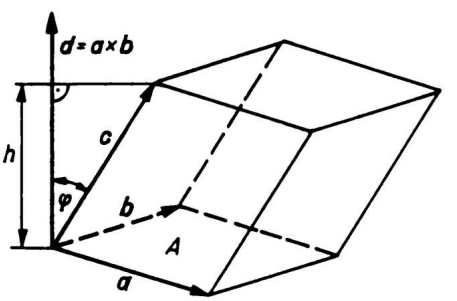


Bild 3.24

3.2.8 Mehrfache Produkte von Vektoren

Von den multiplikativen Verknüpfungen mehrerer Vektoren, die in "sinnvoller" Reihenfolge skalar oder vektoriell erfolgen können, werden zwei wichtige angegeben.
Das **gemischte Produkt** $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ läßt sich anschaulich geometrisch deuten. $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ steht senkrecht auf $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ und es ist $|\boldsymbol{d}| = A$ mit A als Flächeninhalt des von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannten Parallelogramms (Bild 3.24).

Dann ist

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{c} = |\boldsymbol{d}| \cdot |\boldsymbol{c}| \cdot \cos \varphi = A \cdot h$$

das Volumen V des von $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ aufgespannten *Parallelepipeds* oder *Spats*.

Gemischtes Produkt oder **Spatprodukt**

$$\boxed{(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = V} \tag{3.37}$$

V ist positiv, wenn $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden, sonst negativ. Für das Spatprodukt gelten die Formeln

$$\boxed{(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}} \tag{3.38}$$

$$\boxed{(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})} \tag{3.39}$$

Nach (3.39) können im Spatprodukt Punkt und Kreuz vertauscht werden, weshalb für das Spatprodukt auch die einfache Schreibweise $[\boldsymbol{abc}]$ vereinbart wurde.
Mit den im Koordinatensystem gegebenen Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ folgt für das Spatprodukt

$$\boxed{(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}} \tag{3.40}$$

was leicht durch Berechnung beider Seiten der Gleichung bewiesen werden kann.
Das vektorielle Produkt $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$ von drei Vektoren läßt sich nicht unmittelbar anschaulich deuten. Für dieses Produkt gilt der ohne Beweis angegebene **Entwicklungssatz**

$$\boxed{(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{ac})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{bc})\boldsymbol{a}} \tag{3.41}$$

Seine Bedeutung liegt darin, daß mit ihm mehrfache Produkte auf einfachere zurückgeführt werden können.
Setzt man in (3.41) für $\boldsymbol{c}$ den Vektor $\boldsymbol{a}$ ein, dann wird

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$$

und umgestellt nach $\boldsymbol{b}$ erhält man die *Zerlegung des Vektors $\boldsymbol{b}$ in eine Parallel- und eine Normalkomponente bezüglich $\boldsymbol{a}$*:

$$\boxed{\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{a^2}\boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{a^2} \times \boldsymbol{a}} \tag{3.42}$$

Möglichkeiten der Produktbildung von vier Vektoren findet der Leser in den Formelsammlungen.

Aufgaben 3.4 bis 3.25

3.3 Analytische Geometrie der Ebene

3.3.1 Kurvengleichungen

In der analytischen Geometrie werden den Punkten der Ebene und des Raumes durch Einführung eines Koordinatensystems Zahlenpaare bzw. Zahlentripel zugeordnet und geometrische Gebilde (Kurven, Flächen) durch Gleichungen zwischen diesen Koordinaten beschrieben. Damit können geometrische Aufgaben auf algebraischem Wege gelöst werden.
Die analytische Geometrie wurde im wesentlichen von DESCARTES[1] entwickelt.

Die Gleichung einer ebenen Kurve k kann in der

impliziten Form: $F(x,y)=0$ (I)
expliziten Form: $y=f(x)$ (II)
gegeben sein. Die Kurve k als Menge von Punkten, deren Koordinaten die Kurvengleichung erfüllen, wird dargestellt durch

$$k=\{P(x;y)|\ F(x,y)=0\}.$$

Der Punkt $P(x;y)$ mit den variablen Koordinaten $x;y$ heißt **variabler Punkt**. Feste Kurvenpunkte werden mit Indizes bezeichnet, z.B. $P_0(x_0;y_0)$, $P_1(3;-5)$. Für die Anwendung ergibt sich die wichtige **Folgerung**:

> Ein Punkt $P_0(x_0;y_0)$ liegt auf einer Kurve k, wenn seine Koordinaten die Kurvengleichung erfüllen und umgekehrt:
>
> $$P_0(x_0;y_0)\in k \Longleftrightarrow F(x_0,y_0)=0$$

Beispiel 3.16

Welche der Punkte $P_1(8;3,6)$, $P_2(6;4,9)$ liegen auf der Kurve (Ellipse) k mit der Gleichung $F(x,y)=9x^2+25y^2-900=0$?

Lösung:

Wegen

$F(8;3,6)=9\cdot 8^2+25\cdot 3,6^2-900=0$ gilt $P_1\in k$

$F(6;4,9)=9\cdot 6^2+25\cdot 4,9^2-900=24,25$ gilt $P_2\notin k$.

Die durch eine Kurvengleichung vermittelte Abbildung $x\mapsto y$ muß im Gegensatz zur Funktionsgleichung nicht eindeutig sein.
In einer **Parameterdarstellung** der Kurve werden x und y getrennt als abhängige Variable einer dritten Variablen, des **Parameters** t, betrachtet:

$$r=r(t) \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} x &= x(t)\\ y &= y(t)\end{aligned} \qquad \text{(III)}$$

[1] RENÉ DESCARTES (lat. Cartesius), franz. Philosoph, Mathematiker und Physiker, 1556 bis 1650

Durch (III) wird jedem Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ in Abhängigkeit von t ein Punkt $P = P(t)$ zugeordnet (Bild 3.26).

Die Darstellungsformen (I), (II) und (III) können im allgemeinen ineinander überführt werden. Beim Übergang von der Parameterdarstellung zur parameterfreien Gleichung wird t eliminiert, indem eine Gleichung, z.B. $x = x(t)$, nach t aufgelöst und $t = \varphi(x)$ in $y = y(t)$ eingesetzt wird. Dann folgt $y = y(\varphi(x)) = f(x)$ als explizite Form der parameterfreien Gleichung. Es existiert nicht für jede Kurve eine parameterfreie Darstellung, da sich bei komplizierten Termen in (III) t nicht immer eliminieren läßt. Die Parameterdarstellung ist die allgemeinere, immer mögliche Darstellungsart. Für eine Kurve gibt es beliebig viele Parameterdarstellungen.

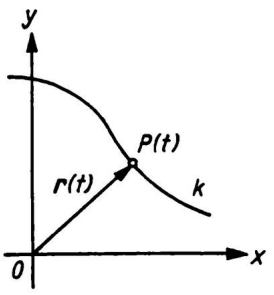


Bild 3.26

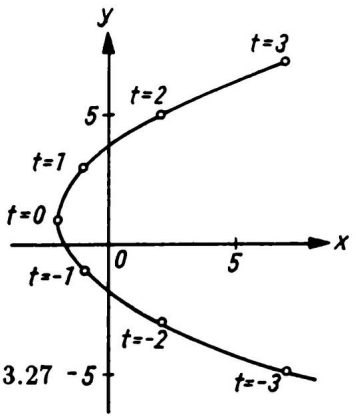


Bild 3.27

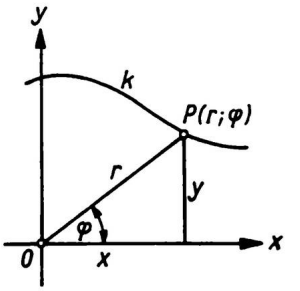


Bild 3.28

Beispiel 3.17

Eine Kurve hat die Parameterdarstellung

$$x = t^2 - 2 = x(t) \qquad t \in T = \mathbb{R} \tag{IV}$$

$$y = 2t + 1 = y(t)$$

Für $t \in \{-3, -2, \ldots, 3\}$ ist eine Wertetabelle aufgestellt

t	-3	-2	1	0	1	2	3
x	7	2	-1	-2	-1	2	7
y	-5	-3	-1	1	3	5	7

Die Kurve ist eine Parabel (Bild 3.27). Aus der ersten Gleichung von (IV) folgt $t = \pm\sqrt{x+2}$ und damit aus der zweiten Gleichung

$y = \pm 2\sqrt{x+2} + 1 = f(x)$, $x \in [-2, \infty)$ als parameterfreie Kurvengleichung.

Bei zugrunde gelegtem Polarkoordinatensystem stellen

$$F(r, \varphi) = 0 \quad \text{oder} \quad r = f(\varphi) \tag{V}$$

die implizite oder explizite Form der **Kurvengleichung in Polarkoordinaten** dar. Der Übergang von (I), (II) zu (V) oder umgekehrt erfolgt bei der in Bild 3.28 angegebenen Lage beider Systeme durch die Gleichungen (3.1).

Beispiel 3.18

Aus der Kurvengleichung $F(x;y) = x^2 + y^2 - 2x = 0$ ergibt sich beim Übergang zu Polarkoordinaten mit $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$:

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi - 2r\cos\varphi = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - 2r\cos\varphi$$
$$= r(r - 2\cos\varphi) = 0$$

Nach Division durch r (wegen $r \neq 0$ erlaubt) und Auflösen nach r folgt

$$r = 2\cos\varphi = f(\varphi) \qquad \text{(VI)}$$

Gleichung (VI) zeigt in Verbindung mit Bild 3.29 und dem Satz des THALES, daß die Kurve ein Kreis mit dem Radius 1 ist.

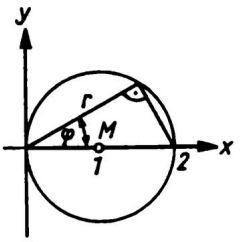


Bild 3.29

Schneiden sich zwei Kurven

$$k_1 : F_1(x,y) = 0\,, \quad k_2 : F_2(x,y) = 0 \qquad \text{(VII)}$$

in n Punkten, d.h.

$$k_1 \cap k_2 = \{P_1\,,\ P_2\,,\ \ldots\,,\ P_n\}\,,$$

dann müssen die Koordinaten der Schnittpunkte beide Kurvengleichungen erfüllen. Die zwei Kurvengleichungen (VII) stellen daher ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten zur Bestimmung der Schnittpunktkoordinaten dar.

Satz

Um die Koordinaten der Schnittpunkte zweier Kurven zu berechnen, werden die zugehörigen Kurvengleichungen zu einem Gleichungssystem zusammengefaßt, und es wird dessen Lösungsmenge bestimmt.

Da alle Koordinaten reelle Zahlen sind, bedeutet das Auftreten komplexer Zahlen in einem Zahlenpaar der Lösungsmenge, daß diesem Paar kein Schnittpunkt entspricht.

Im folgenden werden als einfachste und häufig gebrauchte Kurven die Gerade und die Kegelschnitte behandelt. Weitere technisch wichtige Kurven werden in Abschnitt 11 untersucht.

3.3.2 Die Gerade

Gegeben sind zwei Punkte $P_1(x_1; y_1), P_2(x_2; y_2)$. Ihre Ortsvektoren sind

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Die Länge der Strecke mit den Endpunkten P_1 und P_2 ergibt sich aus der **Abstandsformel** (Bild 3.30)

$$\boxed{\overline{P_1P_2} = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \tag{3.43}$$

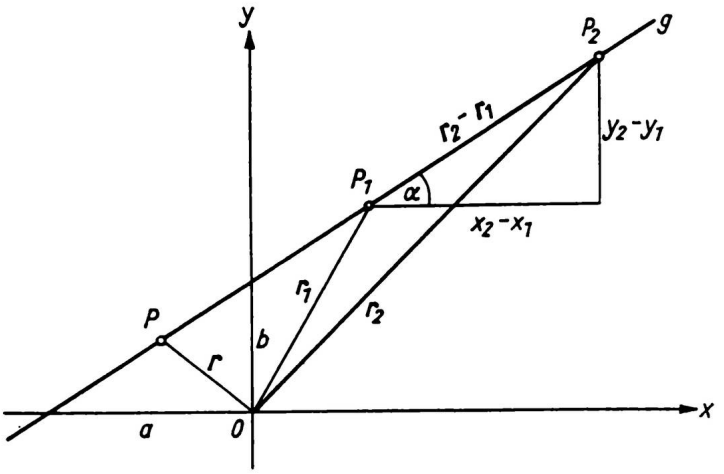


Bild 3.30

Der Anstiegswinkel der Strecke $\overline{P_1P_2}$ ist der Winkel $\alpha \in [0°, 180°)$, den die Strecke mit der positiven Richtung der x-Achse bildet. α folgt aus

$$\boxed{m = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \tag{3.44}$$

$m = \tan\alpha$ ist der **Anstieg** der Strecke.
Es sei g die Gerade durch P_1 und durch P_2 und $P(x; y)$ ein variabler Geradenpunkt mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{r}$. Dann lautet die **Parameterdarstellung der Geraden**

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)} \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.45}$$

oder mit $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ als ein Richtungsvektor von g:

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{u}} \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.46}$$

Aus (3.45) folgt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 &= t(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \quad \text{und in Komponentenschreibweise} \\ x - x_1 &= t(x_2 - x_1) \\ y - y_1 &= t(y_2 - y_1) \end{aligned}$$

Die Division der zweiten Gleichung durch die erste ergibt als parameterfreie Darstellung die **Zweipunkteform der Geradengleichung**

$$\boxed{\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}} \tag{3.47}$$

Der Term der rechten Seite stellt nach (3.44) den Anstieg m der Strecke $\overline{P_1P_2}$ und damit den Anstieg der Geraden dar. Damit folgt aus (3.47) die **Punktrichtungsform der Geradengleichung**

$$\boxed{y-y_1=m(x-x_1)} \tag{3.48}$$

Wird (3.48) nach y aufgelöst: $y=mx-mx_1+y_1$
und wird $-mx_1+y_1=b$ gesetzt, dann erhält man die **Normalform der Geradengleichung**

$$\boxed{y=mx+b} \tag{3.49}$$

In der Normalform ist m der Anstieg der Geraden und b ist die Ordinate des Schnittpunktes der Geraden mit der y-Achse. Ist a die Abszisse des Schnittpunktes der Geraden mit der x-Achse (in Bild 3.30 ist $a<0$), dann ist $m=-\frac{b}{a}$, und in (3.49) eingesetzt ergibt $y=-\frac{b}{a}x+b$ oder umgeformt die **Abschnittsform der Geradengleichung**

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1} \tag{3.50}$$

Beispiel 3.19

Eine Gerade geht durch die Punkte $P_1(-3;4)$, $P_2(6;-2)$.

a) Man gebe eine Parameterdarstellung der Geraden an. Welche Geradenpunkte erhält man für $t=-2$ und $t=\frac{1}{3}$?

b) Wie lautet die Normalform der Geradengleichung? Wie groß ist der Anstiegswinkel?

Lösung:

a) Nach (3.45) ist die Parameterdarstellung

$$\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix}$$

Es ist

$$\boldsymbol{r}_3=\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-21\\16\end{pmatrix},\quad P_3(-21;16)$$

$$\boldsymbol{r}_4 = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_4(0;2),$$

Schnittpunkt mit der y-Achse.

b) Mit den gegebenen Koordinaten folgt für die Zweipunkteform (3.47):

$\frac{y-4}{x+3} = \frac{-2-4}{6+3} = -\frac{2}{3}$ und daraus die Normalform

$$y = -\frac{2}{3}x + 2.$$

$$m = \tan\alpha = -\frac{2}{3}, \quad \alpha = 146,31^\circ$$

Jede parameterfreie Geradengleichung läßt sich auf die **allgemeine Form der Geradengleichung**

$$\boxed{Ax + By + C = 0} \tag{3.51}$$

bringen. Umgekehrt bestimmt jede Gleichung der Form (3.51) mit $A, B, C \in \mathbb{R}$ und A, B nicht beide zugleich null eine Gerade.

Aus (3.51) ergibt sich die Normalform

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}, \text{ d.h. } m = -\frac{A}{B}, \; b = -\frac{C}{B}.$$

Sonderfälle: Für $A = 0$ folgt $By + C = 0$, $y = -C/B = b$, das ist die Gleichung einer Parallelen zur x-Achse. Für $B = 0$ folgt entsprechend mit $x = -C/A = a$ die Gleichung einer Parallelen zur y-Achse. Für $C = 0$ geht die Gerade wegen $b = 0$ durch den Ursprung.

Schnittpunkt von zwei Geraden

Für die zwei Geraden mit den Parameterdarstellungen

$$g_1 : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{u}_1, \quad g_2 : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + s\boldsymbol{u}_2, \quad t, s \in \mathbb{R} \tag{I}$$

ergibt das lineare Gleichungssystem für t und s:

$$\boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{r}_2 + s\boldsymbol{r}_2$$

die Parameterwerte t_s, s_s zur Berechnung des Schnittpunktes S.

Beispiel 3.20

In welchem Punkt S schneiden sich die Geraden

$$g_1 : \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \; g_2 : \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}?$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} 2t - 3s &= 3 \\ 3t + 4s &= 13 \end{aligned}$$

Die Lösungen des Gleichungssystems sind $t_s = 3$, $s_s = 1$. Mit einem dieser Werte, z.B. mit t_s, wird S bestimmt:

$$\boldsymbol{r}_s = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{S(5;-3)}}$$

g_1, g_2 seien durch die allgemeinen Geradengleichungen gegeben:

$$g_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad g_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Die Koordinaten x_s, y_s des Schnittpunktes sind die Lösungen des aus beiden Gleichungen gebildeten Gleichungssystems. Mit den Determinanten (vgl. Abschnitt 4.4.3.1)

$$D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix} \text{ folgt}$$

$D \neq 0$: es existiert genau eine Lösung $\Leftrightarrow g_1, g_2$ schneiden sich.

$D = 0$: $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ oder $-\dfrac{A_1}{B_1} = -\dfrac{A_2}{B_2}$, d.h. $m_1 = m_2$.

Beide Geraden haben gleichen Anstieg.
Für $D_x \neq 0 \vee D_y \neq 0$ existiert keine Lösung $\Leftrightarrow g_1 \parallel g_2$.
Für $D_x = 0 \wedge D_y = 0$ existieren unendlich viele Lösungen $\Leftrightarrow g_1 = g_2$.

Schnittwinkel von zwei Geraden

Für die Geraden g_1, g_2 mit den Parameterdarstellungen (I) folgt der Schnittwinkel δ aus

$$\cos\delta = \frac{\boldsymbol{u}_1^T \cdot \boldsymbol{u}_2}{|\boldsymbol{u}_1| \cdot |\boldsymbol{u}_2|} \qquad \text{(II)}$$

Sind die Geraden in der parameterfreien Darstellung gegeben, bringt man diese auf die Normalform

$$g_1 : y = m_1x + b_1, \; g_2 : y = m_2x + b_2$$

und erhält mit $m_1 = \tan\alpha_1$, $m_2 = \tan\alpha_2$ den Winkel δ aus $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$.
Mit den Anstiegen m_1, m_2 lassen sich Richtungsvektoren von g_1, g_2 angeben:

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

Sind g_1 und g_2 orthogonal zueinander, d.h. $\delta = 90°$, $\cos\delta = 0$,
dann folgt aus (II):

$$\boldsymbol{u}_1^T \cdot \boldsymbol{u}_2 = (1\, m_1) \begin{pmatrix} 1 \\ m_2 \end{pmatrix} = 1 + m_1m_2 = 0 \text{ oder}$$

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

Zusammengefaßt gilt für parallele bzw. zueinander orthogonale Geraden:

$$\boxed{\begin{aligned} g_1 \parallel g_2 &\Leftrightarrow m_1 = m_2 \\ g_1 \perp g_2 &\Leftrightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1} \end{aligned}} \tag{3.52}$$

Beispiel 3.21

Wie heißt die Gleichung der Geraden g_2, die durch $P_1(8;3)$ geht und orthogonal zur Geraden $g_1 : y = 4x - 1$ ist?

Lösung:

Es ist $m_1 = 4$ und $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{4}$. Damit folgt für g_2 nach (3.48):

$$y - 3 = -\frac{1}{4}(x - 8)$$

$$\underline{\underline{y = -\frac{1}{4}x + 5}}$$

3.3.3 Kreis

Neben der Geraden sind in Naturwissenschaft und Technik diejenigen Kurven von besonderer Bedeutung, die durch eine **Kurvengleichung 2. Grades** der allgemeinen Form

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0} \tag{3.53}$$

dargestellt werden. Die Kurven, die sich je nach der Wahl der Koeffizienten A bis F ergeben ($A \neq 0 \vee C \neq 0$), heißen **Kreis**, **Parabel**, **Ellipse**, **Hyperbel** und gemeinsam **Kurven 2. Ordnung** oder **Kegelschnitte**, da sie als Schnittkurven beim Schnitt eines geraden Kreiskegels mit einer Ebene auftreten.

Definition

Der **Kreis** ist die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem festen Punkt M dieser Ebene einen konstanten Abstand r haben.

M heißt Mittelpunkt, r heißt Radius des Kreises.

M habe die Koordinaten x_M, y_M. $P(x;y)$ ist ein variabler Punkt des Kreises (Bild 3.31).

Nach Definition ist stets $\overline{MP} = r$. Daraus folgt als **allgemeine Kreisgleichung**

$$\boxed{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2} \tag{3.54}$$

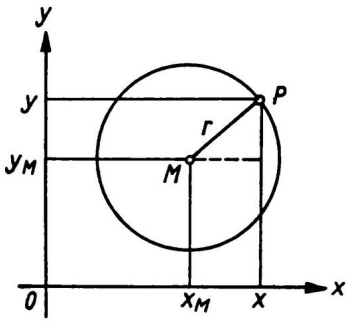


Bild 3.31

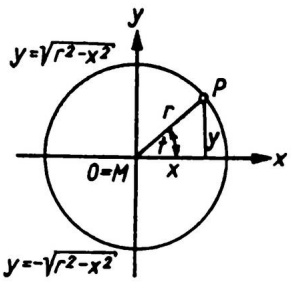


Bild 3.32

Fällt M in den Ursprung des Koordinatensystems, erhält man mit $x_M = 0$, $y_M = 0$ aus (3.54) die **Mittelpunktsgleichung des Kreises**

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2} \tag{3.55a}$$

oder in expliziter Form

$$\boxed{y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}} \quad x \in [-r, r] \tag{3.55b}$$

Für das Pluszeichen ergibt sich der obere, für das Minuszeichen der untere Halbkreis (Bild 3.32).

Auflösen der Klammern in (3.54) ergibt

$$x^2 + y^2 - 2x_M x - 2y_M y + x_M^2 + y_M^2 - r^2 = 0$$

und multipliziert mit einem beliebigen Faktor $\lambda \neq 0$:

$$\lambda x^2 + \lambda y^2 - 2\lambda x_M x - 2\lambda y_M y + \lambda\left(x_M^2 + y_M^2 - r^2\right) = 0.$$

Ein Vergleich mit (3.53) zeigt

$$A = C = \lambda,\ B = 0,\ D = -2\lambda x_M,\ E = -2\lambda y_M,\ F = \lambda\left(x_M^2 + y_M^2 - r^2\right)$$

Allgemein gilt:
Damit die Gleichung (3.53) einen Kreis darstellt, muß als notwendige Bedingung

$$A = C,\ B = 0$$

gelten.

Beispiel 3.22

Welche Mittelpunktskoordinaten und welchen Radius hat der Kreis mit der Gleichung $3x^2 + 3y^2 - 30x + 18y + 54 = 0$? (I)

Lösung:

Die Kreisgleichung wird auf die Form (3.54) gebracht, so daß sich x_M, y_M und r unmittelbar ablesen lassen. Division von (I) durch 3 und Addition der quadratischen Ergänzungen der Glieder mit x und y ergibt:

$$x^2 - 10x + y^2 + 6y = -18$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 = -18 + 25 + 9$$
$$(x-5)^2 + (y+3)^2 = 16$$

Man erhält $\underline{\underline{M(5;-3)}}$, $\underline{\underline{r = 4}}$

Beispiel 3.23

Von der Achse eines im Kreisbogen liegenden Bahngleises sind die Koordinaten dreier Punkte bekannt:

$A(201,20;300,04)$, $B(285,58;214,36)$, $C(436,85;129,71)$.

Gesucht werden Radius und Mittelpunkt des Kreises k.

Lösung:

Mit Gleichung (3.54) wird

$$\begin{aligned} A \in k: &\quad (201,20 - x_M)^2 + (300,04 - y_M)^2 = r^2 \\ B \in k: &\quad (285,58 - x_M)^2 + (214,36 - y_M)^2 = r^2 \\ C \in k: &\quad (436,85 - x_M)^2 + (129,71 - y_M)^2 = r^2 \end{aligned}$$

Aus diesem Gleichungssystem können x_M, y_M, r berechnet werden.
Die Klammern werden aufgelöst:

$$x_M^2 + y_M^2 - 402,40x_M - 600,08y_M + 130\,505,44 = r^2 \quad \text{(II)}$$
$$x_M^2 + y_M^2 - 571,16x_M - 428,72y_M + 127\,506,15 = r^2 \quad \text{(III)}$$
$$x_M^2 + y_M^2 - 873,70x_M - 259,42y_M + 207\,662,61 = r^2 \quad \text{(IV)}$$

Die Gleichungen werden paarweise subtrahiert:

$$\text{(II)–(III):} \quad 168,76x_M - 171,36y_M + 2999,29 = 0$$
$$\text{(III)–(IV):} \quad 302,54x_M - 169,30y_M - 80\,156,46 = 0$$

Daraus folgt $\underline{\underline{x_M = 612,03}}$, $\underline{\underline{y_M = 620,25}}$ und schließlich $\underline{\underline{r = 520,88}}$.

Aus Bild 3.32 liest man eine **Parameterdarstellung des Kreises** ab:

$$\boxed{\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}} \qquad t \in [0, 2\pi) \tag{3.56}$$

Die Gleichung des Kreises in Polarkoordinaten lautet (der Abstand wird, um Verwechslung zu vermeiden, mit ρ bezeichnet):

$$\boxed{\rho = r = const.} \tag{3.57}$$

3.3.4 Parabel

Definition

Die **Parabel** ist die Menge aller Punkte der Ebene, deren Abstände von einer festen Geraden und einem festen Punkt gleich sind.

Die feste Gerade heißt **Leitlinie** l, der feste Punkt heißt **Brennpunkt** F. Der Abstand F von l heißt **Halbparameter** p und bestimmt die Parabel eindeutig (Bild 3.33). Das Lot $\overline{PL}$ von einem variablen Parabelpunkt P auf l heißt *Leitstrahl*, die Strecke $\overline{PF}$ heißt *Brennstrahl*. Laut Definition gilt:

$$\overline{PF} = \overline{PL} \tag{I}$$

Die Gerade durch F senkrecht zu l ist die Symmetrieachse der Parabel und heißt *Parabelachse*. Diese schneidet die Parabel im **Scheitelpunkt** S und die Leitlinie in T. Nach Definition ist $\overline{ST} = \overline{SF} = \frac{p}{2}$. Die Parabeltangente in S heißt *Scheiteltangente*.

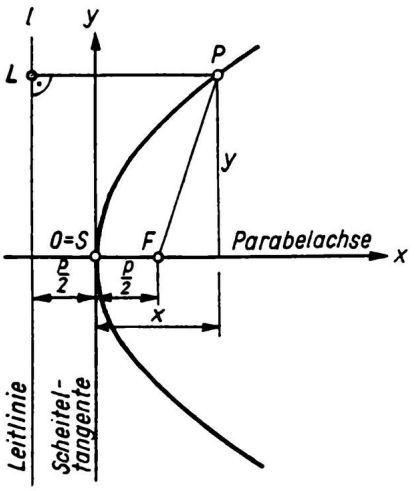


Bild 3.33

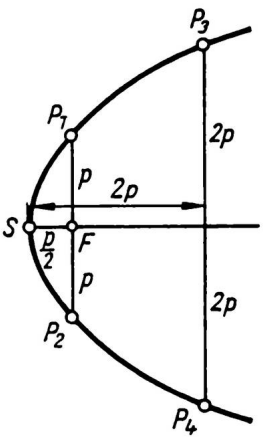


Bild 3.34

Die Gleichung der Parabel wird am einfachsten, wenn der Koordinatenursprung im Scheitelpunkt liegt und die x-Achse mit der Parabelachse zusammenfällt. Für den Brennpunkt gilt dann $F\left(\frac{p}{2};0\right)$. Nach Bild 3.33 folgt für Brenn- und Leitstrahl

$$\overline{PF} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}\,, \quad \overline{PL} = x + \frac{p}{2}$$

und mit (I) die Parabelgleichung

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Quadrieren ergibt

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \qquad \text{und damit die}$$

Scheitelgleichung der Parabel

$$\boxed{y^2 = 2px} \tag{3.58a}$$

oder explizit

$$\boxed{y = \pm\sqrt{2px}} \quad x \in [0, \infty) \tag{3.58b}$$

Für $x = p/2$ erhält man die Parabelpunkte $P_1\,(p/2; p)$, $P_2\,(p/2; -p)$ und für $x = 2p$ die Parabelpunkte $P_3\,(2p; 2p)$, $P_4\,(2p; -2p)$. Mit Hilfe der 5 Punkte $S, P_1, \ldots, P_4$ läßt sich eine durch p gegebene Parabel schnell und annähernd genau skizzieren (Bild 3.34).

Die Parabel in Bild 3.33 ist nach rechts geöffnet. Die Bilder 3.35 bis 3.37 zeigen nach links, oben bzw. unten geöffnete Parabeln (d.h. die Parabelachse fällt stets mit einer Koordinatenachse zusammen), deren Gleichungen durch (3.59), (3.60) und (3.61) gegeben sind.

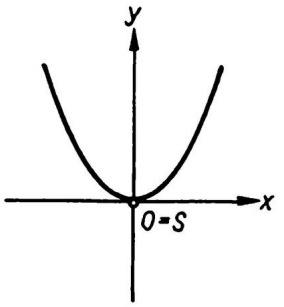


Bild 3.35

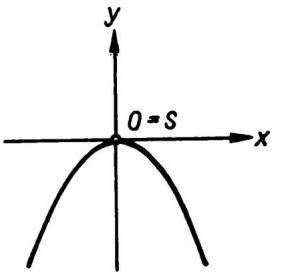


Bild 3.36

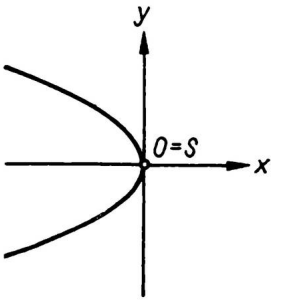


Bild 3.37

$$\boxed{y^2 = -2px} \tag{3.59}$$

$$\boxed{x^2 = 2py} \tag{3.60}$$

$$\boxed{x^2 = -2py} \tag{3.61}$$

Fällt der Scheitelpunkt S nicht mit O zusammen, sondern hat allgemein die Koordinaten x_S , y_S , und ist die Parabelachse parallel zu einer Koordinatenachse, dann folgen die Parabelgleichungen aus den Scheitelgleichungen (3.58) bis (3.61) durch eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems. Zum Beispiel hat die Parabel in Bild 3.38 im x', y'-System die Gleichung $y'^2 = 2px'$. Mit den Transformationsgleichungen

$$x' = x - x_S\,, \quad y' = y - y_S$$

für den Übergang zum x, y-System folgt die Gleichung $(y - y_S)^2 = 2p\,(x - x_S)$.

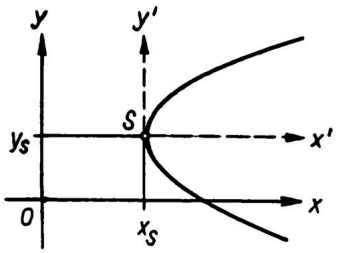


Bild 3.38

Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(x_S; y_S)$

nach rechts geöffnet $\boxed{(y-y_S)^2 = 2p(x-x_S)}$ (3.62)

nach links geöffnet $\boxed{(y-y_S)^2 = -2p(x-x_S)}$ (3.63)

nach oben geöffnet $\boxed{(x-x_S)^2 = 2p(y-y_S)}$ (3.64)

nach unten geöffnet $\boxed{(x-x_S)^2 = -2p(y-y_S)}$ (3.65)

Werden in den Gleichungen (3.62) bis (3.65) die Klammern aufgelöst und die Gleichungen nach x bzw. y umgestellt, dann ergeben sich die Parabelgleichungen als ganzrationale Funktionen 2. Grades:

$$\boxed{x = a_0 + a_1 y + a_2 y^2} \quad (3.66) \quad \text{bzw.} \quad \boxed{y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2} \quad (3.67)$$

mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$. Die Achsen der zu (3.66) gehörenden Parabeln sind parallel zur x-Achse und der zu (3.67) gehörenden Parabeln parallel zur y-Achse. Ein Vergleich von (3.66) bzw. (3.67) mit (3.53) zeigt:

Damit die allgemeine Kurvengleichung 2. Grades (3.53) eine Parabel mit der zu einer Koordinatenachse parallelen Achse darstellt, ist notwendig, daß entweder $A = 0$ oder $C = 0$ und außerdem $B = 0$ ist.

Beispiel 3.24

Das Leiterseil einer 110-kV-Leitung hat infolge des Durchhanges annähernd die Form einer Parabel mit senkrechter Achse. Der waagerechte Abstand zweier Masten beträgt $s = 301,4\,\text{m}$, der Höhenunterschied der Aufhängepunkte A und B ist $h = 23,6\,\text{m}$ (Bild 3.39). Der in der Mitte zwischen A und B gemessene "Durchhang" ist $f = 8,4\,\text{m}$. Gesucht werden die Gleichung der Parabel in dem angegebenen Koordinatensystem und die Koordinaten des Scheitelpunktes.

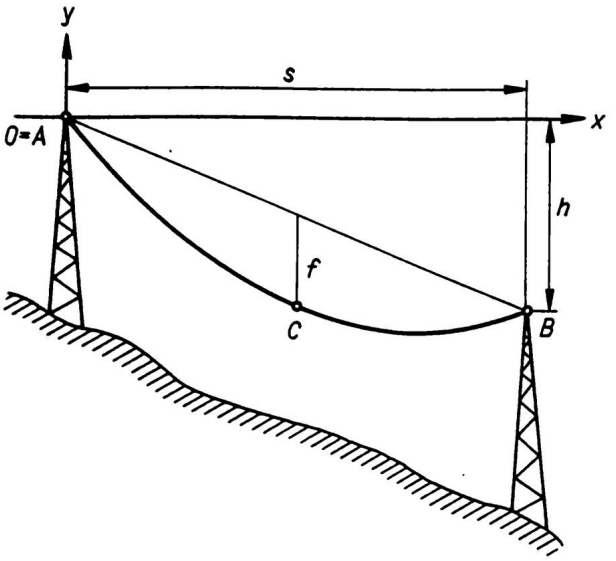


Bild 3.39

Lösung:

Die Parabelachse ist parallel zur y-Achse, deshalb wird Gleichung (3.67) verwendet:

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2. \tag{II}$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten b_0, b_1, b_2 sind drei Gleichungen notwendig. Es müssen deshalb drei Punkte der Parabel bekannt sein. Aus Bild 3.39 lassen sich die Koordinaten der drei Parabelpunkte A, B, C ablesen:

$A(0;0)$, $B(301,4;-23,6)$, $C(150,7;-20,2)$.

Diese Koordinaten müssen jeweils (II) erfüllen:

$$0 = b_0$$
$$-23,6 = b_0 + 301,4 b_1 + 301,4^2 b_2$$
$$-20,2 = b_0 + 150,7 b_1 + 150,7^2 b_2.$$

Aus den drei Gleichungen werden b_0, b_1, b_2 berechnet:

$b_0 = 0$, $b_1 = -0,18978$, $b_2 = 0,00037$.

Die Parabelgleichung lautet:

$$\underline{\underline{y = -0,18978x + 0,00037x^2}} \tag{III}$$

Gleichung (III) läßt sich schrittweise auf die Form (3.64) bringen:

$$x^2 - 513,1x = 2703,4y,$$

quadratische Ergänzung addieren:

$$x^2 - 513,1x + 65817,9 = 2703,4y + 65817,9$$
$$(x - 256,5)^2 = 2703,4\,(y + 24,3)$$

Aus dieser Gleichung lassen sich die Koordinaten x_S, y_S des Scheitelpunktes ablesen:

$\underline{\underline{S(256,5;-24,3)}}$.

Eine Parameterdarstellung der Parabel mit der Gleichung (3.62) ist z.B.

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) + \boldsymbol{r}_s \text{ oder } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ \sqrt{2p}\,t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix}$$

Man vergleiche auch Beispiel 3.17.

3.3.5 Ellipse

Definition

Die **Ellipse** ist die Menge aller Punkte der Ebene, für die die Summe ihrer Abstände von zwei festen Punkten konstant ist.

Die festen Punkte F_1 und F_2 heißen **Brennpunkte** der Ellipse. Für die konstante Abstandssumme wird

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \tag{I}$$

und für den Abstand der Brennpunkte wird

$$\overline{F_1F_2} = 2e$$

gesetzt (Bild 3.40). Die Größe e heißt **lineare Exzentrizität** der Ellipse. Durch e und a wird die Ellipse eindeutig bestimmt. Es muß $e < a$ sein. Das Verhältnis $\varepsilon = \dfrac{e}{a} < 1$ heißt **numerische Exzentrizität**. Für $e = 0$, d.h $\varepsilon = 0$, ist $F_1 = F_2$ und die Ellipse geht in einen Kreis über. ε gibt praktisch an, wie stark die Ellipse vom Kreis abweicht, d.h. wie "schlank" sie ist.

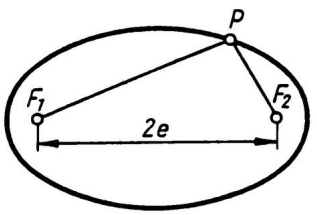


Bild 3.40

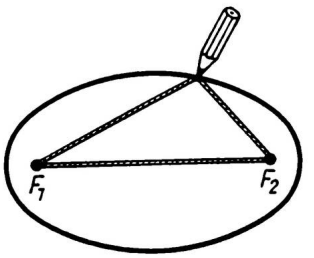


Bild 3.41

Aus der Definition folgt unmittelbar die **Fadenkonstruktion**:
Um zwei Reißzwecken im Abstand $2e$ wird ein zur Schlinge geknüpfter Faden mit der Gesamtlänge $2a + 2e$ gelegt (Bild 3.41). Mit einem in die Schlinge gesteckten Bleistift wird der Faden gespannt und die Kurve umfahren.
Zum Aufstellen der Kurvengleichung wird die x-Achse durch die Brennpunkte

gelegt und O halbiert den Abstand der Brennpunkte (Bild 3.42). Es ist also $F_1(-e;0)$, $F_2(e;0)$.

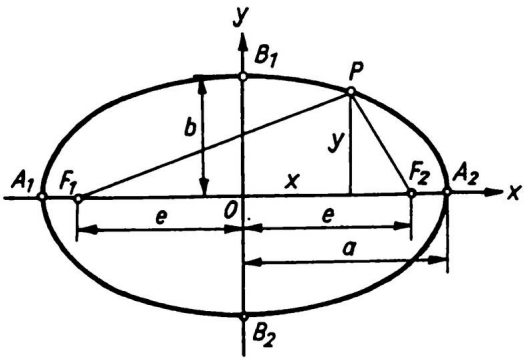


Bild 3.42

Für den variablen Ellipsenpunkt $P(x;y)$ folgt aus der Definitionsgleichung (I):

$$\overline{PF_1} = 2a - \overline{PF_2}$$

$$\sqrt{(e+x)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(e-x)^2+y^2}.$$

Quadrieren ergibt

$$e^2 + 2ex + x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(e-x)^2+y^2} + e^2 - 2ex + x^2 + y^2$$

$$ex - a^2 = -a\sqrt{(e-x)^2+y^2}.$$

Hier wird nochmals quadriert und zusammengefaßt:

$$(a^2 - e^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2\,(a^2 - e^2). \tag{III}$$

Zur Abkürzung wird

$$\boxed{a^2 - e^2 = b^2} \tag{3.68}$$

gesetzt, womit aus (III) folgt:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Die Division durch a^2b^2 ergibt die **Mittelpunktsgleichung der Ellipse**:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{3.69}$$

Die Ellipse ist abhängig von a und b bzw. allgemeiner wegen (3.68) von zwei der drei Größen a, b und e. Daher ist die Ellipse in der Mittelpunktslage durch zwei Punkte festgelegt. Da die Mittelpunktsgleichung in x und y quadratisch ist, sind x- und y-Achse Symmetrieachsen der Ellipse. Die mit der x-Achse zusammenfallende Symmetrieachse heißt **Hauptachse**, die dazu senkrechte Symmetrieachse heißt **Nebenachse** der Ellipse.

Für $y = 0$ folgt aus (3.69) $x = \pm a$, und für $y = 0$ folgt $y = \pm b$. Die Ellipse schneidet also die x-Achse in den Punkten $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, den **Hauptscheitelpunkten**, und die y-Achse in den Punkten $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$, den **Nebenscheitelpunkten**. Die Strecken $\overline{A_1A_2} = 2a$ und $\overline{B_1B_2} = 2b$ heißen große bzw. kleine Achse der Ellipse, a heißt **große Halbachse**, b **kleine Halbachse**.

Aus (3.69) folgt die explizite Form der Kurvengleichung

$$\boxed{y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} \tag{3.70}$$

Für den Ellipsenpunkt B_1 ist nach (I):

$$\overline{B_1F_1} + \overline{B_1F_2} = 2a$$

und wegen $\overline{B_1F_1} = \overline{B_1F_2}$ ist $\overline{B_1F_1} = \overline{B_1F_2} = a$.

Sind also von einer Ellipse die Halbachsen a, b und damit die vier Scheitelpunkte gegeben, dann erhält man die Brennpunkte als Schnittpunkte zwischen der Hauptachse und dem Kreisbogen um B_1 mit dem Radius a (Bild 3.43).

Die Gleichung (3.68) ist unmittelbar aus dem Dreieck OF_2B_1 ablesbar.

Sonderfall: Für $a = b\,(= r)$ geht (3.70) in die Kreisgleichung über ($F_1 = F_2 = M$).

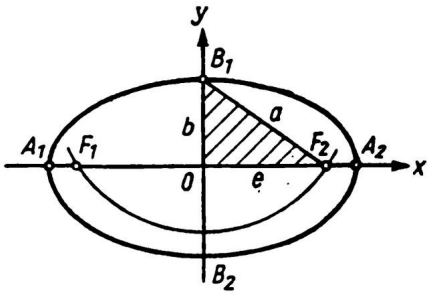


Bild 3.43

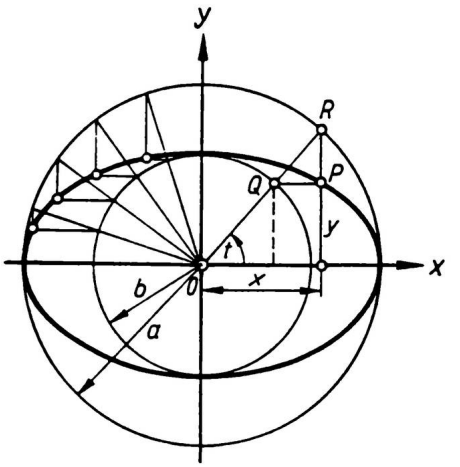


Bild 3.44

Vorteilhaft ist die folgende **Ellipsenkonstruktion**:

Gegeben sind die Halbachsen a und b der Ellipse. Um den Ellipsenmittelpunkt O wird ein Kreis mit dem Radius a, der **Hauptscheitelkreis**, und ein Kreis mit dem Radius b, **der Nebenscheitelkreis**, gezeichnet (Bild 3.44). Ein beliebiger Strahl durch O schneidet den Hauptscheitelkreis in R und den Nebenscheitelkreis in Q. Die Parallele zur Hauptachse (x-Achse) durch Q schneidet die Parallele zur Nebenachse (y-Achse) durch R in dem Ellipsenpunkt P.

Beweis:

Ist t der positiv gemessene Winkel zwischen dem Strahl OR und der x-Achse, dann folgt sofort aus dem Bild 3.44

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t. \tag{IV}$$

Die erste Gleichung wird durch a, die zweite durch b dividiert, und beide Gleichungen werden quadriert:

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t, \quad \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 t$$

und addiert:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$

das ist die Mittelpunktsgleichung der Ellipse. Für $t \in [0°, 360°)$ ergeben sich nach (IV) alle Ellipsenpunkte. (IV) ist eine

Parameterdarstellung der Ellipse:

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}} \qquad t \in [0°, 360°) \tag{3.71}$$

Der Winkel t heißt exzentrische Anomalie.

Beispiel 3.25

Eine Ellipse hat die Gleichung $4x^2 + 5,76y^2 - 23,04 = 0$. Gesucht werden ihre Halbachsen, Brennpunkte und die numerische Exzentrizität.

Lösung:

Nach Division durch 23,04 wird die Gleichung auf die Form (3.69) gebracht

$$\frac{x^2}{5,76} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

so daß $a = 2,4$ und $b = 2$ abgelesen werden können. Die lineare Exzentrizität ist nach (3.68)

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5,76 - 4} = \sqrt{1,76} = 1,33,$$

und damit sind die Brennpunkte $F_1(-1,33;0)$, $F_2(1,33;0)$. Die numerische Exzentrizität ist $\varepsilon = \dfrac{e}{a} = \dfrac{1,33}{2,4} = 0,55$.

Beispiel 3.26

Die Endpunkte R und Q einer Strecke konstanter Länge gleiten auf zwei zueinander senkrechten Geraden. Welche Kurve durchläuft ein Punkt P der Strecke, dessen Entfernung von R gleich m und von Q gleich n ist?

Lösung:

Die zueinander senkrechten Geraden werden als Koordinatenachsen gewählt, und es wird $\measuredangle OQP = t$ gesetzt. Aus Bild 3.45 werden die Gleichungen $x = m\cos t$, $y = n\sin t$ abgelesen. Nach (3.71) beschreibt also P einen Ellipsenbogen. Für

$m > n$ ist $m = a$, $n = b$, für $m < n$ wird $n = a$, $m = b$. Im zweiten Fall fällt die Hauptachse der Ellipse mit der y-Achse zusammen. Für $m = n$ ergibt sich ein Kreis.

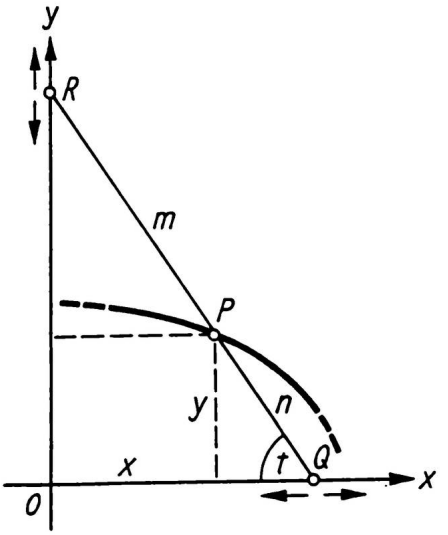


Bild 3.45

3.3.6 Hyperbel

Definition

Die **Hyperbel** ist die Menge aller Punkte der Ebene, für die die Differenz ihrer Abstände von zwei festen Punkten konstant ist.

Für die konstante Differenz wird

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a \tag{I}$$

und für den Abstand der **Brennpunkte** F_1, F_2 wird wie bei der Ellipse (Bild 3.46)

$$\overline{F_1F_2} = 2e$$

gesetzt. e ist die **lineare Exzentrizität** der Hyperbel. Für sie muß $e > a$ sein. $\varepsilon = \dfrac{e}{a} > 1$ ist die **numerische Exzentrizität**.

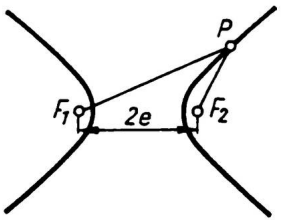


Bild 3.46

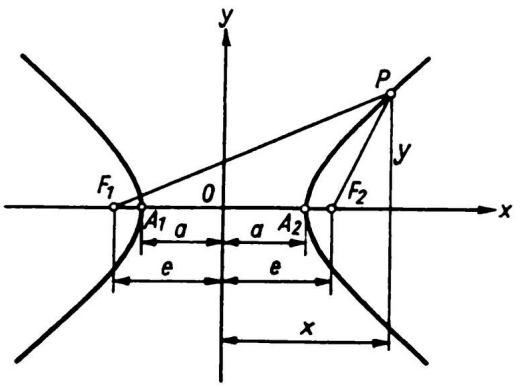


Bild 3.47

Zur Aufstellung der Kurvengleichung wird wie bei der Ellipse die x-Achse durch die Brennpunkte gelegt, und O halbiert den Abstand $\overline{F_1F_2}$ (Bild 3.47).

Aus der Definition (I) folgt für einen beliebigen Hyperbelpunkt $P(x;y)$

$$\left|\sqrt{(x+e)^2+y^2}-\sqrt{(x-e)^2+y^2}\right|=2a$$

Ähnliche Umformungen wie bei der Ellipse führen zur Gleichung

$$(e^2-a^2)\,x^2-a^2y^2=a^2\,(e^2-a^2) \tag{II}$$

Wegen $e>a$ wird abkürzend

$$\boxed{e^2-a^2=b^2} \tag{3.72}$$

gesetzt. Damit wird aus (II)

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2 \tag{III}$$

Nach Division durch a^2b^2 folgt die

Mittelpunktsgleichung der Hyperbel

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1} \tag{3.73}$$

Die Hyperbel ist durch zwei der drei Größen a, b und e bestimmt.

Die Mittelpunktsgleichung ist rein quadratisch in x und y, d.h., x- und y-Achse sind Symmetrieachsen der Hyperbel. Für $y=0$ folgt aus (3.73) $x=\pm a$. Die Hyperbel schneidet die x-Achse in den **Hauptscheitelpunkten** $A_1(-a;0)$ und $A_2(a;0)$ (Bild 3.47). Mit $x=0$ ergibt sich aus (3.73) $y=\pm bj$. Es existieren keine (reellen) Schnittpunkte mit der y-Achse, d.h., die Hyperbel besteht aus zwei getrennten Ästen.

a heißt die **reelle Halbachse**, b die **imaginäre Halbachse**. Zwischen a und b sind im Gegensatz zur Ellipse die Relationen $a<b$, $a=b$ und $a>b$ möglich.

Die Mittelpunktsgleichung (3.73) lautet explizit

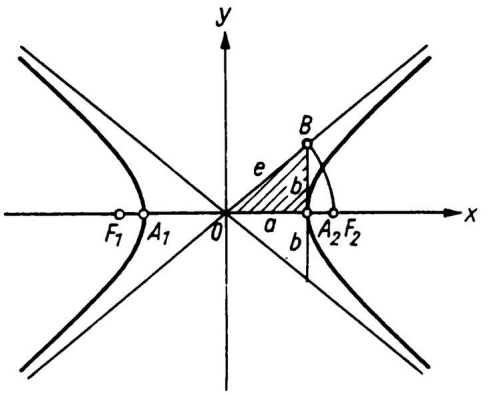
$$\boxed{y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}} \tag{3.74}$$

Die Wurzel ist reell für $|x|\geq a$, d.h., $X=(-\infty,-a]\cup[a,\infty)$. Für $x\in(-a,a)$ wird y imaginär; es existieren in diesem Intervall keine Hyperbelpunkte. Aus $|x|\to\infty$ folgt $|y|\to\infty$, d.h., $Y=\mathbb{R}$. Die beiden Äste erstrecken sich von A_1 bzw. A_2 aus nach beiden Seiten unbegrenzt. Die Gleichung (3.73) wird umgeformt:

$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

Für $x\to\pm\infty$ folgt $\dfrac{a^2}{x^2}\to 0$, d.h. die Ordinaten der Hyperbelpunkte nähern sich

unbegrenzt den Werten $y = \pm\frac{b}{a}x$. Es sind die Gleichungen von zwei durch den Ursprung gehenden Geraden (Bild 3.48), den **Asymptoten der Hyperbel**



$$\boxed{y = \pm\frac{b}{a}x} \tag{3.75}$$

Bild 3.48

Mit den Anstiegen $\pm\frac{b}{a}$ der Asymptoten und der Beziehung (3.73) ergibt sich das in Bild 3.48 dargestellte rechtwinklige Dreieck OA_2B. Es zeigt, wie aus den gegebenen Größen a und b die Asymptoten und die Brennpunkte konstruiert werden können. Sind Scheitelpunkte und Asymptoten bekannt, dann läßt sich die Hyperbel leicht angenähert zeichnen.

Während der Sonderfall $a = b$ bei der Ellipse den Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$ lieferte, ergibt sich hier für $a = b$ die **gleichseitige Hyperbel**

$$\boxed{x^2 - y^2 = a^2} \tag{3.76}$$

Ihre Asymptoten $y = \pm x$ schneiden die Koordinatenachsen unter 45° und einander unter 90° (Bild 3.49).

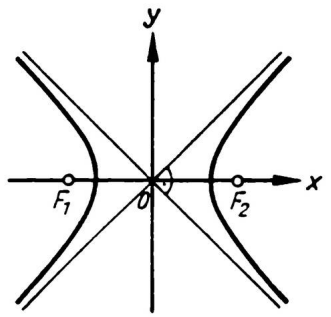


Bild 3.49

Beispiel 3.27

Eine Hyperbel hat den Hauptscheitelpunkt $A_2\left(\frac{6}{5};0\right)$ und geht durch den Punkt $P_1\left(2;\frac{32}{15}\right)$.

Wie heißen die Hyperbel- und die Asymptotengleichungen; welchen Winkel bilden die Asymptoten miteinander?

Lösung:

Mit dem Hauptscheitelpunkt ist die Halbachse $a = \frac{6}{5}$ gegeben. In die aus (3.73) folgende Hyperbelgleichung

$$\frac{25x^2}{36} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

werden die Koordinaten von P_1 eingesetzt:

$$\frac{25 \cdot 4}{36} - \frac{1024}{225b^2} = 1.$$

Aus dieser Gleichung wird b berechnet: $b = \frac{8}{5}$.

Hyperbelgleichung: $\underline{\underline{\frac{25x^2}{36} - \frac{25y^2}{64} = 1}}$, Asymptotengleichungen: $\underline{\underline{y = \pm\frac{4}{3}x}}$.

Für den Winkel φ zwischen den Asymptoten folgt aus $\varphi = 2\alpha$ und $\tan\alpha = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$ schließlich $\alpha = 53°08'$, $\underline{\underline{\varphi = 106°16'}}$.

3.3.7 Ergänzungen zu den Kegelschnitten

Ohne Beweis werden einige Gemeinsamkeiten der Kegelschnitte angegeben.
Die bisher aufgestellten Kurvengleichungen enthalten kein Glied mit dem Produkt $x \cdot y$. Wenn in der allgemeinen Kurvengleichung 2. Grades (3.53):

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$B \neq 0$ ist, also das *gemischt-quadratische Glied* Bxy existiert, dann sind die Achsen des zugehörigen Kegelschnitts nicht wie bisher parallel zu den Koordinatenachsen, sondern bilden mit diesen einen Winkel φ. Durch eine Drehung des Koordinatensystems um den Winkel $\varphi \in (0°, 90°)$, der aus

$$\tan 2\varphi = \frac{B}{A - C}$$

berechnet wird, kann der Kegelschnitt in eine achsenparallele Lage gebracht werden.
Die Gleichung (3.53) kann auch sogenannte "Entartungen" darstellen. Z.B. kann der Kreis wegen $r = 0$ zu einem Punkt schrumpfen oder die Hyperbel zu zwei sich schneidenden Geraden entarten.
Mit den Koeffizienten der Gleichung (3.53) kann eine allgemeine Aussage über die dargestellten Kurven gemacht werden:

$4AC - B^2 > 0$: Ellipse, Kreis, Punkt, imaginärer Kegelschnitt

$4AC - B^2 = 0$: Parabel, zwei parallele, zusammenfallende oder imaginäre Geraden

$4AC - B^2 < 0$: Hyperbel, zwei sich schneidende Geraden.

Für die Kegelschnitte läßt sich eine gemeinsame Gleichung in Polarkoordinaten

angeben. Der Pol O fällt mit einem Brennpunkt zusammen, die Polarachse liegt in einer Kegelschnittachse entsprechend den Bildern 3.50 bis 3.52. Dann lautet die **Polargleichung der Kegelschnitte**:

$$\boxed{r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}} \tag{3.77}$$

Gleichung (3.77) beschreibt für

$0 < \varepsilon < 1$ eine Ellipse, $\varphi \in [0, 2\pi)$

$\varepsilon = 1$ eine Parabel, $\varphi \in (0, 2\pi)$

$\varepsilon > 1$ eine Hyperbel, $\varphi \in [0, 2\pi) \setminus \{-\varphi_0, \varphi_0\}$ mit $\tan \varphi_0 = \frac{b}{a}$

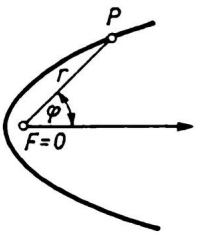


Bild 3.50

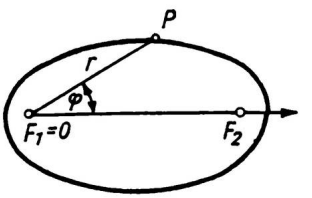


Bild 3.51

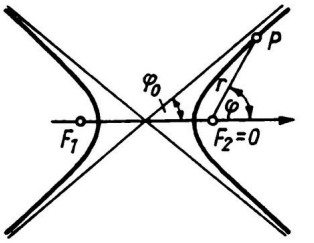


Bild 3.52

Für die Parabel wurde p definiert. Für Ellipse und Hyperbel ist $p = \frac{b^2}{a}$. Bei der Darstellung der Hyperbel ist ausnahmsweise $r < 0$ zugelassen.

Es wurde bereits auf die stereometrische Definition der Kurven 2. Ordnung als ebene Schnitte eines Drehkegels hingewiesen.

In einer Ebene Π liege ein Kreis k und senkrecht zu Π über dem Kreismittelpunkt M ein Punkt S. Die Menge der Geraden durch S und die Punkte von k bilden einen Drehkegel. Die Geraden sind Mantellinien des Kegels und schließen mit Π den Winkel β ein (Bild 3.53).

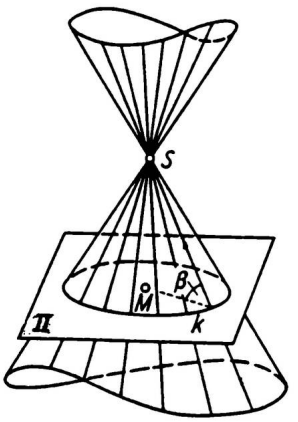


Bild 3.53

Eine Ebene E habe gegen Π den Neigungswinkel α. Die Schnittkurve zwischen der Ebene E und dem Kegel ist abhängig von der Größenbeziehung zwischen α und β.

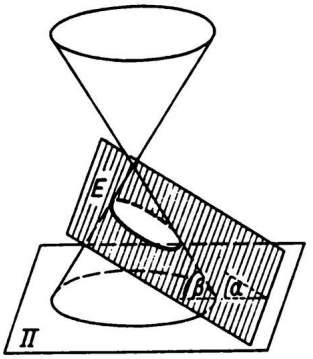


Bild 3.54

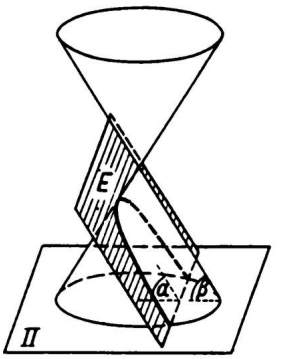


Bild 3.55

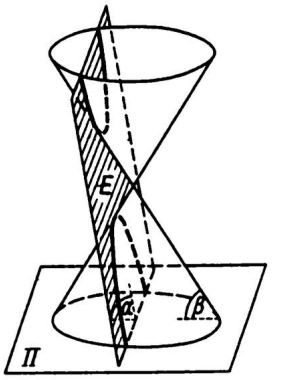


Bild 3.56

Als Schnittkurve ergibt sich für

$\alpha < \beta$ die Ellipse (Bild 3.54), für $\alpha = 0$ der Kreis,

$\alpha = \beta$ die Parabel (Bild 3.55)

$\alpha > \beta$ die Hyperbel (Bild 3.56)

Anmerkung: Ein Beweis für die Übereinstimmung der Kurven 2. Ordnung mit den Kegelschnitten wird mit Hilfe der Dandelinschen Kugeln geführt, worauf hier nicht eingegangen wird.

Aufgaben 3.26 bis 3.62

3.4 Analytische Geometrie des Raumes

3.4.1 Gerade

Die folgenden Betrachtungen beschränken sich auf die Darstellung der Geraden und der Ebene, auf die Grundaufgaben für Geraden und Ebenen sowie auf einen kurzen Überblick über die Flächen 2. Grades. Einige technisch wichtige Raumkurven und Flächen werden in der Differentialgeometrie im Abschnitt 11 behandelt. Zugrunde gelegt wird ein dreiachsiges cartesisches Koordinatensystem (Rechtssystem). Ist eine Strecke im Raum durch ihre Endpunkte $P_1(x_1; y_1; z_1)$, $P_2(x_2; y_2; z_2)$ oder durch die Ortsvektoren dieser Endpunkte $\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$ gegeben, dann erhält man die Länge der Strecke mit der **Abstandsformel**

$$\boxed{l = \overline{P_1P_2} = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \quad (3.78)$$

Eine Gerade g sei durch einen Punkt $P_1(x_1; y_1; z_1)$ und einen Vektor, ihren *Richtungsvektor*, $\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{i} + u_y\boldsymbol{j} + u_z\boldsymbol{k}$, festgelegt (Bild 3.57). Ist $P(x; y; z)$ ein variabler Geradenpunkt mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{r}$, dann lautet die **Punktrichtungsform der Geradengleichung**

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{u}t} \qquad t \in \mathbb{R} \tag{3.79}$$

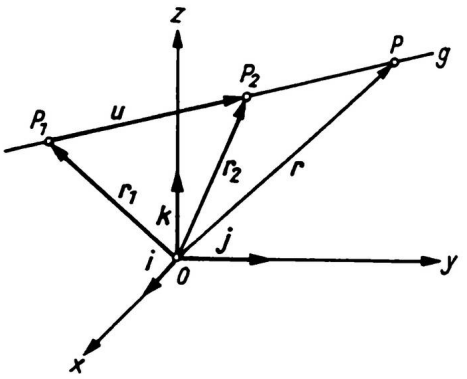


Bild 3.57

Diese Vektorgleichung faßt drei skalare Gleichungen zusammen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} t \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} x &= x_1 + u_x t \\ y &= y_1 + u_y t \\ z &= z_1 + u_z t \end{aligned}$$

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ erhält man einen Geradenpunkt. Für einen Punkt P_0 gilt $P_0 \in g$ genau dann, wenn ein $t = t_0$ existiert, so daß mit t_0 alle drei in

$$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{u}t_0$$

enthaltenen skalaren Gleichungen erfüllt sind.

Ist die Gerade durch zwei Punkte P_1, P_2 mit den Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_1$ bzw. $\boldsymbol{r}_2$ gegeben, dann ergibt sich mit $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ aus (3.79) die

Zweipunkteform der Geradengleichung

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)t} \qquad t \in \mathbb{R} \tag{3.80}$$

Beispiel 3.28

Eine Gerade g geht durch die Punkte $P_1(4;2;4)$, $P_2(7;5;-2)$.

a) Wie heißt ihre Gleichung? b) Liegen die Punkte $P_3(1;-1;10)$, $P_4(10;8;-7)$ auf der Geraden? c) In welchen Punkten durchstößt die Gerade die x,y-Ebene?

Lösung:

a) Nach Gleichung (3.79) lautet die Geradengleichung

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} t \tag{I}$$

b) Damit $P_3 \in g$, muß ein $t = t_3$ existieren mit $\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_1 + (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)t_3$ oder

$$\begin{aligned} 1 &= 4 + 3t_3 \\ -1 &= 2 + 3t_3 \\ 10 &= 4 - 6t_3 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $t_3 = -1$. Mit diesem Wert sind auch die 2. und 3. Gleichung erfüllt:

$-1 = 2 - 3$ und $10 = 4 + 6$

$\underline{\underline{P_3 \in g}}$

Für P_4 folgt $\boldsymbol{r}_4 = \boldsymbol{r}_1 + (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)t_4$

$$\begin{aligned} 10 &= 4 + 3t_4 \quad \Longrightarrow \quad t_4 = 2 \\ 8 &= 2 + 3t_4 \qquad\qquad\;\; 8 = 2 + 6 \\ -7 &= 4 - 6t_4 \qquad\qquad -7 \neq -8 \end{aligned}$$

$\underline{\underline{P_4 \notin g}}$

c) Für den Schnittpunkt P_5 der Geraden mit der x,y-Ebene ist $z_5 = 0$. Aus der 3. Gleichung von (I) folgt

$0 = 4 - 6t_5 \Longrightarrow t_5 = \dfrac{2}{3}$ und damit aus den beiden ersten Gleichungen:

$x_5 = 4 + 3 \cdot \dfrac{2}{3} = 6\,, \quad y_5 = 2 + 3 \cdot \dfrac{2}{3} = 4$

$\underline{\underline{P_5(6;4;0)}}$

Gesucht wird der **Abstand eines Punktes von einer Geraden**. Die Gerade g habe die Gleichung: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{u}t$, der gegebene Punkt sei P_0 (Bild 3.58). Der gesuchte Abstand ist $d = |\boldsymbol{d}|$ mit $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{P_0P_2}$, wenn P_2 der Fußpunkt des Lotes von P_0 auf g ist. Es ist

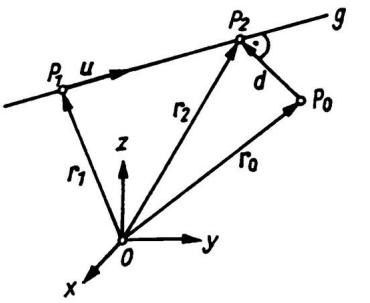


Bild 3.58

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{d} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{u}t_2.$$

Gleichgesetzt ergibt

$$\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{u}t_2 \tag{II}$$

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{u}t_2$$

Wegen $\boldsymbol{d} \perp g$ gilt: $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{d} = 0$ (III)

Gleichung (II) wird skalar mit $\boldsymbol{u}$ multipliziert und (III) beachtet

$$0 = \boldsymbol{u}\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{u}\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{u}^2 t_2$$

$$t_2 = \frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1)}{\boldsymbol{u}^2} \tag{IV}$$

Eingesetzt in (II) ergibt

$$\boxed{\boldsymbol{d} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0 + \frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1)}{\boldsymbol{u}^2}\boldsymbol{u}} \tag{3.81}$$

und damit ist der gesuchte Abstand $d = |\boldsymbol{d}|$.

Beispiel 3.29

Welchen Abstand hat der Punkt $P_0(-2;3;4)$ von der Geraden mit der Gleichung $\boldsymbol{r} = (-1,-1,-1)^T + (1,2,-2)^T \cdot t$?

Lösung:

Nach (IV) ist

$$t_2 = \frac{1}{1+4+4}(1\ 2\ -2)\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\\5\end{pmatrix} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3} \quad \text{und nach (II)}$$

$$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-14\\-13\end{pmatrix}$$

$$d = |\boldsymbol{d}| = \sqrt{41} = \underline{\underline{6,40}}$$

Zwei Geraden im Raum können sich schneiden, parallel oder windschief zueinander sein oder zusammenfallen.

Für den ersten Fall wird der **Schnittpunkt von zwei Geraden** gesucht.

Gegeben seien $g_1 : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{u}t$, $g_2 : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{v}s$

Die Gleichungen werden gleichgesetzt:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{u}t = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{v}s \quad \text{oder} \\ &\boldsymbol{u}t - \boldsymbol{v}s = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \quad \text{d.h.} \quad \begin{aligned} u_x t - v_x s &= x_2 - x_1 \\ u_y t - v_y s &= y_2 - y_1 \\ u_z t - v_z s &= z_2 - z_1 \end{aligned} \end{aligned} \qquad \text{(V)}$$

Das lineare Gleichungssystem hat drei Gleichungen für die zwei Unbekannten t und s. Man berechnet aus zwei Gleichungen (falls möglich) t und s und prüft, ob diese Werte auch die dritte Gleichung erfüllen.

Hat (V) genau eine Lösung $t = t_S$, $s = s_S$, dann schneiden sich g_1 und g_2. Die Koordinaten des Schnittpunktes S erhält man durch Einsetzen von t_S bzw. s_S in die Geradengleichungen.

Hat (V) keine Lösung, dann sind entweder g_1, g_2 parallel, d.h. $\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, oder g_1, g_2 sind windschief zueinander.

Hat (V) unendlich viele Lösungen, dann ist $g_1 = g_2$.

Beispiel 3.30

Man untersuche, ob sich die folgenden Geraden schneiden, und berechne einen vorhandenen Schnittpunkt.

a) $g_1 : \boldsymbol{r} = (5\ 8\ -7)^T + (1\ 3\ 2)^T \cdot t$, $g_2 : \boldsymbol{r} = (-1\ -7\ -5)^T + (4\ 9\ -6)^T \cdot s$

b) $g_1 : \boldsymbol{r} = (3\ -1\ 2)^T + (2\ 4\ 10)^T \cdot t$, $g_2 : \boldsymbol{r} = (-1\ 5\ 3)^T + (-4\ 4\ 6)^T \cdot s$

Lösung:

a) Das Gleichungssystem (V) lautet mit den gegebenen Werten

$t - 4s = -6$
$3t - 9s = -15$
$2t + 6s = 2$
Aus den beiden ersten Gleichungen folgt: $t_S = -2$, $s_S = 1$.

Diese Werte erfüllen auch die dritte Gleichung: $-4 + 6 = 2$, d.h. $g_1 \cap g_2 = S$.
Die Koordinaten von S folgen z.B. aus der Gleichung von g_1 mit t_S:

$$\boldsymbol{r}_S = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (-2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -11 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{S(3;2;-11)}}$$

b)

$$\left.\begin{aligned} 2t + 4s &= -4 \\ 4t - 4s &= 6 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow t_S = \frac{1}{3},\ s_S = -\frac{7}{6}$$

$10t - 6s = 1$

Mit t_S, s_S folgt für die dritte Gleichung $\frac{10}{3} + 7 \neq 1$. Die Geraden schneiden sich nicht, sondern sind wegen $\boldsymbol{u} \neq \lambda \boldsymbol{v}$ windschief zueinander.

Unter dem **Schnittwinkel von zwei Geraden** versteht man den Winkel zwischen den Richtungsvektoren beider Geraden, auch wenn sich die zwei Geraden nicht schneiden. Ist φ der Winkel zwischen den Geraden

$g_1 : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{u}t$, $g_2 : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{v}t$, dann gilt

$$\boxed{\varphi = \arccos \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}|}} \tag{3.82}$$

Gesucht wird der **Abstand von zwei windschiefen Geraden**.

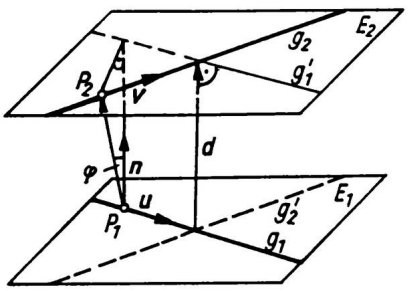


Bild 3.59

Die Geraden $g_1 : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{u}t$, $g_2 : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{v}s$ seien windschief zueinander (Bild 3.59). Man denke sich g_1 parallel verschoben bis zum Schnitt mit g_2, d.h. in die Lage g_1'. Entsprechend werde g_2 parallel verschoben nach g_2'. g_1 und g_2' spannen eine Ebene E_1, g_2 und g_1' eine Ebene E_2 auf. Der gesuchte Abstand d von g_1 und g_2 ist der Abstand von E_1 und E_2. Der Abstandsvektor $\boldsymbol{d}$ muß orthogonal zu g_1 und g_2 sein. Seine Richtung ist daher durch den Vektor

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \tag{VI}$$

gegeben ($\boldsymbol{n}$ ist Normalenvektor von E_1 und E_2). Mit dem Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ wird das Skalarprodukt

$$\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = |\boldsymbol{n}| \cdot \overline{P_1P_2} \cdot \cos\varphi$$

gebildet. Daraus folgt mit $\overrightarrow{P_1P_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, $\overline{P_1P_2}\cos\varphi = d$, Gleichung (VI) und wegen $d > 0$:

$$|(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)| = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| \cdot d$$

$$\boxed{d = \frac{|(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)|}{|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|}} \tag{3.83}$$

Beispiel 3.31

Welchen Abstand haben die windschiefen Geraden aus Beispiel 3.30b) ?

Lösung:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 4 & 10 \\ -4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -52 \\ 24 \end{pmatrix}, \quad |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = \sqrt{3536}$$

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})^T \cdot (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = (-16 \ -52 \ 24) \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = -224$$

$$d = \frac{224}{\sqrt{3536}} = 3{,}77$$

3.4.2 Ebene

Eine Ebene ist festgelegt durch drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte oder durch eine Gerade und einen nicht auf ihr liegenden Punkt oder durch zwei sich schneidende oder durch zwei parallele Geraden.

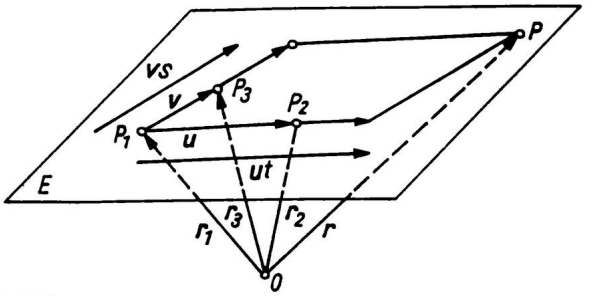


Bild 3.60

Eine Ebene E[1] sei durch drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte P_1, P_2, P_3 mit den Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ gegeben (Bild 3.60). P ist ein variabler Punkt der Ebene mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{r}$. P läßt sich als Linearkombination der Vektoren

[1] E: Großbuchstabe Epsilon

$\overrightarrow{P_1P_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, $\overrightarrow{P_1P_3} = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1$ beschreiben. Man erhält die **Parameterdarstellung der Ebene**:

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\,t + (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1)\,s} \qquad t, s \in \mathbb{R} \tag{3.84}$$

oder mit $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{v}$

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{u}t + \boldsymbol{v}s} \tag{3.85}$$

Während die Gerade eine einparametrige Punktmenge ist, stellt die Ebene eine zweiparametrige Punktmenge dar.
Gleichung (3.85) gilt auch für den Fall, daß die Ebene durch zwei sich schneidende Geraden $g_1 : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{u}t$, $g_2 : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{v}s$ gegeben ist.

Beispiel 3.32

Eine Ebene E geht durch die Punkte $P_1(2;1;4)$, $P_2(1;5;-1)$, $P_3(-1;0;5)$. Wie heißt ihre Gleichung? Wie heißt die Gleichung der Schnittgeraden zwischen E und der x,y-Ebene?

Lösung:
Die Gleichung der Ebene ist nach (3.84):

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} s. \tag{I}$$

Für die Schnittgerade mit der x,y-Ebene folgt mit $z = 0$ aus der dritten Gleichung von (I):

$z = 0 = 4 - 5t + s \Longrightarrow s = 5t - 4$

Mit diesem Term für s folgt aus (I) die Gleichung der Schnittgeraden:

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (5t - 4) \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -16 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} t.$$

Unter dem **Normalenvektor** $\boldsymbol{n}$ der Ebene E versteht man einen zu E orthogonalen Vektor (Bild 3.61). Der Vektor $\boldsymbol{n}_0 = \dfrac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}$ heißt *Normaleneinheitsvektor.*

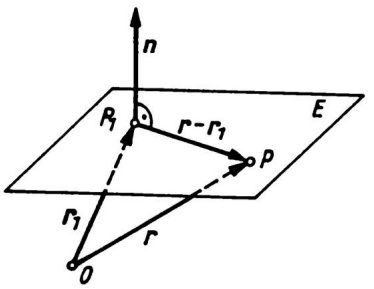


Bild 3.61

Ist P_1 ein fester Punkt der Ebene, P der variable Punkt, dann ist stets $\overrightarrow{P_1P} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1$ orthogonal zu $\boldsymbol{n}$, d.h.

$$\boxed{\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) = 0} \tag{3.86}$$

Gleichung (3.86) ist die Gleichung der Ebene, wenn ein Punkt P_1 und ein Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ gegeben sind. Mit $\boldsymbol{n}^T = (n_x\, n_y\, n_z)$, $\boldsymbol{r}_1^T = (x_1\, y_1\, z_1)$ erhält man für das Skalarprodukt (3.86) in der Form $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}_1 = 0$:

$$n_x x + n_y y + n_z z - (n_x x_1 + n_y y_1 + n_z z_1) = 0$$

Man setzt $A = n_x$, $B = n_y$, $C = n_z$, $D = -(n_x x_1 + n_y y_1 + n_z z_1)$
und erhält die **parameterfreie Gleichung der Ebene**

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \tag{3.87}$$

Beispiel 3.33

Wie heißt die Gleichung der Ebene durch $P_1(2;-1;3)$ orthogonal zum Vektor $\boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$?

Lösung:

Es ist $A = 2$, $B = 5$, $C = -4$, $D = -\boldsymbol{n}\boldsymbol{r}_1 = -(2 \cdot 2 + 5(-1) - 4 \cdot 3) = 13$.
$E:\ 2x + 5y - 4z + 13 = 0$.

Ist die Parameterdarstellung (3.85) gegeben und soll zur parameterfreien Darstellung (3.87) übergegangen werden, dann kann man z.B. einen Normalenvektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ berechnen und mit $\boldsymbol{n}$ und dem gegebenen Punkt P_1 über (3.86) die Gleichung (3.87) aufstellen.
Die Gleichung (3.84) lautet umgestellt

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 = (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\, t + (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1)\, s.$$

Die drei Vektoren $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1$ sind linear abhängig. Daher ist nach Abschnitt 3.2.5

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{II}$$

Mit den Determinantengesetzen läßt sich die Determinante umformen, und man erhält die **Gleichung der Ebene durch drei Punkte** in Determinantenform

$$\boxed{\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0} \tag{3.88}$$

Sind die Achsenabschnitte a, b, c der Ebene, d.h. die Ebenenpunkte $P_1(a;0;0)$, $P_2(0;b;0)$, $P_3(0;0;c)$ gegeben, dann erhält man aus (II) die Ebenengleichung

$$\begin{vmatrix} x-a & -a & -a \\ y & b & 0 \\ z & 0 & c \end{vmatrix} = bcx - abc + acy + abz = 0$$

Umgeformt ergibt sich die **Achsenabschnittsgleichung der Ebene**:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1} \tag{3.89}$$

Schnittgerade von zwei Ebenen

Gegeben sind zwei nicht parallele Ebenen

$$E_1 : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{u}_1 t + \boldsymbol{v}_1 s,$$
$$E_2 : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{u}_2 \bar{t} + \boldsymbol{v}_2 \bar{s}.$$

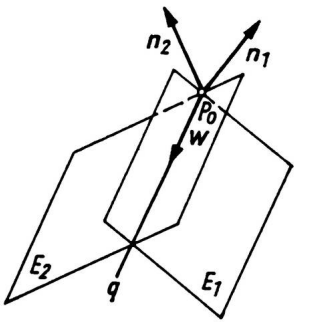


Bild 3.62

Gesucht wird die Gleichung der Schnittgeraden $g = E_1 \cap E_2$. Es gibt mehrere Wege zur Lösung der Aufgabe.

1. Für g werden ein Richtungsvektor und ein Punkt bestimmt.

Der Richtungsvektor $\boldsymbol{w}$ muß orthogonal zu den Normalenvektoren $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ beider Ebenen sein (Bild 3.62):

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = (\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{v}_1) \times (\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{v}_2).$$

Der Ortsvektor $\boldsymbol{r}_0$ eines Punktes P_0 der Schnittgeraden erfüllt beide Ebenengleichungen:

$$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{u}_1 t_0 + \boldsymbol{v}_1 s_0 = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{u}_2 \overline{t_0} + \boldsymbol{v}_2 \overline{s_0} \tag{III}$$

(III) ist ein Gleichungssystem mit drei linearen Gleichungen für die vier Unbekannten $t_0, s_0, \overline{t_0}, \overline{s_0}$. Man kann einen Parameter beliebig wählen, z.B. $\overline{s_0} = 0$ und diesen Wert in (III) einsetzen. Aus dem Gleichungssystem (III) können die drei anderen Parameter dann eindeutig bestimmt werden. Durch Einsetzen dieser Werte in (III) erhält man $\boldsymbol{r}_0$ und damit die Gleichung der Schnittgeraden:

$$g : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{w} \cdot \lambda$$

2. Man drückt unter Verwendung des Gleichungssystems (III) drei von den vier Parametern durch den vierten aus. Z.B. $t, s, \bar{t}$ durch $\bar{s}$ und setzt $t = t(\bar{s})$, $s = s(\bar{s})$, $\bar{t} = \bar{t}(\bar{s})$ in die Parameterdarstellung von E_1 oder E_2 ein. Aus der Gleichung von E_1 z.B. erhält man mit $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{u}_1 t(\bar{s}) + \boldsymbol{v}_1 s(\bar{s})$ eine einparametrige Punktmenge, das ist die Gleichung der Schnittgeraden.

3. Sind beide Ebenen in der parameterfreien Darstellung (3.87) gegeben:

$$E_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$E_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

dann kann z.B. $z = 0$ gesetzt werden, und man erhält mit

$$A_1x + B_1y + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + D_2 = 0$$

ein Gleichungssystem für die Koordinaten x, y des Durchstoßpunktes der Schnittgeraden durch die x, y-Ebene. Entsprechend erhält man mit $x = 0$ oder $y = 0$ einen zweiten Durchstoßpunkt und mit der Zweipunkteform (3.80) die Gleichung der Schnittgeraden.

Beispiel 3.34

Gesucht ist die Schnittgerade der Ebenen

$$E_1 : \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} s, \quad E_2 : \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \bar{t} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \bar{s}$$

Lösung:

$$\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vereinfachend wird mit $\boldsymbol{w}' = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ gerechnet.
Das Gleichungssystem (III) lautet, wenn z.B. $\bar{s} = \overline{s_0} = 0$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} 3 + t + 3s &= 2 - \bar{t} \\ 2 - 2t - 4s &= 1 - 3\bar{t} \\ -1 + 2t + 4s &= -6 + \bar{t} \end{aligned}$$

Es hat die Lösungen $t_0 = -16$, $s_0 = 6$, $\overline{t_0} = -3$.
Aus der Gleichung von E_1 folgt für einen Schnittpunkt P_0 von E_1 und E_2:
$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{u}t_0 + \boldsymbol{v}s_0 = 5\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j} - 9\boldsymbol{k}$.
Damit lautet die Gleichung der Schnittgeraden:

$$g : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{w}'\lambda = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \lambda.$$

Beispiel 3.35

Welche Schnittgerade haben die Ebenen

$E_1: \; 3x + 6y + 4z - 24 = 0\,, \quad E_2: \; 6x - 2y + 3z - 6 = 0\,?$

Lösung:

Man erhält aus den Ebenengleichungen mit $z = 0$ bzw. $y = 0$ die Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} 3x \;+\; 6y \;&=\; 24 \\ 6x \;-\; 2y \;&=\; 6 \end{aligned} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{aligned} 3x \;+\; 4z \;&=\; 24 \\ 6x \;+\; 3z \;&=\; 6 \end{aligned}$$

mit den Lösungen

$$x_1 = 2\,, \; y_1 = 3 \qquad\qquad x_2 = -3{,}2\,, \; z_2 = 8{,}4$$

und damit zwei Punkte der Schnittgeraden

$$P_1(2;3;0) \qquad\qquad P_2(-3{,}2;0;8{,}4)$$

Die Gleichung der Schnittgeraden $g = P_1P_2$ ist nach (3.80):

$$g: \; \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5{,}2 \\ -3{,}0 \\ 8{,}4 \end{pmatrix} t$$

Winkel zwischen zwei Ebenen

Als Winkel zwischen zwei Ebenen E_1 und E_2 wird der Winkel φ zwischen den Normalenvektoren $\mathbf{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ der Ebenen definiert (Bild 3.63). Die Winkelebene von φ ist orthogonal zur Schnittgeraden $g = E_1 \cap E_2$. Über das Skalarprodukt erhält man

$$\boxed{\varphi = \arccos \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|}} \tag{3.90}$$

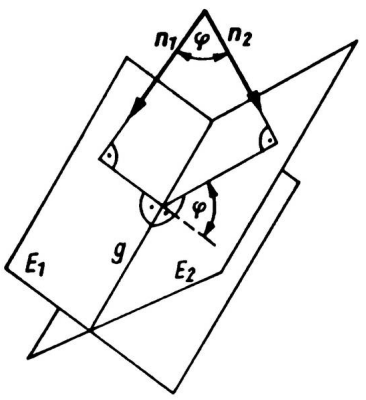


Bild 3.63

Haben die Ebenen die parameterfreie Darstellung, dann ist

$$\boxed{\varphi = \arccos \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}} \tag{3.91}$$

Abstand eines Punktes von einer Ebene

Gegeben sind eine Ebene E durch P_1 und $\boldsymbol{n}$ sowie ein Punkt P_0 außerhalb der Ebene. Gesucht wird der Abstand d des Punktes P_0 von E (Bild 3.64)

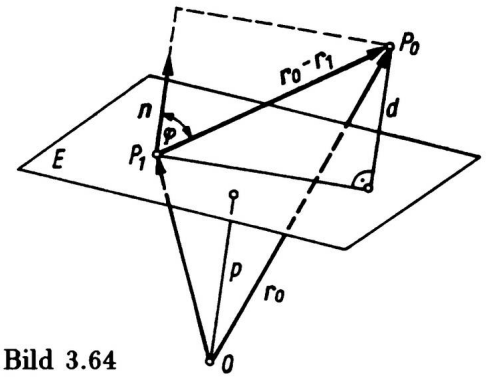


Bild 3.64

Man bildet das Skalarprodukt von $\boldsymbol{n}$ mit $\overrightarrow{P_1P_0} = \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1$:

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1) = |\boldsymbol{n}| \cdot |\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1| \cdot \cos\varphi$$

und erhält mit $|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1| \cdot \cos\varphi = d$ nach Umstellung

$$\boxed{d = \frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{n}|}} \tag{3.92}$$

$\boldsymbol{n}$ soll wie in Bild 3.64 vom Ursprung O in Richtung zur Ebene orientiert sein. Man erhält dann aus (3.92) den Abstand d positiv oder negativ, je nachdem, ob P_0 und O auf verschiedenen Seiten von E oder auf der gleichen Seite von E liegen (wegen φ spitz oder stumpf).

Ist $P_0 = O$, dann folgt aus (3.92) mit

$$p = -\frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{n}|}$$

der Abstand p der Ebene vom Koordinatenursprung.

Ist die Ebene in der parameterfreien Darstellung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

gegeben, dann folgt mit $\boldsymbol{n}^T = (A\ B\ C)$, $|\boldsymbol{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, $-\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}_1 = D$ für den Abstand

$$\boxed{d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{-\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot \operatorname{sign} D} \tag{3.93}$$

Durch den Faktor $\operatorname{sign} D$ wird die oben getroffene Festlegung über die Orientierung von $\boldsymbol{n}$ und damit über das Vorzeichen von d gesichert.

Beispiel 3.36

Welchen Abstand hat der Punkt $P_0(3;4;2)$ von der Ebene mit der Gleichung $6x + 4y + 3z - 12 = 0$?

Lösung:

Nach der Formel (3.93) ist

$$d = \frac{6 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 3 - 12}{-\sqrt{36 + 16 + 9}} \cdot (-1) = \frac{28}{\sqrt{61}} = \underline{\underline{3,59}}$$

P_0 und O liegen wegen $d > 0$ auf verschiedenen Seiten der Ebene.

Schnittpunkt zwischen einer Geraden und einer Ebene

Gesucht wird der Schnittpunkt S zwischen der Ebene $E: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{u}t + \boldsymbol{v}s$ und der Geraden $g: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{w}\lambda$.

Durch Gleichsetzen der Ebenen- und Geradengleichung erhält man das Gleichungssystem

$$\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{u}t + \boldsymbol{v}s = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{w}\lambda$$

aus drei linearen Gleichungen mit drei Unbekannten t, s, λ. Es genügt, $\lambda = \lambda_S$ zu berechnen. Mit λ_S folgen aus der Geradengleichung die Koordinaten des Schnittpunktes S.

Ist die Ebene durch die Gleichung $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}) = 0$ gegeben, dann folgt durch Einsetzen von $\boldsymbol{r}$ aus der Geradengleichung $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{w}\lambda$ in die Ebenengleichung

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{w}\lambda) = 0$$
$$\boldsymbol{n}\boldsymbol{w}\lambda = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2).$$

Aus dieser Gleichung kann $\lambda = \lambda_S$ berechnet und zur Bestimmung von S in die Geradengleichung eingesetzt werden.

Beispiel 3.37

Eine Gerade geht durch den Punkt $P_1(3;-4;-7)$ und ist parallel zum Vektor $\boldsymbol{a} = -3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$. In welchem Punkt S schneidet die Gerade die Ebene E : $2x - 2y - z = 3$?

Lösung:

Man erhält für die Geradengleichung

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \lambda \quad \text{und für } S: \quad \begin{aligned} x_S &= 3 - 3\lambda_S \\ y_S &= -4 + 5\lambda_S \\ z_S &= -7 + 6\lambda_S \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Ebenengleichung ergibt

$$2(3 - 3\lambda_S) - 2(-4 + 5\lambda_S) - (-7 + 6\lambda_S) = 3, \quad \lambda_S = \frac{9}{11}$$

Aus der Geradengleichung folgt mit λ_S:

$$\boldsymbol{r}_S = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \frac{9}{11} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -23 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{S\left(\frac{6}{11}; \frac{1}{11}; -\frac{23}{11}\right)}}$$

Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene

Unter dem Neigungswinkel α, den eine Gerade g mit einer Ebene E bildet, versteht man den Winkel zwischen g und der orthogonalen Projektion g' von g auf E (Bild 3.65). Der Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ der Ebene bilde mit dem Richtungsvektor $\boldsymbol{u}$ der Geraden den Winkel β. Es ist $\beta = 90° \pm \alpha$ je nachdem, ob β spitz oder stumpf ist. Also ist

$$|\cos\beta| = |\sin\alpha| .$$

Aus dem Skalarprodukt

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u} = |\boldsymbol{n}| \cdot |\boldsymbol{u}| \cdot \cos\beta \quad \text{folgt}$$

$$|\sin\alpha| = |\cos\beta| = \left| \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{n}| \cdot |\boldsymbol{u}|} \right|$$

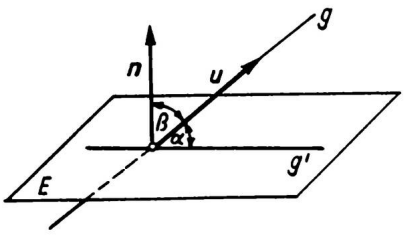


Bild 3.65

Wegen $\alpha \in [0°, 90°]$ ist stets $\sin\alpha \geq 0$, d.h. $|\sin\alpha| = \sin\alpha$:

$$\boxed{\alpha = \arcsin \left| \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{n}| \cdot |\boldsymbol{u}|} \right|} \tag{3.94}$$

Für die Koordinatendarstellung ergibt sich

$$\boxed{\alpha = \arcsin \left| \frac{A u_x + B u_y + C u_z}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}} \right|} \tag{3.95}$$

Beispiel 3.38

Gesucht wird der Winkel zwischen der Ebene $E: 4x + 2y - 6z - 12 = 0$ und der Geraden $g: \boldsymbol{r} = (\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}) + (2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k})\,t$.

Lösung:

Nach (3.95) ist

$$\alpha = \arcsin \frac{8 + 6 + 24}{\sqrt{56} \cdot \sqrt{29}} = \underline{\underline{70,55°}}$$

3.4.3 Flächen 2. Ordnung

Ebenso wie die Kurven 2. Ordnung haben auch die Flächen 2. Ordnung bei naturwissenschaftlichen und technischen Aufgaben eine besondere Bedeutung. Sie werden durch die allgemeine Gleichung 2. Grades in den Koordinaten x, y, z dargestellt:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0 \qquad \text{(I)}$$

(A, B, C nicht gleichzeitig null).

Wie die Kegelschnitte haben einige dieser Flächen einen Mittelpunkt oder einen

Scheitelpunkt. Durch eine Koordinatentransformation im Raum kann man von dem Koordinatensystem in (I) zu einem günstiger gelegenen Koordinatensystem übergehen, bei dem z.B. der Koordinatenursprung mit dem Mittelpunkt der Fläche und die Koordinatenachsen mit den Achsen der Fläche zusammenfallen. Aus (I) ergibt sich dann die **Normalform** (kanonische Form, Mittelpunkts- oder Scheitelpunktsform) der Flächengleichung.

Im folgenden wird ein Überblick über die verschiedenen Arten der Flächen 2. Ordnung gegeben mit den zugehörigen Normalformen der Flächengleichungen.

Ellipsoid (Bild 3.66)

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1} \qquad (3.96)$$

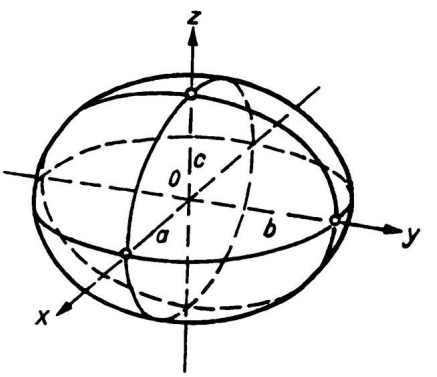


Bild 3.66

a, b, c sind die Halbachsen.

$a \neq b \neq c$, $a \neq c$: *dreiachsiges Ellipsoid*

Sind zwei Achsen gleich, entsteht ein *Rotationsellipsoid*

$a = b \neq c$: zusammengedrücktes Rotationsellipsoid, *Sphäroid* (Linsenform), Rotation um die z-Achse;

$a = c \neq b$: langgestrecktes Rotationsellipsoid (Zigarrenform), Rotation um die y-Achse.

$a = b = c$: **Kugel**

$$\boxed{x^2+y^2+z^2=a^2} \qquad (3.97)$$

Einschaliges Hyperboloid (Bild 3.67)

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1} \qquad (3.98)$$

a, b reelle Halbachsen, c imaginäre Halbachse

Durch jeden Flächenpunkt gehen zwei in der Fläche liegende Geraden.

$a = b$: einschaliges Rotationshyperboloid (Kühlturm), Rotation um die z-Achse

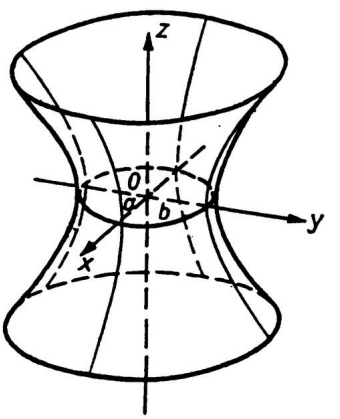


Bild 3.67

Zweischaliges Hyperboloid (Bild 3.68)

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1} \qquad (3.99)$$

a, b imaginäre Halbachsen, c reelle Halbachse
$a = b$: *zweischaliges Rotationshyperboloid*,
Rotation um die z-Achse

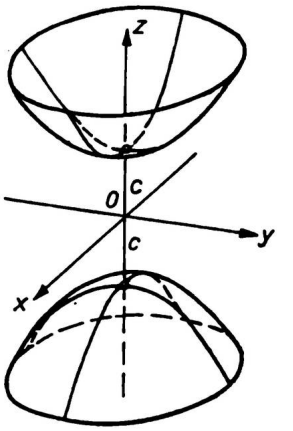


Bild 3.68

Kegel (Bild 3.69)

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0} \qquad (3.100)$$

$a \neq b$: *gerader elliptischer Kegel*
$a = b$: *gerader Kreiskegel*
Der Kegel mit Gl. (3.100) ist Asymptotenkegel der Hyperboloide mit den Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$$

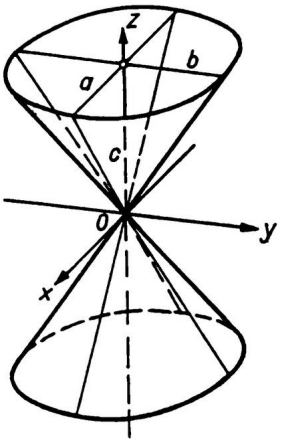


Bild 3.69

Elliptisches Paraboloid (Bild 3.70)

$$\boxed{z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}} \qquad (3.101)$$

$a = b$: *Rotationsparaboloid*,
Rotation um die z-Achse

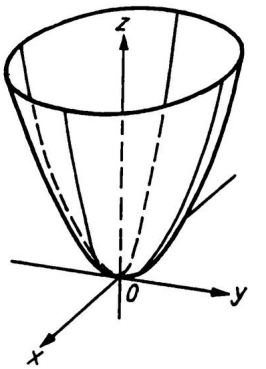


Bild 3.70

Hyperbolisches Paraboloid (Bild 3.71)

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \tag{3.102}$$

Die Fläche heißt auch *Sattelfläche*,
O ist der *Sattelpunkt*.
Durch jeden Flächenpunkt gehen zwei in der Fläche liegende Geraden.

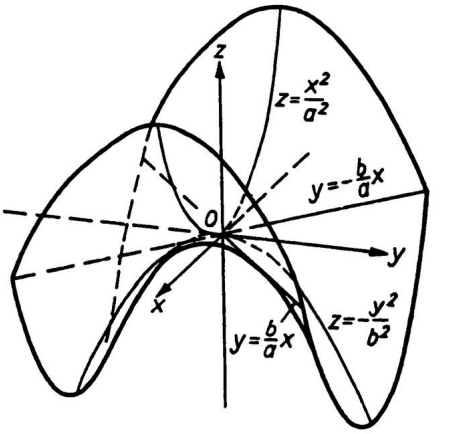


Bild 3.71

Elliptischer Zylinder (Bild 3.72)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.103}$$

$a \neq b$: *gerader elliptischer Zylinder*
$a = b$: *gerader Kreiszylinder*,
Rotationsfläche, Rotation um die z-Achse

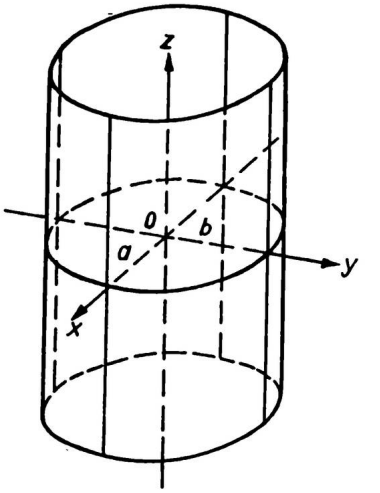


Bild 3.72

Hyperbolischer Zylinder (Bild 3.73)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.104}$$

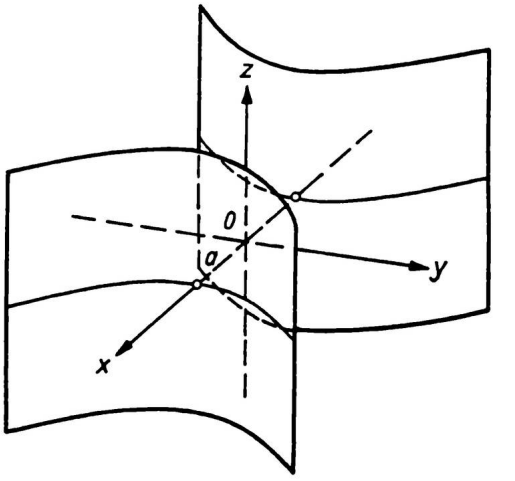


Bild 3.73

Parabolischer Zylinder (Bild 3.74)

$$\boxed{y^2 = 2px} \qquad (3.105)$$

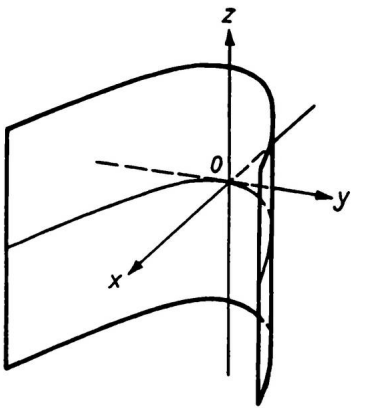


Bild 3.74

Die Zylinderflächen zählen bereits zu den sogenannten *uneigentlichen Flächen 2. Ordnung* oder *Entartungen.* Durch entsprechende Wahl der reellen Zahlen A bis L in (I) können weitere Entartungen entstehen, wie z.B. durch $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ ein Paar sich schneidender Ebenen oder durch $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ ein Punkt.

In den Bildern 3.66 bis 3.74 wurden die Schnittkurven zwischen den Flächen und den Koordinatenebenen eingezeichnet. Z.B. ergibt sich für das hyperbolische Paraboloid in Bild 3.71 mit der Gleichung (3.102) für den Schnitt mit der

xz-Ebene mit $y = 0$: $z = \frac{x^2}{a^2}$ eine nach oben geöffnete Parabel

yz-Ebene mit $x = 0$: $z = \frac{-y^2}{b^2}$ eine nach unten geöffnete Parabel

xy-Ebene mit $z = 0$: $y = \pm\frac{b}{a}x$ zwei durch O gehende Geraden.

Der Leser bestimme zur Übung für die anderen Flächen die Schnittkurven.

Aufgaben 3.63 bis 3.84

3.5 Aufgaben

3.1 Die Koordinatensysteme K und K' haben parallele und gleichgerichtete Achsen. O' hat in K die Koordinaten $a = 4$, $b = 7$.

a) Welche Koordinaten hat der Punkt $A(x_A = -2; y_A = 5)$ in K' ?

b) Wie heißt die Gleichung der Kurve k : $y^2 - 4x - 14y + 33 = 0$ im System K' ?

3.2 Wie heißt die Gleichung der Kurve k : $x^2 + y^2 - 25 = 0$ in dem nach Bild 3.8 festgelegten System K' ?

3.3 Welche Koordinaten hat der Punkt $P_1(x_1 = 2; y_1 = -8)$ im System K' (Bild 3.75)?

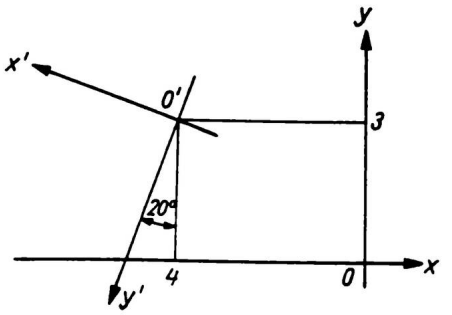


Bild 3.75

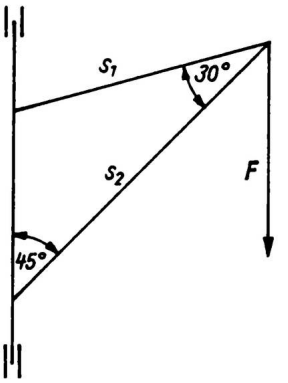


Bild 3.76

3.4 Zwei Punkte P_1 und P_2 haben die Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$. Welcher Ortsvektor führt zum Halbierungspunkt M der Strecke $\overline{P_1P_2}$?

3.5 Wie groß sind die in den Stäben s_1 und s_2 eines Drehkrans (Bild 3.76) auftretenden Kräfte, wenn der Kran eine Last von $F = 18\,000$ N trägt? (Graphische Lösung)

3.6 Die Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ bilden ein Dreieck: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$. Welcher Vektor $\boldsymbol{s}$ ist Seitenhalbierende der Seite $\boldsymbol{b}$?

3.7 Welchen Ortsvektor hat der Schwerpunkt S eines Dreiecks, dessen Eckpunkte A, B, C durch die Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_A$, $\boldsymbol{r}_B$, $\boldsymbol{r}_C$ gegeben sind?

3.8 Man berechne mit den Vektoren $\boldsymbol{a}^T = (4\ -2\ 1)$, $\boldsymbol{b}^T = (6\ 0\ -3)$, $\boldsymbol{c}^T = (-2\ 4\ -5)$ die Terme

a) $3\boldsymbol{a} + \frac{1}{3}\boldsymbol{b}$ b) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) - 2\boldsymbol{c}$ c) $2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$

3.9 Gegeben ist der Vektor $\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$. Gesucht werden die Länge von $\boldsymbol{r}$, der zugehörige Einsvektor und die Winkel zwischen $\boldsymbol{r}$ und den Koordinatenachsen.

3.10 Ein Vektor $\boldsymbol{a}$ schließt mit der x-Achse den Winkel $\alpha = 60°$, mit der z-Achse den Winkel $\gamma = 135°$ und mit der y-Achse einen stumpfen Winkel ein. Seine Länge ist 4. Man berechne $\boldsymbol{a}$.

3.11 Sind die Vektoren

a) $\boldsymbol{a} = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$

b) $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_2 = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_3 = -\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$

linear abhängig oder linear unabhängig?

3.12 Der Vektor $\boldsymbol{t} = 3\boldsymbol{i} - 2{,}7\boldsymbol{j}$ soll in Richtung der beiden Vektoren $\boldsymbol{r} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}$ und $\boldsymbol{s} = 3\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$ in Komponenten zerlegt werden.

3.13 Der Vektor $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ soll in Richtung der Vektoren

a) $\boldsymbol{a} = -3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$

b) $\boldsymbol{a} = -3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$

zerlegt werden.

3.14 Man bilde das Skalarprodukt des Vektors $\boldsymbol{r}_1 = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ mit
a) $\boldsymbol{r}_2 = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, b) $\boldsymbol{r}_3 = -2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k}$, c) $\boldsymbol{r}_4 = -4\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$
Welche Lage zueinander haben beide Vektoren im Fall b) und c)?

3.15 Welchen Winkel schließen die folgenden Vektoren miteinander ein?
a) $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 5\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$
b) $\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}\boldsymbol{i} - \frac{3}{2}\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 5\boldsymbol{i} + \frac{5}{3}\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$

3.16 Ein Körper wird durch die Kraft $\boldsymbol{F} = (410\boldsymbol{i} + 330\boldsymbol{j} - 650\boldsymbol{k})$ N auf dem Weg $\boldsymbol{s} = (-3\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})$ m bewegt. Welche Arbeit muß geleistet werden?

3.17 Welcher Einheitsvektor ist orthogonal zu den Vektoren
$\boldsymbol{a}^T = (2\ -5\ 3)$, $\boldsymbol{b}^T = (1\ 0\ -2)$?

3.18 Zwei Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ bestimmen ein Dreieck. Wie groß ist sein Flächeninhalt?

3.19 Man berechne $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2$

3.20 Man berechne $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ für
a) $\boldsymbol{a}^T = \left(2\ \frac{1}{2}\ -1\right)$, $\boldsymbol{b}^T = \left(\frac{1}{2}\ -2\ 1\right)$
b) $\boldsymbol{a}^T = \left(3\ 2\ -\frac{1}{2}\right)$, $\boldsymbol{b}^T = (-6\ -4\ 1)$

3.21 Ein Dreieck hat die Eckpunkte $P_1(1;1;0)$, $P_2(2;7;2)$, $P_3(5;4;3)$. Wie groß ist sein Flächeninhalt?

3.22 Man berechne das Volumen des von den Vektoren $\boldsymbol{a}^T = (3\ 1\ 1)$, $\boldsymbol{b}^T = (1\ 6\ 3)$, $\boldsymbol{c}^T = (0\ 1\ 6)$ aufgespannten Spats.

3.23 Welches Volumen hat ein Tetraeder mit den Eckpunkten
$P_1(0;0;0)$, $P_2(4;0;0)$, $P_3(1;3;1)$, $P_4(2;2;6)$?

3.24 Wie lautet das vektorielle Produkt der drei Vektoren
$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}$?

3.25 Man bestimme die Parallel- und Normalkomponente des Vektors
$\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ bezüglich
a) $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ b) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

3.26 Welche von den Punkten $P_1(0;5)$, $P_2(4;3)$, $P_3(0;-2)$, $P_4(3;\frac{1}{2})$ liegen auf den Kurven
$k_1 : y = \dfrac{5}{1+x^2}$ $k_2 : 5x^2 - 16y - 32 = 0$
$k_3 : x^2 + y^2 - 25 = 0$ $k_4 : 5x - 6y - 12 = 0$?

3.27 In welchen Punkten schneiden sich die Kurven mit den Gleichungen
a) $x - y + 7 = 0$, $3x + y + 13 = 0$
b) $x^2 - 9x - y + 18 = 0$, $x + y - 6 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 4 = 0$, $3x + 2y - 12 = 0$?

3.28 Wo schneiden die Kurven mit den Gleichungen
a) $y = 2x - 6$ b) $9x^2 + 25y^2 - 900 = 0$ c) $x^2 - 4x - 4y + 28 = 0$
die x-Achse?

3.29 Eine Kurve ist durch eine Parameterdarstellung gegeben. Man stelle eine Wertetabelle auf, zeichne die Kurve und bestimme ihre parameterfreie Gleichung $F(x, y) = 0$.

a) $x = t - 1$, $y = \frac{1}{2}t^2 - 3$ b) $x = \frac{t}{1-t}$, $y = \frac{1+t}{1-t}$ c) $x = 2\cos t + 3$, $y = 2\sin t$ d) $x = 3\cot t$, $y = \frac{2}{\sin t}$

3.30 Für die Kurvengleichung $r = \frac{3}{1 + \sin\varphi}$ ist eine Wertetabelle für $\varphi \in [-30°, 210°]$ und $\Delta\varphi = 10°$ aufzustellen und die Kurve zu zeichnen.

3.31 Aus der gegebenen Kurvengleichung $F(x, y) = 0$ ist die Gleichung in Polarkoordinaten $r = f(\varphi)$ herzuleiten.

a) $y = 2\sqrt[3]{x^2}$ b) $y = 2x - 1$ c) $x^2 - y^2 - 1 = 0$

3.32 Aus der gegebenen Kurvengleichung $r = f(\varphi)$ ist die Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten $F(x, y) = 0$ herzuleiten.

a) $r = \frac{2}{1 - \cos\varphi}$ b) $r = \frac{4}{\sin\varphi + \cos\varphi}$ c) $r - 4\sin\varphi + \cos\varphi = 0$.

3.33 Gesucht werden die Länge und der Anstiegswinkel der durch folgende Punkte gegebenen Strecke

a) $A(3;7)$, $B(8;1)$ b) $P_1(-2,5;3,1)$, $P_2(-5,4;-1,3)$
c) $R(-4,54;-2,18)$, $Q(2,40;-2,18)$ d) $M(5,63;0)$, $N(12,80;6,17)$

3.34 Welcher Punkt P hat von $A(-4;2)$ den Abstand 13 und von $B(15;-17)$ den Abstand 25 ?

3.35 Eine Gerade hat die Gleichung $\boldsymbol{r} = 6,4\boldsymbol{i} + 2,8\boldsymbol{j} + t(3,2\boldsymbol{i} + 1,4\boldsymbol{j})$. Wie heißt die Normalform der parameterfreien Geradengleichung?

3.36 Gesucht wird die Gleichung der Geraden, die durch einen Punkt P geht und den Anstiegswinkel α besitzt.

a) $P(-4;1)$, $\alpha = 60°$ b) $P(2,4;-1,5)$, $\alpha = 124°$
c) $P(5,6;0,8)$, $\alpha = 0°$ d) $P(3,48;5,72)$, $\alpha = 90°$

3.37 Es ist die Gleichung der Verbindungsgeraden der beiden Punkte P_1 und P_2 zu bestimmen.

a) $P_1(-2;4)$, $P_2(6;-1)$ b) $P_1(1,7;9,3)$, $P_2(1,7;6,4)$

3.38 Wie heißen die Gleichungen der in Bild 3.77 gezeichneten Geraden?

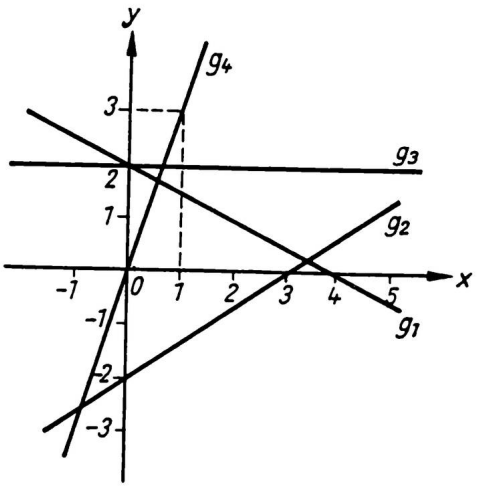


Bild 3.77

3.39 Gesucht werden die Schnittpunkte und Schnittwinkel der Geraden g_1 und g_2:

a) $g_1 : y = x - 6 \quad g_2 : y = -3x + 10$

b) $g_1 : y = 4x - 3,6 \quad g_2 : y = -0,25x + 6,1$

c) $g_1 : y = \frac{3}{4}x + 2 \quad g_2 := \frac{3}{4}x - 5$

d) $g_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad g_2 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7,5 \\ -3 \end{pmatrix}$

3.40 Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch $P(4,8;12)$ geht und a) parallel, b) senkrecht zur Geraden mit der Gleichung $2,4x - 7,2y + 10 = 0$ verläuft?

3.41 Es sind Mittelpunkt und Radius der durch ihre Gleichungen gegebenen Kreise zu bestimmen.

a) $x^2 + y^2 - 12x + 6y - 99 = 0$ b) $2x^2 + 2y^2 + 8x = 0$

c) $x^2 + y^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{5}{6} = 0$ d) $x^2 + y^2 + 2x - y + \frac{5}{4} = 0$

3.42 Ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M\left(-\frac{7}{4}; -\frac{2}{3}\right)$ geht durch den Punkt $P_1\left(\frac{3}{4}; \frac{16}{3}\right)$. Wie heißt seine Gleichung?

3.43 Ein Kreis berührt die y-Achse in $P_1\,(0; -0,4)$ und geht durch $P_2\,(1; 1,6)$. Wie heißt seine Gleichung?

3.44 Wie heißt die Gleichung des Kreises durch die drei Punkte $P_1\,(8; 16)$, $P_2\,(15; 9)$, $P_3\,(8; -8)$?

3.45 Man berechne die Schnittpunkte zwischen Kreis und Gerade. Welche Lage hat die Gerade zum Kreis?

a) $x^2 + y^2 = 100$ b) $x^2 + y^2 = 74$ c) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 25 = 0$

$y = 7x - 50$ $5x - 7y + 74 = 0$ $x - 3y - 27 = 0$

3.46 Von einem Dreieck sind die Eckpunkte $P_1(-11;0)$, $P_2(12;-7)$, $P_3(12;23)$ gegeben. Man berechne die Gleichungen der Mittelsenkrechten und die Gleichung des Umkreises.

3.47 a) Eine Parabel geht durch den Punkt $P_1(9;6)$, ihr Scheitelpunkt liegt in O, und ihre Achse fällt mit der x-Achse zusammen. Wie heißt die Scheitelgleichung?

Desgleichen b) $P_1\left(-\frac{5}{8};\frac{5}{2}\right)$, c) $P_1(2,75;-1,42)$

3.48 Man ermittle die Gleichung einer Parabel aus

a) $S(-2;-5)$, $p=4$, Parabel nach rechts geöffnet,

b) $S(3;0)$, $p=0,5$, Parabel nach unten geöffnet.

3.49 Eine Parabel ist durch drei Punkte und ihre Achsenrichtung bestimmt. Gesucht werden die Scheitel- und die Brennpunktkoordinaten.

a) $P_1(10;15)$, $P_2(1;-3)$, $P_3\left(-\frac{5}{4};6\right)$, Parabelachse parallel zur x-Achse.

b) $P_1\left(1;\frac{23}{6}\right)$, $P_2\left(2;\frac{10}{3}\right)$, $P_3\left(\frac{8}{3};\frac{4}{3}\right)$, Parabelachse parallel zur y-Achse.

3.50 Der parabolische Träger einer Brücke mit aufgehängter Fahrbahn CD hat die Spannweite l und die zugehörige Pfeilhöhe $h+a$ (Bild 3.78).

a) Es ist die Gleichung der Parabel im angegebenen System aufzustellen.

b) Es sei in a) speziell $a=h$. Wie groß ist die Länge CD der Fahrbahn?

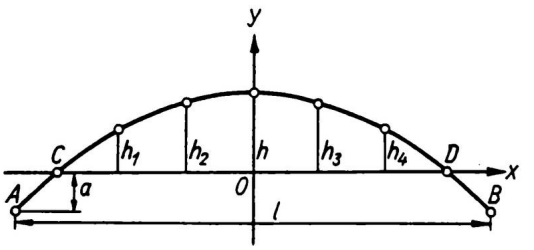


Bild 3.78

c) Für $l=36\,\mathrm{m}$, $h=6\,\mathrm{m}$, $a=3\,\mathrm{m}$ berechne man die Länge der Fahrbahn CD sowie die Längen der Vertikalstäbe, die 5 m bzw. 10 m von der Brückenmitte entfernt angebracht sind.

3.51 Von den folgenden Parabeln sind die Koordinaten des Scheitelpunktes und des Brennpunktes zu bestimmen.

a) $2y^2-24x-12y-6=0$ b) $5x^2+40x+25y+230=0$

3.52 Man bestimme die Mittelpunktsgleichung der Ellipse aus

a) $a=11$; $e=8$ b) $a=8$; $\varepsilon=\frac{1}{4}\sqrt{7}$ c) $e=12$; $\varepsilon=0,75$

3.53 Man bestimme die Halbachsen, die Brennpunkte und ε der Ellipsen

a) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ b) $\frac{x^2}{4,41}+\frac{y^2}{8,41}=1$ c) $27x^2+43y^2-1161=0$

3.54 Von der Ellipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ sind die Punkte $P_1(8;3,6)$, $P_2(6;4,8)$ gegeben. Wie groß sind die Halbachsen?

3.55 Man bestimme die Schnittpunkte von Ellipse und Gerade.

a) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1\,;\quad y=-\frac{1}{2}x+3$

b) $21x^2+42y^2-882=0\,;\quad y=-x+9$

c) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{32}=1\,;\quad y=-\frac{\sqrt{6}}{2}x+8\sqrt{2}$

3.56 Von der Ellipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ sind die Punkte $P_1(-3,6;4)$ und $P_2(4,8;-3)$ gegeben. Man bestimme die numerische Exzentrizität ε und die Abstände der Punkte P_1 und P_2 von den Brennpunkten.

3.57 Man berechne die numerische Exzentrizität der elliptischen Erdbahn, wenn sich die Entfernungen der Erde von der im Brennpunkt stehenden Sonne in Sonnennähe (Perihel) und in Sonnenferne (Aphel) näherungsweise wie 29:30 verhalten.

3.58 Zwei Stäbe $\overline{OR}=m$ und $\overline{RP}=n$ sind in R durch ein Gelenk verbunden. $\overline{OR}$ dreht sich um O linksläufig mit der Winkelgeschwindigkeit ω gegen die Ebene, während sich $\overline{RP}$ um R mit der Winkelgeschwindigkeit 2ω gegen $\overline{OR}$ rechtsläufig dreht. Welche Bahn beschreibt Punkt P?

3.59 Man bestimme die Halbachsen, die Brennpunkte und die Asymptotengleichungen der folgenden Hyperbeln:

a) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{144}=1$ b) $225x^2-64y^2+14400=0$

c) $x^2-y^2-196=0$

3.60 Welchen Winkel schließen die Asymptoten der Hyperbel $16x^2-36y^2=576$ miteinander ein?

3.61 Man berechne die Schnittpunkte zwischen der Hyperbel $4x^2-9y^2=36$ und den folgenden Geraden und veranschauliche sich die Ergebnisse an einer Skizze.

a) $y=2x-8$ b) $x-2y-1=0$ c) $y=2x+3$

d) $5x+6y+9=0$ e) $2x+3y+15=0$

3.62 Eine Hyperbel hat ihre Scheitelpunkte in den Brennpunkten der Ellipse $\frac{x^2}{52}+\frac{y^2}{36}=1$ und die gleiche Nebenachse wie die Ellipse. Wo schneiden sich beide Kurven?

3.63 Welchen Abstand haben die Punkte mit den Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_1=3\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_2=-5\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$?

3.64 Welche Gleichung hat die Gerade durch $P_1(2;0;3)$, $P_2(-1;3;-6)$? Liegen die Punkte $A(4;-2;9)$, $B(1;3;-2)$ auf der Geraden?

3.65 Es ist die Vektorgleichung der Geraden durch $P_1(-2;3;5)$ in Richtung des Vektors $\boldsymbol{u}^T=(3\ -1\ 2)$ aufzustellen. Welche Punkte ergeben sich für $t=-1\,;0\,;3$?

3.66 Welchen Abstand hat der Punkt $P_1(2;1;-3)$ von der Geraden durch $P_2(-3;3;5)$ und $P_3\,(1;-4;-2)$?

3.67 Gegeben sind die Geraden $g_1 = AB$, $g_2 = CD$, $g_3 = EF$ mit $A(0;0;0)$, $B(1,5;2;3)$, $C(2;12;-12)$, $D(4;10;0)$, $E(3;4;0)$, $F(3;4;10)$. Welche Geraden schneiden sich, und wo liegen die Schnittpunkte?

3.68 Welche Gerade g_2 durch $P_2(0;0;2)$ schneidet die Gerade $g_1 : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} + t(-2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})$ orthogonal? Man bestimme den Schnittpunkt P_1 und den Abstand $\overline{P_1P_2}$.

3.69 In welchem Punkt schneiden sich die Geraden $g_1 : \boldsymbol{r} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} + t(2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k})$, $g_2 : \boldsymbol{r} = -\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 10\boldsymbol{k} + s(-4\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k})$?

3.70 Unter welchem Winkel schneiden sich die Geraden aus Aufgabe 3.69?

3.71 Desgl. für die Geraden aus Aufgabe 3.67.

3.72 Welchen Abstand haben die zwei Geraden

$g_1 : \boldsymbol{r} = 5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} + t(3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 12\boldsymbol{k})$

$g_2 : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k} + s(2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})$?

3.73 Man bestimme eine Parameterdarstellung der Ebene durch drei Punkte $P_1(5;3;1)$, $P_2(1;3;5)$, $P_3(6;6;5)$. Welche der Punkte $P_4(-2;6;12)$, $P_5(0;0;1)$ liegen auf der Ebene?

3.74 Wie heißt die parameterfreie Gleichung der Ebene aus Aufgabe 3.73?

3.75 Gegeben sind eine Gerade $g : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} + t(-2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k})$ und der Punkt $P_0(-2;0;2)$. Welche parameterfreie Gleichung hat die Ebene durch g und P_0?

3.76 Eine Ebene geht durch $P_1(-2;4;-1)$ und ist orthogonal zu dem Vektor $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$. Wie heißt ihre Gleichung?

3.77 Welche Gleichung hat die Schnittgerade der Ebenen

a) $E_1 : \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\quad E_2 : \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} + \bar{t}\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + \bar{s}\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$

b) E_1 geht durch $P_1(1;2;3)$, $P_2(2;3;1)$, $P_3(-3;0;2)$

E_2 geht durch $Q(3;2;1)$, $Q_2(-1;-2;-3)$, $Q_3(0;1;2)$

3.78 Welchen Abstand haben die Schnittgeraden $g_1 = E_1 \cap E_2$, $g_2 = E_3 \cap E_4$ voneinander?

$E_1 : 3x - y + z + 1 = 0$ $\qquad$ $E_3 : 6x - y + 5z = 0$

$E_2 : y - 2z + 3 = 0$ $\qquad$ $E_4 : x = 3$

3.79 Eine Ebene geht durch $P_1(2;5;-4)$ und hat den Normalenvektor $\boldsymbol{n}^T = (6\ -2\ 3)$. Welchen Abstand hat der Punkt $P_0(1;0;-2)$ von der Ebene?

3.80 Welchen Abstand hat der Punkt $A(-1;5;4)$ von der Ebene $E : \boldsymbol{r} = 3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} + t(5\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}) + s(4\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$?

3.81 In welchem Punkt und unter welchem Winkel schneidet die Gerade

$$g:\ \boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}6\\2\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}\quad\text{die Ebene}\quad E:\ \boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}?$$

3.82 Eine Ebene E geht durch $P_1(2;5;1)$, $P_2(-1;-1;0)$, $P_3(1;0;0)$ und eine Gerade g durch $P_4(-6;13;2)$, $P_5(-30;-4;1)$. Man bestimme den Schnittpunkt von g und E.

3.83 Unter welchem Winkel schneiden sich die Ebenen

a) $E_1:\ 3x-5y+z-4=0$, $\quad E_2:\ x+6y+2z+1=0$?

b) E_1, E_2 aus 3.86 a)

3.84 Gegeben sind die Ebene $E:\ 3x+6y+2z-12=0$ und eine Gerade g durch $P_1(0;-4;0)$, $P_2(3;4;4)$. Gesucht werden

a) Länge und Lotfußpunkt des von O auf E gefällten Lotes

b) Schnittpunkt und Schnittwinkel zwischen E und g

c) Gleichung der Ebene E_2 durch P_2 parallel zu E_1.

4 Lineare Algebra

4.1 Systeme linearer Funktionen und Gleichungen

4.1.1 Einführung

Zusammenhänge der Technik oder der Wirtschaftspraxis lassen sich oft durch Formulierungen folgender Art beschreiben: je stärker, desto schneller, je mehr, desto teurer. Hinzu kommt, daß sich verschiedene Einflüsse addieren. In der mathematischen Darstellung ergeben sich daraus Proportionalitäten und Beziehungen, in denen alle abhängigen und unabhängigen Größen höchstens in der ersten Potenz auftreten. Man bezeichnet den Zusammenhang

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

als **lineare Funktion** (oder Funktion ersten Grades). Darin errechnet sich der Zahlenwert der *abhängigen Variablen* y aus den frei wählbaren Zahlenwerten der *unabhängigen Variablen* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Wird auch der Wert für y fest vorgegeben, etwa $y = b$, so stellt

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

eine **lineare Gleichung** dar. Im Unterschied zur linearen Funktion ist diese nicht mehr für beliebige Belegungen der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gültig, sondern nur noch für gewisse Zahlenkonstellationen, die es zu ermitteln gilt.

Treten mehrere abhängige Variable, etwa $y_1, y_2, \ldots y_m$, in insgesamt m Gleichungen auf, so bezeichnet man

$$\begin{array}{rcccccccc} y_1 & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n \\ y_2 & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_m & = & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n \end{array} \tag{4.1}$$

als **lineares Funktionensystem** und bei festgelegten Zahlenwerten für $y_1, y_2, \ldots, y_m$ das System

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{4.2}$$

als **lineares Gleichungssystem**. Bei den Koeffizienten a_{ik} dieser beiden Systeme (4.1) oder (4.2) gibt der erste Index i vereinbarungsgemäß stets die Gleichungs- bzw. Zeilennummer an, der zweite Index k dagegen die Spaltennummer bzw. die Nummer der zugehörigen Variablen. Die fest vorgegebenen Zahlen in $b_1, b_2, \ldots, b_m$ in (4.2) bezeichnet man als **Absolutglieder** oder **rechte Seiten** des Systems.

Sind alle rechten Seiten null, also

$$b_1 = 0, b_2 = 0, \ldots, b_m = 0,$$

so heißt das System **homogen**, andernfalls **inhomogen**.

Wesentlicher Gegenstand der Linearen Algebra ist die Lösung derartiger linearer Gleichungssysteme, d. h. die Bestimmung von Zahlenwerten für die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (die man dann auch als Unbekannte bezeichnet), die das Gleichungssystem erfüllen. Dabei können unterschiedliche Situationen auftreten, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel 4.1

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 11 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & -5 \end{array}$$

besitzt die einzige Lösung $x_1 = 4, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -2$. Durch Einsetzen (Probe) kann man sich von der Richtigkeit überzeugen. Die Lösung ist in diesem Fall ein *Zahlentripel* (4, 1, -2).

Bei n Unbekannten spricht man dann von einem *n-Tupel* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, das üblicherweise auch als *Spaltenvektor*

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

dargestellt wird.

Beispiel 4.2

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 11 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

besitzt keine Lösung, da die dritte Gleichung im Widerspruch zur Differenz der beiden ersten Gleichungen steht.

Beispiel 4.3

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 11 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

besitzt neben der Lösung $x_1 = 4,\ x_2 = 1,\ x_3 = -2$ weitere Lösungen, z.B. $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = -4$. Setzt man $x_1 = t$, wobei t ein beliebig wählbarer Parameter ist, so erhält man mit $x_1 = t,\ x_2 = -t + 5,\ x_3 = t - 6$ unendlich viele Lösungen. Die Ursache für dieses Verhalten liegt in der Abhängigkeit der dritten Gleichung von den beiden ersten. Die dritte Gleichung ist damit überflüssig.

Aus diesen Beispielen wird deutlich, daß es auf die Frage nach der Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems folgende Antworten geben kann:

- Das System ist eindeutig lösbar, es besitzt genau eine Lösung.
- Das System ist in sich widerspruchsvoll, es besitzt keine Lösung.
- Das System enthält Abhängigkeiten, es besitzt unendlich viele von einem oder mehreren Parametern abhängige Lösungen.

Bei vektorieller Darstellung würde die Lösung zu Beispiel 4.3 lauten

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Da darin der Parameter t variabel bleibt, bezeichnet man diese Darstellung als *allgemeine Lösung*, bei festgewähltem t, z. B. $t = 0$, erhält man eine *spezielle oder partikuläre Lösung:*

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Um diese Zusammenhänge erkennen zu können, benötigt man geeignete Verfahren, die im folgenden Abschnitt besprochen werden.

4.1.2 Umformung linearer Gleichungssysteme

4.1.2.1 Austauschverfahren

Das Austauschverfahren (abgekürzt AV) dient vorzugsweise der Umformung linearer Funktionensysteme. Es kann aber mit geringen Modifikationen auch zur Lösung linearer Gleichungssysteme sowie für zahlreiche weitere Aufgaben herangezogen werden. Insofern hat es für die Rechnungen dieses Kapitels eine grundlegende

Bedeutung. Entwickelt wurde es von E. STIEFEL[1] nach dem Muster des Einsetzverfahrens.

Betrachtet wird zunächst ein lineares Funktionensystem, das gegenüber (4.1) noch um zusätzliche konstante Glieder c_1 erweitert sein darf:

$$\begin{array}{rcl} y_1 &=& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + c_1 \\ y_2 &=& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + c_2 \\ \vdots & & \vdots \\ y_m &=& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + c_m \end{array} \tag{4.3}$$

In diesem System hängen die Variablen y_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ von den Variablen x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ab. Eine häufig anzutreffende Aufgabe ist die Frage nach der Umkehrung des Zusammenhangs, d. h. danach, wie die x_k von vorgegebenen y_i abhängen. Man möchte also (4.3) umformen in das *inverse* System

$$\begin{array}{rcl} x_1 &=& b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \ldots + b_{1m}y_m + k_1 \\ x_2 &=& b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \ldots + b_{2m}y_m + k_2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_n &=& b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \ldots + b_{nm}y_m + k_n \end{array} \tag{4.4}$$

Das kann mit dem AV erfolgen. Um leichter nachrechnen zu können, sei im folgenden $n = m = 3$ gesetzt.
Gegeben seien also die 3 Gleichungen

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + c_1 \tag{I}$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + c_2 \tag{II}$$
$$y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n + c_3 \tag{III}$$

Im ersten Schritt soll x_2 gegen y_1 ausgetauscht werden. Man löst dazu (I) nach x_2 auf:

$$x_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + \frac{1}{a_{12}}y_1 - \frac{a_{13}}{a_{12}}x_3 - \frac{c_1}{a_{12}} \tag{I'}$$

und setzt das Ergebnis in (II) und (III) ein:

$$y_2 = \left(a_{21} - a_{22}\frac{a_{11}}{a_{12}}\right)x_1 + \frac{a_{22}}{a_{12}}y_1 + \left(a_{23} - a_{22}\frac{a_{13}}{a_{12}}\right)x_3 + \left(c_2 - a_{22}\frac{c_1}{a_{12}}\right) \tag{II'}$$

$$y_3 = \left(a_{31} - a_{32}\frac{a_{11}}{a_{12}}\right)x_1 + \frac{a_{32}}{a_{12}}y_1 + \left(a_{33} - a_{32}\frac{a_{13}}{a_{12}}\right)x_3 + \left(c_3 - a_{32}\frac{c_1}{a_{12}}\right) \tag{III'}$$

Für den Austausch der übrigen Variablen muß dieses Verfahren wiederholt werden. Es ist zu erkennen, daß der Koeffizient der auszutauschenden unabhängigen Variablen, im vorliegenden Fall der Koeffizient a_{12} von x_2, eine besondere Bedeutung hat. Durch ihn muß dividiert werden. Er darf daher nicht null sein. Dieser

[1] EDUARD STIEFEL, Mathematiker in Zürich

Koeffizient wird als **Pivotelement** (Schlüsselelement) bezeichnet.

Um die Übersichtlichkeit zu gewähren, empfiehlt es sich, die Rechnung mit Hilfe einer Tabelle zu schematisieren.

Aus dem Ausgangssystem (4.3) erhält man für den Spezialfall $m = n = 3$ die Anfangstabelle:

T_1	x_1	x_2	x_3	1	Probe
y_1	a_{11}	$\textcircled{a_{12}}$	a_{13}	c_1	p_1
y_2	$\boxed{a_{21}}$	$\boxed{a_{22}}$	a_{23}	c_2	p_2
y_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	c_3	p_3
K	$\boxed{-\frac{a_{11}}{a_{12}}}$	*	$-\frac{a_{13}}{a_{12}}$	$-\frac{c_1}{a_{12}}$	$-\frac{p_1}{a_{12}}$

Darin ist das Pivotelement durch einen Kreis markiert. Die Zeile, in der das Pivotelement steht, heißt **Pivotzeile,** die Spalte mit dem Pivotelement **Pivotspalte.** Die zusätzliche mit K gekennzeichnete Zeile heißt **Kellerzeile.** Sie erleichtert die weitere Rechnung. Die zusätzliche, der Probe dienende Spalte schützt vor Rechenfehlern. Die in ihr enthaltenen Zahlen p_i sind in der Anfangstabelle so zu wählen, daß die Summe aller Zahlen einer Zeile eins ist. Dem liegt die Absicht zugrunde, daß für $x_i = 1\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ auch alle $y_k = 1\ (k = 1, 2, \ldots, m)$ werden:

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} + c_k + p_k = 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

Nach dem ersten Schritt erhält man die zu (I'), (II'), (III') gehörende Tabelle

T_2	x_1	x_2	x_3	1	Probe
x_2	$-\frac{a_{11}}{a_{12}}$	$\frac{1}{a_{12}}$	$-\frac{a_{13}}{a_{12}}$	$-\frac{c_1}{a_{12}}$	$-\frac{p_1}{a_{12}}$
y_2	$a_{21} - a_{22}\frac{a_{11}}{a_{12}}$	$\frac{a_{22}}{a_{12}}$	$a_{23} - a_{22}\frac{a_{13}}{a_{12}}$	$c_2 - a_{22}\frac{c_1}{a_{12}}$	$p_2 - a_{22}\frac{p_1}{a_{12}}$
y_3	$a_{31} - a_{32}\frac{a_{11}}{a_{12}}$	$\frac{a_{32}}{a_{12}}$	$a_{33} - a_{32}\frac{a_{13}}{a_{12}}$	$c_3 - a_{32}\frac{c_1}{a_{12}}$	$p_3 - a_{32}\frac{p_1}{a_{12}}$
K					

Für die Berechnung der Tabelle T_2 aus der Tabelle T_1 empfiehlt es sich, in der Kellerzeile von T_1 zunächst die Pivotspalte durch * zu markieren und dann die übrigen Elemente der Kellerzeile zu berechnen, indem man die Elemente der Pivotzeile durch das negative Pivotelement dividiert.

Die neue Tabelle T_2 errechnet sich nach den folgenden, aus (I'), (II'), (III') ersichtlichen **Austauschregeln**:

1. Das Pivotelement geht in seinen Kehrwert über.
2. Die Pivotspalte ist durch das Pivotelement zu dividieren.
3. Die Pivotzeile ist durch das negative Pivotelement zu dividieren.
4. Alle übrigen Elemente sind umzurechnen durch Addition des Produktes aus dem in derselben Zeile stehenden Element der Pivotspalte und dem in derselben Spalte stehenden Element der Kellerzeile (Dreieckregel).

Die Regel 4 ist in der Tabelle T_1 durch Einrahmung hervorgehoben. Die Regeln 3 und 4 gelten auch für die Spalte der Absolutglieder und für die Probenspalte. Bei richtiger Rechnung ist in der Tabelle T_2 jede Zeilensumme eins.

Das Verfahren ist solange zu wiederholen, bis alle Variablen ausgetauscht sind oder ein weiterer Austausch nicht mehr möglich ist, weil sich kein geeignetes Pivotelement mehr finden läßt (zur Erinnerung: das Pivotelement muß stets ungleich null sein).

Beispiel 4.4

Zu dem System linearer Funktionen

$$\begin{aligned} y_1 &= -x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 4 \\ y_2 &= 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 1 \\ y_3 &= 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 2 \end{aligned}$$

ist das inverse System zu bestimmen.

Lösung:
Die Anfangstabelle des AV lautet:

T_1	x_1	x_2	x_3	1	Probe
y_1	-1	6	2	-4	-2
y_2	3	-4	-2	-1	5
y_3	2	-2	-1	-2	4
K	*	6	2	-4	-2

Das Pivotelement kann beliebig gewählt werden, darf jedoch nicht null sein. Für eine Rechnung ohne Hilfsmittel sollte man die Pivotelemente 1 oder -1 bevorzugen. Beim Rechnen mit gerundeten Zahlen ist zu beachten, daß mögliche Rundungsfehler um so kleiner werden, je größer der Betrag des Pivotelementes ist. Die weiteren Schritte des AV ergeben

T_2	y_1	x_2	x_3	1	Probe
x_1	-1	6	2	-4	-2
y_2	-3	14	4	-13	-1
y_3	-2	10	3	-10	0
K	0,2	*	-0,3	1	0

T_3	y_1	y_3	x_3	1	Probe
x_1	0,2	0,6	0,2	2	-2
y_2	-0,2	1,4	-0,2	1	-1
x_2	0,2	0,1	-0,3	1	0
K	-1	7	*	5	-5

T_4	y_1	y_3	y_2	1	Probe
x_1	0	2	-1	3	-3
x_3	-1	7	-5	5	-5
x_2	0,5	-2	1,5	-0,5	1,5

Daraus erhält man nach Umordnen das gesuchte inverse System

$$\begin{aligned} x_1 &= \quad - \quad y_2 + 2y_3 + \quad 3 \\ x_2 &= 0,5y_1 + 1,5y_2 - 2y_3 - 0,5 \\ x_3 &= -y_1 - \quad 5y_2 + 7y_3 + \quad 5 \end{aligned}$$

Anmerkung:
Setzt man im gegebenen System $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, so erhält man statt des Systems linearer Funktionen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

und aus dem inversen System dessen Lösung

$$x_1 = 3\,, \quad x_2 = -0,5\,, \quad x_3 = 5$$

Damit eröffnet sich ein Weg zur Lösung linearer Gleichungssysteme mit Hilfe des AV.

4.1.2.2 Gaußscher Algorithmus

Der Gaußsche Algorithmus[1] dient ebenfalls der Lösung linearer Gleichungssysteme. Mit seiner Hilfe wird durch schrittweises Eliminieren von Unbekannten aus einem gegebenen System ein System in gestaffelter Form erzeugt, aus dem rückwärts rechnend die Unbekannten bestimmt werden können. Erlaubt sind dabei sogenannte elementare Umformungen:

- das Vertauschen zweier Gleichungen
- die Multiplikation einer Gleichung mit einer von null verschiedenen Zahl und
- die Addition einer so multiplizierten Gleichung zu einer anderen Gleichung.

Der Ablauf wird im folgenden am Beispiel $m = n = 4$ gezeigt.

[1] Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), Mathematiker in Göttingen

Beispiel 4.5

Gegeben ist das System linearer Gleichungen

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= 14 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 14x_3 + 2x_4 &= -4 \\ 2x_1 + 7x_2 + 10x_3 - x_4 &= 4 \end{aligned}$$

aus dem die Unbekannten x_1 bis x_4 zu bestimmen sind.

Lösung:
Zunächst soll mit Hilfe der ersten Gleichung, der sogenannten Eliminationsgleichung (in der folgenden Darstellung gerahmt), aus der zweiten, dritten und vierten Gleichung die Unbekannte x_1 eliminiert werden. Dazu ist die Eliminationsgleichung nacheinander mit den Faktoren $-(1/2)$, -2 und -1 zu multiplizieren und anschließend zu den übrigen Gleichungen zu addieren. Danach werden in gleicher Weise die Unbekannten x_2 und x_3 schrittweise eliminiert:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr|l}
\boxed{2x_1} & + & \boxed{4x_2} & + & \boxed{6x_3} & + & \boxed{2x_4} & = & \boxed{14} & \boxed{-\frac{1}{2}}\ \boxed{-2}\ \boxed{-1} \\
x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 10 & \\
4x_1 & + & 2x_2 & + & 14x_3 & + & 2x_4 & = & -4 & \\
2x_1 & + & 7x_2 & + & 10x_3 & - & x_4 & = & 4 & \\
 & & \boxed{-3x_2} & - & \boxed{2x_3} & - & \boxed{2x_4} & = & \boxed{3} & \boxed{-2}\ \boxed{1} \\
 & & -6x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & -32 & \\
 & & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & -10 & \\
 & & & & \boxed{6x_3} & + & \boxed{2x_4} & = & \boxed{-38} & \boxed{-\frac{1}{3}} \\
 & & & & 2x_3 & - & 5x_4 & = & -7 & \\
 & & & & & & \boxed{-\frac{17}{3}x_4} & = & \boxed{\frac{17}{3}} &
\end{array}$$

Die Eliminationsgleichungen bilden das gesuchte gestaffelte Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= 14 \\ -3x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 3 \\ 6x_3 + 2x_4 &= -38 \\ -\frac{17}{3}x_4 &= \frac{17}{3} \end{aligned}$$

aus dem durch Division und schrittweises Einsetzen von unten nach oben die Lösung

$$x_4 = -1,\ x_3 = -6,\ x_2 = \frac{11}{3},\ x_1 = \frac{56}{3}$$

gewonnen wird. Auch beim Gaußschen Algorithmus läßt sich die Rechnung durch ein Schema übersichtlicher gestalten:

x_1	x_2	x_3	x_4	1	Probe	
2	4	6	2	14	28	$-\frac{1}{2}$ -2 -1
1	−1	1	−1	10	10	
4	2	14	2	−4	18	
2	7	10	−1	4	22	
	−3	−2	−2	3	−4	-2 1
	−6	2	−2	−32	−38	
	3	4	−3	−10	−6	
		6	2	−38	−30	$-\frac{1}{3}$
		2	−5	−7	−10	
			$-\frac{17}{3}$	$\frac{17}{3}$	0	

Die Probenspalte enthält jeweils die Zeilensummen und wird wie die übrigen Spalten behandelt. Mit allgemeinen Koeffizienten lautet das Schema für 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten in Übereinstimmung mit (4.2):

x_1	x_2	x_3	x_4	1	Probe	
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1	p_1	f_2 f_3 f_4
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_2	p_2	
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	b_3	p_3	
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	b_4	p_4	
	a'_{22}	a'_{23}	a'_{24}	b'_2	p'_2	f'_3 f'_4
	a'_{32}	a'_{33}	a'_{34}	b'_3	p'_3	
	a'_{42}	a'_{43}	a'_{44}	b'_4	p'_4	
		a''_{33}	a''_{34}	b''_3	p''_3	f''_4
		a''_{43}	a''_{44}	b''_4	p''_4	
			a'''_{44}	b'''_4	p'''_4	

Die Multiplikatoren f_2, f_3, f_4 des ersten Eliminationsschrittes errechnen sich nach der Vorschrift

$$f_k = -\frac{a_{k1}}{a_{11}}, \qquad k = 2, 3, 4,$$

die der nächsten Eliminationsschritte in entsprechender Weise. Das gestaffelte Gleichungssystem aus den Eliminationszeilen lautet

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 &= b'_2 \\ a''_{33}x_3 + a''_{34}x_4 &= b''_3 \\ a'''_{44} &= b'''_4 \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} x_4 &= b'''_4 : a'''_{44} \\ x_3 &= (b''_3 - a''_{34}x_4) : a''_{33} \\ x_2 &= (b'_2 - a'_{23}x_3 - x'_{24}x_4) : a'_{22} \\ x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x) : a_{11} \end{aligned}$$

Da durch die Koeffizienten a_{11}, a'_{22}, a''_{33}, a''_{44} dividiert werden muß, dürfen diese nicht null sein. Sie haben beim Gaußschen Algorithmus eine ähnliche Bedeutung wie die Pivotelemente beim Austauschverfahren. Notfalls muß man durch Vertauschen von Zeilen dafür sorgen, daß die ersten Elemente der Eliminationszeilen von null verschieden sind. Das gelingt aber nicht immer.

Außerdem können bei Elimination einer Unbekannten gleichzeitig mehrere Unbekannte wegfallen. Dann entstehen im gestaffelten System größere Stufen. Auf die genannten Probleme wird im Abschnitt 4.5.2 näher eingegangen.

Aufgabe 4.1

4.2 Linearer Vektorraum

4.2.1 Grundlagen

Jede Lösung eines linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten ist ein geordnetes Zahlenpaar (x_1, x_2), bei drei Unbekannten ein geordnetes Zahlentripel (x_1, x_2, x_3) und bei n Unbekannten ein geordnetes n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von Zahlen.

Im ebenen kartesischen Koordinatensystem (d. h. in der Ebene $\mathbb{R}^2$) wird durch ein geordnetes Zahlenpaar (x_1, x_2) ein Punkt $P(x_1, x_2)$ mit den Koordinaten x_1, x_2 festgelegt (Bild 4.1). Versteht man unter einem Vektor die Verschiebung eines Punktes in einer festgelegten Richtung um einen festgelegten Betrag, so bedeutet

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \qquad \text{bzw.} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

die Verschiebung des Nullpunktes mit den Koordinaten (0,0) in den Punkt $P(x_1, x_2)$. In diesem Fall heißen $\boldsymbol{x}$ **Ortsvektor** (Bild 4.2) und x_1, x_2 **Komponenten** dieses Ortsvektors.

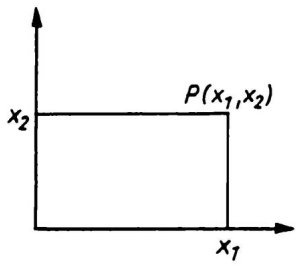


Bild 4.1

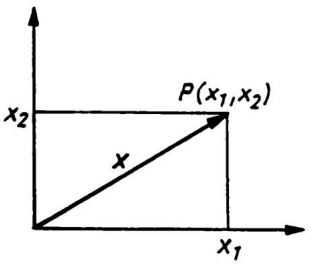


Bild 4.2

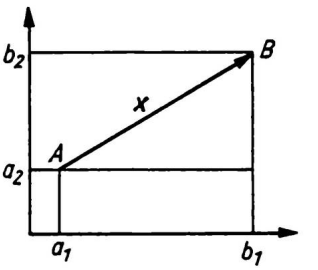


Bild 4.3

Allgemein kann ein Vektor $\boldsymbol{x}$, sofern er nicht Ortsvektor ist, d.h. nicht vom Nullpunkt des Koordinatensystems ausgeht, geometrisch als Verschiebung eines Punktes A in einen Punkt B interpretiert werden, wobei Richtung und Betrag der Verschiebung durch die Komponenten

$$x_1 = b_1 - a_1, \quad x_2 = b_2 - a_2$$

bestimmt werden (Bild 4.3).

In gleicher Weise gehört zu einem geordneten Zahlentripel (x_1, x_2, x_3) ein Punkt $P(x_1, x_2, x_3)$ im $\mathbb{R}^3$ bzw. ein dreidimensionaler Vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Allgemein besteht eine Äquivalenz zwischen einem n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, einem Punkt $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und einem n-dimensionalen Vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Es ist daher möglich, die Lösung eines linearen Gleichungssystems immer auch als Punkt oder als Vektor in einem Raum einer entsprechenden Dimension anzusehen.

Im folgenden sollen einige Eigenschaften und Rechenregeln für Vektoren, wie sie bereits aus dem Abschnitt 3.2 bekannt sind, zusammen mit den Eigenschaften linearer Gleichungssysteme betrachtet werden.

Bei der mathematischen Beschreibung realer Zusammenhänge ist häufig von Linearität die Rede. Damit ist gemeint, daß Bewegungen oder Verschiebungen sich geometrisch aus geraden Strecken zusammensetzen lassen. Bei Rechenoperationen dürfen nur die Addition bzw. Subtraktion und die Multiplikation mit einer Zahl angewendet werden. Das betrifft auch den linearen Zusammenhang zwischen Vektoren. Gilt für zwei Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ die Beziehung

$$\boldsymbol{a}_2 = \lambda \boldsymbol{a}_1,$$

d.h., sind die beiden Vektoren proportional, so gehen sie durch Streckung oder Stauchung auseinander hervor. Die beiden Vektoren sind parallel.

Die Summe zweier Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ergibt einen dritten Vektor $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, der mit $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ in einer Ebene liegt (Bild 4.4). Die drei Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ sind linear abhängig (siehe Abschnitt 3.2.5).

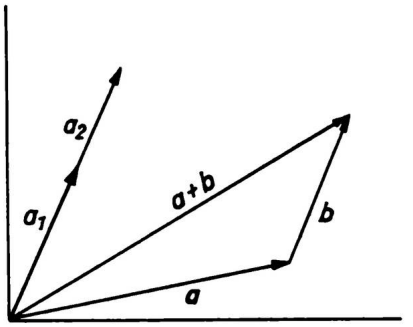


Bild 4.4

Betrachtet man beliebige Vektoren einer Ebene und wendet auf sie nur die Operationen Multiplikation mit einer Zahl oder Addition von Vektoren an, so ist das Ergebnis stets ein Vektor, der wieder dieser Ebene angehört. Entsprechendes gilt für Vektoren des $\mathbb{R}^3$ oder des n-dimensionalen Raumes $\mathbb{R}^n$. Dieser Sachverhalt ist Anlaß, die Menge aller Vektoren gleicher Dimension, sofern sie den üblichen Rechenregeln genügen, als Vektorraum zu kennzeichnen.

Definition

Die Menge $\mathbb{V}^n$ aller n-dimensionalen Vektoren heißt **n-dimensionaler Vektorraum** (genauer: n-dimensionaler *linearer* Vektorraum), wenn für zwei beliebige Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{V}^n$ stets die Summe $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ und für eine beliebige Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ und einen beliebigen Vektor $\boldsymbol{a} \in \mathbb{V}^n$ stets das Produkt $\lambda \cdot \boldsymbol{a}$ erklärt sind und wieder zu $\mathbb{V}^n$ gehören und wenn für beliebige Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und beliebige Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{V}^n$ die folgenden Rechengesetze gelten:

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$
(2) $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$
(3) Es gibt einen Nullvektor $\boldsymbol{o} \in \mathbb{V}^n$, so daß für alle $\boldsymbol{a} \in \mathbb{V}^n$ gilt $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{a}$
(4) Zu jedem $\boldsymbol{a} \in \mathbb{V}^n$ existiert der entgegengesetzte Vektor $-\boldsymbol{a} \in \mathbb{V}^n$ mit der Eigenschaft $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{o}$
(5) $\lambda(\mu \boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$
(6) $1 \cdot \boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$
(7) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$
(8) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$

Die unter (1) bis (8) geforderten Regeln stimmen mit den aus Abschn. 3.2 bekannten überein. Wegen der Äquivalenz zwischen n-dimensionalen Vektoren und n-Tupeln geordneter Zahlen kann der Raum $\mathbb{V}^n$ auch als Menge aller geordneten n-Tupel reeller Zahlen

$$\mathbb{V}^n = \{\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

verstanden werden, wobei die Rechenregeln für n-Tupel von Zahlen die gleichen wie für Vektoren sind.

Fragt man nach dem Unterschied zwischen dem Punktraum $\mathbb{R}^n$ und dem Vektorraum $\mathbb{V}^n$, so muß man erkennen, daß zwar die Elemente beider Räume geordnete n-Tupel von Zahlen sind, daß aber im $\mathbb{V}^n$ zusätzlich zwischen den Elementen Rechenoperationen definiert sind. Punkte des $\mathbb{R}^n$ kann man weder addieren noch vervielfachen, wohl aber Vektoren des $\mathbb{V}^n$.

4.2.2 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren

Die Begriffe *Linearkombination* und *lineare Abhängigkeit* von Vektoren sind in der Linearen Algebra von zentraler Bedeutung. Sie werden im folgenden näher untersucht.

Es sei $\mathbb{V}^n$ ein beliebiger n-dimensionaler Vektorraum. Dann gehören nach der Definition des Vektorraumes auch die Summe $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ zweier Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in \mathbb{V}^n$ wie auch die Summe $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2$ zweier gestreckter oder gestauchter Vektoren diesem Vektorraum an. Umgekehrt erhebt sich die Frage, ob ein beliebiger Vektor $\boldsymbol{a} \in \mathbb{V}^n$ aus anderen Vektoren dieses Vektorraumes in der angegebenen Weise erzeugt werden kann. Wenn das der Fall ist, spricht man von einer *Linearkombination.*

Definition

Ein Vektor $\boldsymbol{a} \in \mathbb{V}^n$ heißt eine **Linearkombination** der Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$, wenn mit Hilfe reeller Zahlen λ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ die Darstellung

$$\boldsymbol{a} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{a}_m \tag{4.5}$$

möglich ist. Die Linearkombination heißt *trivial*, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$ gilt, ansonsten heißt sie *nichttrivial.*

Die triviale Linearkombination

$$0 \cdot \boldsymbol{a}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{a}_2 + \ldots + 0 \cdot \boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{o}$$

erzeugt stets den Nullvektor. In einer nichttrivialen Linearkombination muß demzufolge mindestens ein Faktor λ_i von null verschieden sein. Die Proportionalität zweier Vektoren $\boldsymbol{a} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1$ ist ein Sonderfall von (4.5). Durch Umformung von (4.5) wird erkennbar, daß bei Bestehen einer nichttrivialen Linearkombination zwischen den $m+1$ Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ mindestens einer der Vektoren eine Linearkombination der übrigen ist. Für $\lambda_1 \neq 0$ erhält man zum Beispiel

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{\lambda_1}\boldsymbol{a} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\boldsymbol{a}_2 - \ldots - \frac{\lambda_m}{\lambda 1}\boldsymbol{a}_m$$

Damit wird die Abhängigkeit dieser Vektoren voneinander ausgedrückt.

Definition

Die Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ heißen **linear abhängig**, wenn es eine nichttriviale Linearkombination

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_m \boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{o} \tag{4.6}$$

gibt, d. h. wenn in (4.6) nicht alle λ_i null sind. Ist (4.6) nur erfüllt, wenn alle $\lambda_i = 0$ sind, so heißen die Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ **linear unabhängig**.

Wie die vorangegangenen Überlegungen vermuten lassen, gilt der folgende

Satz

Sind die Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ linear abhängig, so ist mindestens ein Vektor $\boldsymbol{a}_k$ $(1 \leq k \leq m)$ Linearkombination der übrigen:

$$\boldsymbol{a}_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} \lambda_1' \boldsymbol{a}_i$$

Zum Beweis kann man wegen der vorausgesetzten linearen Abhängigkeit annehmen, daß in (4.6) mindestens ein Faktor λ_i nicht null ist, z.B. $\lambda_k \neq 0$. Dann ergibt eine Umstellung von (4.6)

$$\lambda_k \boldsymbol{a}_k = -\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 - \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 - \ldots - \lambda_{k-1} \boldsymbol{a}_{k-1} - \lambda_{k+1} \boldsymbol{a}_{k+1} - \ldots - \lambda_m \boldsymbol{a}_m$$

oder

$$\boldsymbol{a}_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \boldsymbol{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_k} \boldsymbol{a}_2 - \ldots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} \boldsymbol{a}_{k-1} - \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \boldsymbol{a}_{k+1} - \ldots - \frac{\lambda_m}{\lambda_k} \boldsymbol{a}_m$$

und mit $\lambda_i' = -\dfrac{\lambda_i}{\lambda_k}$ die behauptete Beziehung.

Von praktischem Interesse ist der Nachweis der linearen Abhängigkeit von Vektoren. Dazu ist zu zeigen, daß in einer (4.6) entsprechenden Beziehung nicht alle Faktoren λ_i null sind. Das führt auf die Lösung eines homogenen linearen Gleichungssystems.

Beispiel 4.6

Sind die Vektoren

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix},$$

linear abhängig?

Lösung:
Gemäß (4.6) erhält man aus

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 9\lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

aus dem die Unbekannten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ zu bestimmen sind. Ohne zu rechnen sieht man, daß $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$ eine Lösung ist, die als triviale Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems bezeichnet wird. Wenn das die einzige Lösung wäre, würde das die lineare Unabhängigkeit der Vektoren bedeuten. Nach Anwendung des Austauschverfahrens oder des Gaußschen Algorithmus erhält man aber noch als weitere, sogenannte nichttriviale Lösung

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 4\lambda_3 \\ \lambda_2 &= -\lambda_3, \end{aligned}$$

in der λ_3 frei wählbar ist.
Setzt man z. B. $\lambda_3 = 1$, so erhält man $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$ und damit für die Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ die Linearkombination

$$4\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{o},$$

die nichttrivial ist. Daher sind die Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ linear abhängig.

Beispiel 4.7

Sind die Vektoren

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

linear abhängig?

Lösung:

Der Ansatz $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{a}_3 + \lambda_4 \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{o}$ führt auf das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4\lambda_1 + 2\lambda_2 - 5\lambda_3 + 5\lambda_4 &= 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 + 3\lambda_4 &= 0 \end{aligned}$$

das neben der trivialen Lösung $\lambda_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, 4)$ die nichttriviale Lösung

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= 3\lambda_1 + 30\lambda_3 \\ \lambda_4 &= -2\lambda_1 - 11\lambda_3 \end{aligned}$$

mit zwei frei wählbaren Parametern besitzt. Setzt man $\lambda_1 = 1, \lambda_3 = 0$, so erhält man die Linearkombination $\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2 + 0 \cdot \boldsymbol{a}_3 - 2\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{o}$, aus der die lineare Abhängigkeit folgt.

Das soeben behandelte Beispiel läßt sich zu der folgenden Aussage verallgemeinern.

Satz

Im n-dimensionalen Vektorraum gibt es höchstens n linear unabhängige Vektoren. Mehr als n Vektoren sind stets linear abhängig.

Beweis: Bei angenommenen $n+1$ Vektoren mit je n Komponenten erhält man aus (4.6) ein lineares homogenes Gleichungssystem mit n Gleichungen und den $n+1$ Unbekannten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$, in dessen Lösung mindestens eine Unbekannte frei wählbar ist. Diese kann von null verschieden gewählt werden, womit die Bedingung für die lineare Abhängigkeit erfüllt ist.

Aus diesem Satz läßt sich folgern, daß bei n linear unabhängigen Vektoren des $\mathbb{V}^n$ jeder weitere Vektor als Linearkombination der gegebenen n linear unabhängigen Vektoren darstellbar ist.

Definition

n linear unabhängige Vektoren des n-dimensionalen Vektorraumes $\mathbb{V}^n$ bezeichnet man als Basis dieses Raumes.

Ob Vektoren als Basis eines Vektorraumes anzusehen sind, wird also immer durch die Antwort auf die Frage nach der linearen Unabhängigkeit dieser Vektoren entschieden.

Beispiel 4.8

Bilden die Vektoren $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Raumes $\mathbb{V}^2$?

Lösung:

Aus $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

folgt
$$\begin{aligned} 5\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

wofür als einzige Lösung $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ zutrifft. $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ sind linear unabhängig und bilden eine Basis des $\mathbb{V}^2$. Jeder andere Vektor des $\mathbb{V}^2$ läßt sich damit als Linearkombination von $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ darstellen.

Geometrisch können die n Vektoren einer Basis des $\mathbb{V}^n$ als vorgegebene Achsenrichtungen und Maßstab eines Koordinatensystems angesehen werden. Man sagt dann, daß der Raum $\mathbb{V}^n$ von den n Vektoren der Basis *aufgespannt* wird. Bei der Suche nach linear unabhängigen Vektoren bieten sich die Einheitsvektoren

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ an.}$$

Satz

Die n Einheitsvektoren des n-dimensionalen Vektorraumes $\mathbb{V}^n$ sind stets linear unabhängig. Sie bilden die sogenannte natürliche Basis.

Diese Aussage soll für die drei Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ bewiesen werden. Im

$\mathbb{V}^3$ sind statt dessen auch die Bezeichnungen $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ üblich, also $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{k}$.
Aus (4.6) folgt

$$\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{e}_3 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das ergibt aber als einzige Lösung

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$$

Da in diesem Fall nur die triviale Lösung existiert, sind die Einheitsvektoren linear unabhängig voneinander und bilden eine Basis des $\mathbb{V}^3$.

Die Einheitsvektoren werden wegen der einfachen Rechnung zwar als Basis eines Vektorraumes bevorzugt, jede andere Basis leistet aber bei der Darstellung von Vektoren die gleichen Dienste.

Satz

Sind die Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{V}^m$, dann hat jeder andere Vektor $\boldsymbol{a} \in \mathbb{V}^m$ bezüglich dieser Basis eine eindeutige Darstellung:

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{a}_i$$

Die Zahl λ_i heißt dann i-te Komponente des Vektors $\boldsymbol{a}$ bezüglich dieser Basis.

Würde man zwei verschiedene Darstellungen voraussetzen, etwa

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{a}_i = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \boldsymbol{a}_i$$

so erhält man durch Subtraktion

$$\sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \mu_i) \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{o}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren $\boldsymbol{a}_i$ folgt daraus

$$\lambda_i - \mu_i = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots, m$$

und damit $\lambda_i = \mu_i$.
Beide Darstellungen sind identisch.

Zum Schluß dieses Abschnitts sei noch darauf hingewiesen, daß lineare Unabhängigkeit von Vektoren immer mit der Unverzichtbarkeit dieser Vektoren gleichbedeutend ist. Das wird durch den Begriff Basis verdeutlicht. Dagegen kann man aus einer Menge linear abhängiger Vektoren mindestens einen Vektor streichen, ohne daß der von der zugehörigen Basis aufgespannte Vektorraum verändert wird. Dieses wichtige Ergebnis ist Inhalt des folgenden Satzes.

Satz

Sind die Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ linear abhängig, so kann man mindestens einen dieser Vektoren weglassen, ohne daß der aufgespannte Vektorraum sich ändert.

Zum Beweis werde zunächst angenommen, daß der Vektor $\boldsymbol{a}_1$ weggelassen werden kann. Dann ist zu zeigen, daß der von $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ und der von $\boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ aufgespannte Vektorraum identisch sind, d.h., daß ein beliebiger Vektor $\boldsymbol{a}$ sowohl als Linearkombination von $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ als auch von $\boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ darstellbar ist.

Wegen der vorausgesetzten linearen Abhängigkeit von $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ ist jeder dieser Vektoren Linearkombination der übrigen, also auch

$$\boldsymbol{a}_1 = \sum_{i=2}^{m} \lambda_i \boldsymbol{a}_i \tag{I}$$

Unterstellt man, daß ein Vektor $\boldsymbol{a}$ dem von $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ aufgespannten Vektorraum angehört, so gilt

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{a}_i = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \sum_{i=2}^{m} \lambda_i \boldsymbol{a}_i \tag{II}$$

$$= \lambda_1 \sum_{i=2}^{m} \lambda_i \boldsymbol{a}_i + \sum_{i=2}^{m} \lambda_i \boldsymbol{a}_i$$

$$= \sum_{i=2}^{m} (\lambda_1 \lambda_i + \lambda_i) \boldsymbol{a}_i = \sum_{i=2}^{m} \mu_i \boldsymbol{a}_i$$

Dabei wurde (I) in (II) eingesetzt und $\mu_i = \lambda_1 \lambda_i + \lambda_i$ vereinbart. $\boldsymbol{a}$ ist also Linearkombination von $\boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$. Soll umgekehrt $\boldsymbol{a}$ dem von $\boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ aufgespannten Vektorraum angehören, so gilt

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=2}^{m} \lambda_i \boldsymbol{a}_i = 0 \cdot \boldsymbol{a}_1 + \sum_{i=2}^{m} \lambda_i \boldsymbol{a}_i \,,$$

d. h. mit $\lambda_1 = 0$:

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{a}_i$$

Damit ist $\boldsymbol{a}$ auch Linearkombination der Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$.

Aufgabe 4.2

4.3 Matrizen

4.3.1 Matrizenbegriff

Der Begriff der Matrix (Mehrzahl: Matrizen) ist grundlegend für die Lineare Algebra. Matrizen sind in der täglichen Praxis weit verbreitet, obgleich sie meist nicht unter dieser Bezeichnung auftreten. Jede Tabelle von Zahlen, Tarifen, Entfernungen, Kosten u. ä. kann als Matrix angesehen werden. Kennzeichnend ist die Anordnung dieser Zahlen in Zeilen und Spalten, wobei nicht nur der Zahlenwert eine Rolle spielt, sondern auch die Stellung der Zahl in der Tabelle, d. h. ihre Zuordnung zu einer Zeile und einer Spalte.
Als Beispiel sei der folgende Telefontarif genannt:

	Normaltarif	Billigtarif
Ortsnetz	0,46	0,23
Nahzone	0,46	0,23
Regionalzone	2,76	1,38
Weitzone	7,89	3,94

Die Tabelle enthält die Gebühren in DM für eine Gesprächsdauer von 12 Minuten. Jeder Zahlenwert der Tabelle bekommt erst Sinn zusammen mit der Zeilen- und Spaltenbezeichnung, also etwa 2,76 DM für Regionalzone Normaltarif.
Die Tabelle ist auch dann noch aussagefähig, wenn die Zeilen- und Spaltenbezeichnung nicht mehr erwähnt, sondern nur noch stillschweigend vereinbart wird:

$$\begin{pmatrix} 0,46 & 0,23 \\ 0,46 & 0,23 \\ 2,76 & 1,38 \\ 7,89 & 3,94 \end{pmatrix}$$

Bewährt hat sich die Numerierung der Zeilen und Spalten mit Hilfe von Indizes wie bei den Koeffizienten eines linearen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}$$

Ein solches Schema von Zahlen wird als *Matrix* bezeichnet. Die Anzahl der Zeilen und Spalten einer Matrix wird durch den *Typ* oder das *Format* angegeben.

Definition

Unter einer **Matrix** vom **Typ** (m, n) bzw. vom **Format** (m, n) versteht man ein geordnetes Schema von $m \cdot n$ Zahlen, die in m Zeilen und n Spalten dargestellt sind. Die Zahlen bezeichnet man auch als *Elemente* der Matrix.

Man schreibt

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Das Element a_{ik} steht in der i-ten Zeile und der k-ten Spalte. Üblich ist auch die Schreibweise

$$\boldsymbol{A}_{(m,n)} = (a_{ik})$$

Damit wird gesagt, daß es sich um eine Matrix vom Typ (m, n) handelt, deren Elemente mit a_{ik} bezeichnet werden. Die Elemente einer Matrix können reelle oder komplexe Zahlen sein.

Um darzustellen, daß eine Matrix $\boldsymbol{A}$ die Elemente a_{ik} enthält, schreibt man auch

$$(\boldsymbol{A})_{ik} = a_{ik}.$$

Bevor der Umgang und das Rechnen mit Matrizen besprochen werden kann, sind zunächst noch einige weitere Begriffe zu vereinbaren, die sich im wesentlichen mit Gestalt und Struktur von Matrizen befassen.

Definition

Eine Matrix vom Typ (n, n) heißt **quadratische Matrix**, eine Matrix vom Typ $(1, n)$ **Zeilenmatrix** oder **Zeilenvektor** und eine Matrix vom Typ $(n, 1)$ **Spaltenmatrix** oder **Spaltenvektor**.

Eine quadratische Matrix hat also stets genausoviel Zeilen wie Spalten. Ein Zeilenvektor ist eine einzeilige Matrix, ein Spaltenvektor eine einspaltige Matrix. Zur Bezeichnung von Zeilen- oder Spaltenmatrizen verwendet man übereinstimmend mit der Bezeichnung von Vektoren kleine Buchstaben, also z. B. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A}_{(n,1)}$.

Die Elemente a_{ii} einer Matrix, bei denen Zeilen- und Spaltenindex übereinstimmen, bilden die sogenannte *Hauptdiagonale*. Ein Element a_{ik} mit $i < k$ steht oberhalb der Hauptdiagonale. Für $i > k$ steht das Element a_{ik} unterhalb der Hauptdiagonale.

Die Summe der Hauptdiagonalelemente einer quadratischen Matrix wird als *Spur* bezeichnet. Man schreibt

$$sp(\boldsymbol{A}) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Werden in einer Matrix die Elemente an der Hauptdiagonale gespiegelt, so bedeutet das einen Tausch der Zeilen gegen die Spalten. Aus der ersten Zeile wird die erste Spalte usw. Die Elemente a_{ik} und a_{ki} vertauschen dabei ihren Platz. Die dabei entstehende Matrix heißt *transponierte* oder *gestürzte* Matrix.

Definition

Eine Matrix $\boldsymbol{A}^T$ mit Elementen $(a_{ik})^T = (a_{ki})$ heißt **transponierte Matrix** zu $\boldsymbol{A}$.

Man erkennt sofort, daß durch erneutes Transponieren wieder die ursprüngliche Matrix entsteht:

$$(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}$$

Ist $\boldsymbol{A}$ vom Typ (m, n), so hat die transponierte Matrix $\boldsymbol{A}^T$ den Typ (n, m).
Durch Transponieren eines Spaltenvektors

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \text{ entsteht ein Zeilenvektor } \boldsymbol{a}^T = (a_1, a_2, \ldots, a_m) .$$

Diese Vereinbarung ermöglicht es, eine Matrix vom Typ (m, n) durch n nebeneinandergesetzte Spaltenvektoren $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ oder m untereinandergesetzte Zeilenvektoren

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1^T \\ \boldsymbol{b}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m^T \end{pmatrix}$$

darzustellen.
Auch die folgenden Begriffe sind grundlegend für den Umgang mit Matrizen.

Definition

Eine Matrix beliebigen Typs, deren sämtliche Elemente null sind, heißt **Nullmatrix**. Sie wird mit $\boldsymbol{0}$ bezeichnet. Erhalten in einer beliebigen Matrix $\boldsymbol{A}$ sämtliche Elemente entgegengesetzte Vorzeichen, so entsteht die zu $\boldsymbol{A}$ entgegengesetzte Matrix $-\boldsymbol{A}$.

Auch hier ist leicht einzusehen, daß

$$-(-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}$$

gilt und $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}$ nur für $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ möglich ist.
Bei quadratischen Matrizen können sich gewisse Symmetrieeigenschaften als nützlich erweisen.

Definition

Eine quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ heißt **symmetrisch**, wenn gilt

$$\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$$

und **schiefsymmetrisch** oder **antisymmetrisch**, falls

$$\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A} .$$

In einer symmetrischen Matrix sind die spiegelbildlich zur Hauptdiagonale stehenden Elemente gleich:

$$a_{ik} = a_{ki} ,$$

in einer schiefsymmetrischen Matrix haben sie entgegengesetztes Vorzeichen:

$$a_{ik} = -a_{ki}$$

Die Elemente der Hauptdiagonale können in einer symmetrischen Matrix beliebig sein, in einer schiefsymmetrischen Matrix sind alle Hauptdiagonalelemente null.

Beispiel 4.9

$$\text{Aus } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{folgt } \boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } (\boldsymbol{A}^T)^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Beispiel 4.10

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{ ist symmetrisch, da } \boldsymbol{B}^T = \boldsymbol{B}$$

Beispiel 4.11

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist antisymmetrisch, da } \boldsymbol{C}^T = -\boldsymbol{C}$$

Im folgenden werden einige spezielle quadratische Matrizen betrachtet.

Definition

Eine quadratische Matrix heißt

obere Dreiecksmatrix,	falls $a_{ik} = 0$ für $i > k$
Diagonalmatrix,	falls $a_{ik} = 0$ für $i \neq k$
untere Dreiecksmatrix,	falls $a_{ik} = 0$ für $i < k$.

Eine Diagonalmatrix, deren sämtliche Hauptdiagonalelemente gleich 1 sind, heißt **Einheitsmatrix** und wird üblicherweise mit $\boldsymbol{E}$ bezeichnet.

Beispiel 4.12

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ ist eine Diagonalmatrix vom Typ (4,4)}$$

Beispiel 4.13

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist die Einheitsmatrix vom Typ (3,3)}$$

Beispiel 4.14

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ ist eine obere (rechte) Dreiecksmatrix vom Typ (5,5)

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$ ist eine untere (linke) Dreiecksmatrix vom Typ (2,2).

Fragt man nach der Gleichheit zweier Matrizen, so sind Anordnungen von Zahlen zu vergleichen. Die Telefontarife zweier Länder können nur dann als gleich angesehen werden, wenn die Tariftabellen in jeder einzelnen Position übereinstimmen (siehe Beispiele am Beginn dieses Abschnitts). Dazu gehört auch die Übereinstimmung der Zoneneinteilung und der Tarifklassen. Damit bietet sich die folgende Festlegung an.

Definition

Zwei Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ heißen gleich, wenn sie vom gleichen Typ sind und für alle i, k gilt

$$a_{ik} = b_{ik}$$

Die Gleichheit zweier Matrizen vom Typ (m, n) ersetzt $m \cdot n$ Einzelgleichungen. Mit Hilfe der Matrizenschreibweise können umfangreiche lineare Zusammenhänge sehr knapp dargestellt werden.

Beispiel 4.15

Es seien $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}$ ist gleichbedeutend mit den 6 Einzelgleichungen

$$\begin{array}{lll} x_{11} = 3 & x_{12} = 1 & x_{13} = 0 \\ x_{21} = 2 & x_{22} = -4 & x_{23} = 1 \end{array}$$

4.3.2 Addition und Subtraktion von Matrizen

Zunächst sei daran erinnert, daß eine Matrix für sich allein nicht zum Rechnen auffordert, da sie lediglich eine Anordnung von Zahlen darstellt. Aber selbstverständlich kann man mit einer oder auch mehreren Matrizen rechnen.

Wenn z. B. ein Telefontarif erhöht werden soll, muß zu jedem einzelnen Gebührenwert die Veränderung berücksichtigt werden. Es ist also eine zweite Matrix, die die Gebührenänderungen enthält und die die gleiche Zeilen- und Spaltenanzahl wie die Gebührenmatrix haben muß, zu addieren, also z.B.

$$\begin{pmatrix} 0,46 & 0,23 \\ 0,46 & 0,23 \\ 2,76 & 1,38 \\ 7,89 & 3,94 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,00 & 0,00 \\ 0,06 & 0,03 \\ 0,24 & 0,12 \\ 0,60 & 0,30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,46 & 0,23 \\ 0,52 & 0,26 \\ 3,00 & 1,50 \\ 8,49 & 4,24 \end{pmatrix}$$

Definition

$\boldsymbol{A}_{(m,n)}$ und $\boldsymbol{B}_{(m,n)}$ seien zwei Matrizen gleichen Typs. Man erhält die Summe $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ durch Addition und die Differenz $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ durch Subtraktion der an gleicher Stelle stehenden Elemente der Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$:

$$\left.\begin{aligned} (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})_{ik} &:= (a_{ik}+b_{ik}) \\ (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})_{ik} &:= (a_{ik}-b_{ik}) \end{aligned}\right\} \text{ für alle } i,\ k\,.$$

Da Addition und Subtraktion von Matrizen auf die entsprechenden Operationen zwischen Zahlen zurückzuführen sind, gelten auch die gleichen Rechengesetze wie für Zahlen.

Satz

Für die Addition und Subtraktion von Matrizen gelten:

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$		(Kommutativgesetz)
$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$		(Assoziativgesetz)
$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{A}$		(Addition der Nullmatrix)
$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$		(Addition der entgegengesetzten Matrix)
$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T$		(Addition transponierter Matrizen)

Eine interessante Eigenschaft haben quadratische Matrizen.

Satz

Jede quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ ist darstellbar als Summe einer symmetrischen Matrix $\boldsymbol{A}_s$ und einer antisymmetrischen Matrix $\boldsymbol{A}_a$. Es gilt

$$\boldsymbol{A}_s = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T)$$

$$\boldsymbol{A}_a = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T)$$

Daß $\boldsymbol{A}_s$ und $\boldsymbol{A}_a$ die geforderten Symmetrieeigenschaften haben, sieht man aus der Rechnung

$$(a_s)_{ik} = \tfrac{1}{2}(a_{ik}+a_{ki}) = \tfrac{1}{2}(a_{ki}+a_{ik}) = (a_s)_{ki}$$

$$(a_a)_{ik} = \tfrac{1}{2}(a_{ik}-a_{ki}) = -\tfrac{1}{2}(a_{ki}-a_{ik}) = -(a_a)_{ki}$$

und

$$(a_s)_{ik} + (a_a)_{ik} = \tfrac{1}{2}(a_{ik} + a_{ki}) + \tfrac{1}{2}(a_{ik} - a_{ki}) = a_{ik}$$

Beispiel 4.16

Für $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 8 & 3 & 9 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ erhält man die Zerlegung

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_s + \boldsymbol{A}_a = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3.3 Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl

Bei der wiederholten Addition einer Matrix zu sich selbst vervielfachen sich die Zahlenwerte ihrer Elemente. Das läuft auf eine proportionale Änderung hinaus. Soll z. B. der bereits erwähnte Telefontarif generell um ein Zehntel gesenkt werden, so sind alle Gebührenwerte mit dem Faktor 0,9 zu multiplizieren.

Definition

Man multipliziert eine Matrix mit einer Zahl λ, indem man jedes Element der Matrix mit dieser Zahl multipliziert:

$$\lambda \boldsymbol{A} = (\lambda a_{ik})$$

Die Zahl λ kann beliebig reell, imaginär oder komplex sein.

Umgekehrt ist es möglich, aus einer Matrix eine Zahl auszuklammern, wenn diese als gemeinsamer Faktor in allen Elementen der Matrix erhalten ist.

Beispiel 4.17

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,06 & 0,12 & 0,36 \\ 0,24 & 0,48 & 0,00 \\ 0,36 & 0,00 & 0,00 \end{pmatrix} = 0,06 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berücksichtigt man, daß als Faktor λ auch die imaginäre Einheit j auftreten darf, gelangt man zu Matrizen, deren Elemente komplexe Zahlen sind.
$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \mathrm{j}\boldsymbol{B}$ heißt *komplexe* Matrix mit dem *Realteil* $\boldsymbol{A}$ und dem *Imaginärteil* $\boldsymbol{B}$.
$\boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{A} - \mathrm{j}\boldsymbol{B}$ ist die zu $\boldsymbol{C}$ *konjugiert komplexe* Matrix.
Die Matrix $\boldsymbol{C}^{*T} = \boldsymbol{A}^T - \mathrm{j}\boldsymbol{B}^T$ heißt *adjungierte* Matrix $\boldsymbol{C}_{\mathrm{adj}}$ zu $\boldsymbol{C}$.

Beispiel 4.18

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2+6\mathrm{j} & 3-\mathrm{j} \\ 0 & 4+\mathrm{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \mathrm{j}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}^* = \begin{pmatrix} 2-6\mathrm{j} & 3+\mathrm{j} \\ 0 & 4-\mathrm{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \mathrm{j}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Auch in diesem Fall übertragen sich die Regeln für das Rechnen mit Zahlen uneingeschränkt auf Matrizen.

Satz

Für die Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl gelten:

$$\begin{aligned}
\lambda \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{A}\lambda && \text{(Kommutativgesetz)}\\
\lambda(\mu \boldsymbol{A}) &= (\lambda\mu)\boldsymbol{A} && \text{(Assoziativgesetz)}\\
\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) &= \lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B} && \text{(Distributivgesetz)}\\
(\lambda+\mu)\boldsymbol{A} &= \lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A} && \text{(Distributivgesetz)}\\
(\lambda\boldsymbol{A})^T &= \lambda\boldsymbol{A}^T && \text{(Multiplikation einer transponierten Matrix)}
\end{aligned}$$

4.3.4 Matrizenmultiplikation

Die Addition zweier Matrizen und die Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl sind zurückführbar auf die entsprechenden Operationen zwischen den Elementen. Fragt man nach der Möglichkeit, zwei Matrizen miteinander zu multiplizieren, stößt man auf Regeln, die eine formale Übertragung der Multiplikation von Zahlen verbieten. Um das deutlich zu machen, sei zunächst das praktische Problem eines zweistufigen Produktionsprozesses diskutiert.

Ein Unternehmen stellt in der ersten Produktionsstufe aus 3 Rohstoffen R_1, R_2, R_3 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 her. Die Normwerte des Rohstoffverbrauches gehen aus der folgenden Tabelle hervor:

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	8	3	1
R_2	4	5	3
R_3	2	1	4

Die Zahlen in dieser Tabelle seien die Elemente a_{ij} einer Matrix $\boldsymbol{A}$. Sie geben den Bedarf am Rohstoff R_i (in Mengeneinheiten) zur Herstellung einer Mengeneinheit des Zwischenprodukts Z_j an. In der zweiten Produktionsstufe sollen aus den 3 Zwischenprodukten Z_1, Z_2, Z_3 die 2 Fertigprodukte F_1, F_2 hergestellt werden. Die Normwerte des Verbrauchs an Zwischenprodukten lauten:

	F_1	F_2
Z_1	3	2
Z_2	1	5
Z_3	2	1

Die Zahlen in dieser Tabelle seien die Elemente b_{jk} einer Matrix $\boldsymbol{B}$. Sie bestimmen den Bedarf am Zwischenprodukt Z_j (in Mengeneinheiten) zur Herstellung einer Mengeneinheit des Fertigprodukts F_k. Zu ermitteln ist der Bedarf an Rohstoffen

R_1, R_2, R_3 bei einem vorgegebenen Produktionsprogramm für F_1, F_2 , das in einer festen Zeit realisiert werden soll.
Mit r_i und z_j seien die zu bestimmenden Mengen der jeweiligen Rohstoffe R_i bzw. der Zwischenprodukte Z_j bezeichnet, f_k seien die vorgegebenen Mengen der Fertigprodukte F_k .
Aus den angegebenen Tabellen erhält man den Bedarf an Zwischenprodukten

$$\begin{aligned} z_1 &= 3f_1 + 2f_2 \\ z_2 &= f_1 + 5f_2 \\ z_3 &= 2f_1 + f_2 \end{aligned} \tag{I}$$

und an Rohstoffen

$$\begin{aligned} r_1 &= 8z_1 + 3z_2 + z_3 \\ r_2 &= 4z_1 + 5z_2 + 3z_3 \\ r_3 &= 2z_1 + z_2 + 4z_3 \end{aligned} \tag{II}$$

Den unmittelbaren Bedarf an Rohstoffen bei vorgegebenen Fertigproduktmengen erhält man durch Einsetzen von (I) in (II):

$$\begin{aligned} r_1 &= 8(3f_1+2f_2) + 3(f_1+5f_2) + 1(2f_1+f_2) \\ r_2 &= 4(3f_1+2f_2) + 5(f_1+5f_2) + 3(2f_1+f_2) \\ r_3 &= 2(3f_1+2f_2) + 1(f_1+5f_2) + 4(2f_1+f_2) \end{aligned} \tag{II'}$$

bzw. nach Umordnen:

$$\begin{aligned} r_1 &= (8\cdot 3+3\cdot 1+1\cdot 2)f_1 + (8\cdot 2+3\cdot 5+1\cdot 1)f_2 \\ r_2 &= (4\cdot 3+5\cdot 1+3\cdot 2)f_1 + (4\cdot 2+5\cdot 5+3\cdot 1)f_2 \\ r_3 &= (2\cdot 3+1\cdot 1+4\cdot 2)f_1 + (2\cdot 2+1\cdot 5+4\cdot 1)f_2 \end{aligned} \tag{II"}$$

Das Ergebnis ist der direkte Zusammenhang zwischen den benötigten Rohstoffmengen und den Fertigproduktmengen:

$$\begin{aligned} r_1 &= 29f_1 + 32f_2 \\ r_2 &= 23f_1 + 36f_2 \\ r_3 &= 15f_1 + 13f_2 \end{aligned} \tag{III}$$

Die Koeffizienten dieses Gleichungssystems seien die Elemente c_{ik} der Matrix $\boldsymbol{C}$. Dann erkennt man, daß $\boldsymbol{C}$ aus $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ durch Einsetzen von (I) in (II) entstanden ist. Die dabei durchzuführende Rechenoperation wird aus (II") ersichtlich. Offensichtlich sind die Elemente c_{ik} die Skalarprodukte der Zeilenvektoren $\boldsymbol{a}_i^T$ von $\boldsymbol{A}$ mit den Spaltenvektoren $\boldsymbol{b}_k$ von $\boldsymbol{B}$:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} \qquad (i = 1, 2, 3;\ k = 1, 2)$$

(An dieser Stelle sei an die Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren im Abschnitt 3.2.6 erinnert).

Die Rechnung wird noch übersichtlicher, wenn man die beiden Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ in das folgende Schema (nach FALK[1]) einträgt:

[1] SIGURD FALK, (geb. 1921), Mathematiker in Braunschweig

			$\boldsymbol{B}$:	3	2
				1	5
				2	1
	8	3	1	29	32
$\boldsymbol{A}$:	4	5	3	23	36
	2	1	4	15	13

Daraus ist erkennbar, wie ein beliebiges Element der Matrix $\boldsymbol{C}$ im Schnittpunkt der jeweils gerahmten Zeile und Spalte als Skalarprodukt berechnet wird. Damit das stets möglich ist, muß jede Zeile von $\boldsymbol{A}$ genausoviele Elemente haben wie jede Spalte von $\boldsymbol{B}$. Diese Eigenschaft wird als *Verkettbarkeit* zweier Matrizen bezeichnet. Nach diesen Überlegungen sind die folgenden, vom Beispiel unabhängigen Definitionen fällig.

Definition

Die Matrizen $\boldsymbol{A}_{(m,n_1)}$ und $\boldsymbol{B}_{(n_2,p)}$ heißen in dieser Reihenfolge **verkettet** oder **verkettbar**, wenn $n_1 = n_2$ ist, d. h. wenn die Elementeanzahl jeder Zeile von $\boldsymbol{A}$ mit der Elementeanzahl jeder Spalte von $\boldsymbol{B}$ übereinstimmt, oder, was dasselbe ist, wenn die Spaltenanzahl von $\boldsymbol{A}$ gleich der Zeilenanzahl von $\boldsymbol{B}$ ist.

Sind zwei Matrizen miteinander verkettet, kann man in der oben beschriebenen Weise eine neue Matrix berechnen, die als Produkt dieser beiden Matrizen zu verstehen ist.

Definition

Unter dem Produkt $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ **(Matrixprodukt)** der verketteten Matrizen $\boldsymbol{A}_{(m,n)}$ und $\boldsymbol{B}_{(n,p)}$ in der angegebenen Reihenfolge versteht man eine Matrix $\boldsymbol{C}_{(m,p)}$, deren Elemente c_{ik} als Skalarprodukte der i-ten Zeile von $\boldsymbol{A}$ mit der k-ten Spalte von $\boldsymbol{B}$ zu berechnen sind, d.h. $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ errechnet sich aus

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, p) \tag{4.7}$$

Die Zeilenanzahl m des ersten Faktors $\boldsymbol{A}$ und die Spaltenanzahl p des zweiten Faktors $\boldsymbol{B}$ dürfen beliebig sein. Sie bestimmen aber das Format der Produktmatrix $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$

Die praktische Berechnung eines Matrixproduktes erfordert bei umfangreichen Matrizen, wie sie bei praktischen Problemen nicht selten sind, in der Regel rechentechnische Hilfsmittel. Für die Handrechnung ist das bereits erwähnte Schema von FALK eine bewährte Hilfe. Zur Sicherheit sollte eine zusätzliche Zeile mit den Spaltensummen oder eine zusätzliche Spalte mit den Zeilensummen oder beides als Probe mitgeführt werden. Bei gewährleisteter Verkettbarkeit kann man auch Produkte aus mehr als zwei Faktoren bilden.

Beispiel 4.19

Man berechne das Produkt aus

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 6 \\ 11 & 3 & -5 & 2 \\ 1 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Das Schema von FALK mit Spalten- und Zeilensummenprobe liefert

				1	2	3
				−3	1	−2
				4	0	4
				2	1	3
2	−1	4	6	33	9	42
11	3	−5	2	−14	27	13
1	7	2	0	−12	9	−3
14	9	1	8	7	45	52

Man erhält als Produkt

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 33 & 9 \\ -14 & 27 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}$$

Beispiel 4.20

Man berechne $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E}$ aus

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung (mit Spaltensummenprobe):

			1	0	0
			0	1	0
			0	0	1
1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6
5	7	9	5	7	9

, d. h. $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}$

Beispiel 4.21

Man berechne aus

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$ die Produkte $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$.

Lösung:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}10 & 11\\ -6 & 11\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}14 & 13\\ -6 & 7\end{pmatrix}$$

Anmerkung: Obwohl die Matrizen in beiden Reihenfolgen verkettbar sind, ist $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$.

Beispiel 4.22

Man berechne aus

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

das Produkt $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

Lösung:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3\\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3\end{pmatrix}$$

Anmerkung: Das Ergebnis ist eine einspaltige Matrix.

Beispiel 4.23

Zu berechnen ist das Produkt $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$ aus

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 5\\ -4 & 3 & 6 & 6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$$

Lösung:

Zuerst überlege man sich, daß wegen

$$\boldsymbol{A}_{(2,2)}\cdot\boldsymbol{B}_{(2,4)}\cdot\boldsymbol{C}_{(4,1)}=\boldsymbol{P}_{(2,1)}$$

die Verkettbarkeit gesichert ist. Die Rechnung kann man mit dem ersten Faktor links beginnen und nach rechts fortsetzen. Man kann auch mit dem letzten Faktor rechts beginnen und nach links heranmultiplizieren. Der Unterschied liegt in der Anzahl der zu bildenden Produkte.

$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$:

				1
				0
	3	1	0	5
	−4	3	2	6
−1	4	−19	11	8
2	0	6	2	0

−2
3
19
10
22
36

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$:

				1
				0
				−2
				3
3	1	0	5	18
−4	3	2	6	10
		−1	4	22
		2	0	36

Offensichtlich ist $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$.

Beispiel 4.24

Man berechne $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}$ und weitere Potenzen aus $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung: Die fortgesetzte Multiplikation mit dem Faktor $\boldsymbol{A}$ liefert in diesem Fall

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^4 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{usw.}$$

Beispiel 4.25

Man berechne $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ aus

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anders als bei der Multiplikation zweier reeller Zahlen kann das Produkt zweier Matrizen die Nullmatrix ergeben, ohne daß einer der Faktoren die Nullmatrix ist. In diesem Fall sagt man, die Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ seien *Nullteiler*.

Wie die vorstehenden Beispiele zeigen, können nicht alle Regeln der Multiplikation reeller Zahlen formal auf die Matrizenmultiplikation übertragen werden. Eine wesentliche Einschränkung ergibt sich daraus, daß nur verkettbare Matrizen in einer vorgeschriebenen Reihenfolge multiplizierbar sind. Insbesondere gilt bei der Matrizenmultiplikation das Kommutativgesetz in der Regel nicht. Von Sonderfällen abgesehen ist

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \, .$$

Im folgenden Satz sind die gültigen Regeln zusammengestellt.

Satz

Sofern die auftretenden Summen und Produkte gebildet werden können, gilt für Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ und Zahlen $\lambda \in \mathbb{C}$:

$\lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$	$= (\lambda \boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(\lambda \boldsymbol{B})$	Assoziativgesetz
$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$	$= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$	Assoziativgesetz
$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$	$= \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$	Distributivgesetz
$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$	$= \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$	Distributivgesetz
$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{0}$	$= \boldsymbol{0} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$	Multiplikation mit der Nullmatrix
$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E}$	$= \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$	Multiplikation mit der Einheitsmatrix
$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^T$	$= \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{A}^T$	Transponieren eines Produkts

Die angegebenen Formeln ergeben sich unter Beachtung von (4.7) aus den Rechengesetzen für reelle Zahlen. Die letzte Formel wird durch eine Typbetrachtung verständlich. Aus $\boldsymbol{A}_{(m,n)} \cdot \boldsymbol{B}_{(n,p)} = (\boldsymbol{AB})_{(m,p)}$ folgt $(\boldsymbol{AB})^T_{(p,m)}$. Auch das rechtsstehende Produkt $\boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{A}^T$ ist vom Typ (p, m), denn es gilt

$$\boldsymbol{B}^T_{(p,n)} \cdot \boldsymbol{A}^T_{(n,m)} = (\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A}^T)_{(p,m)} .$$

Das Beispiel 4.24 läßt erkennen, daß Potenzen von Matrizen durch fortgesetzte Multiplikation mit ein und demselben Faktor erklärbar sind. Allerdings ist das wegen der zu fordernden Verkettbarkeit nur für quadratische Matrizen möglich.

Definition

Ist $\boldsymbol{A}$ quadratisch und $m \in \mathbb{N}^*$, so heißt $\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{A}$ mit den m Faktoren $\boldsymbol{A}$ die m-te Potenz von $\boldsymbol{A}$.

4.3.5 Lineare Abbildung

Das Beispiel 4.22 zeigt, daß ein System linearer Funktionen der Gestalt (4.1) platzsparend als Matrizenprodukt

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax} \tag{4.8}$$

geschrieben werden kann. Darin ist allgemein $\boldsymbol{A}$ eine Matrix vom Typ (m, n), $\boldsymbol{x}$ ein Spaltenvektor vom Typ $(n, 1)$ und $\boldsymbol{y}$ ein Spaltenvektor vom Typ $(m, 1)$. Die Multiplikation mit der Matrix $\boldsymbol{A}$ transformiert den Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ in einen Vektor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$.

Auf diese Weise läßt sich das am Beginn des vorigen Abschnitts beschriebene zweistufige Produktionsmodell ebenfalls kürzer darstellen:

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{Bf} \tag{I}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{Az} \tag{II}$$

und durch Einsetzen von (I) in (II)

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bf}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{f}. \tag{III}$$

Das Matrixprodukt $\boldsymbol{AB}$ entsteht offensichtlich durch Einsetzen des Vektors $\boldsymbol{z}$ aus dem linearen System (I) in das lineare System (II). Diesen Vorgang bezeichnet man als *lineare Substitution*, den linearen Zusammenhang zwischen zwei Vektoren der Form (I) oder (II) als *lineare Transformation*. Der übergeordnete Begriff für beides ist *lineare Abbildung*.

Definition

Unter einer **linearen Abbildung**

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

versteht man die lineare Transformation eines Vektors $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ in einen Vektor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ durch Multiplikation mit einer Matrix $\boldsymbol{A}_{(m,n)}$. Als *lineare Substitution* bezeichnet man das Nacheinanderausführen mehrerer linearer Transformationen

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{u}.$$

Der Identität $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{x}$, die einen Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ in sich selbst überführt, entspricht die Multiplikation mit der n-reihigen Einheitsmatrix $\boldsymbol{E}$.

4.3.6 Matrizeninversion

Löst man die für reelle Zahlen geltende Gleichung $y = cx$ nach x auf, so erhält man $x = c^{-1}y$.

Für ein lineares Funktionensystem $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, in dem $\boldsymbol{y}$ der Vektor der von $\boldsymbol{x}$ abhängigen Variablen ist, könnte die Frage gestellt werden, wie sich $\boldsymbol{x}$ aus dem vorgegebenen $\boldsymbol{y}$ berechnen läßt. Es sei erneut an das zweistufige Produktionsmodell des Abschnitts 4.3.4 erinnert, in dem durch

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{f} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$$

der Rohstoffbedarf $\boldsymbol{r}$ aus den vorgegebenen Fertigproduktmengen berechenbar ist. Man kann aber auch umgekehrt nach den Fertigproduktmengen $\boldsymbol{f}$ fragen, die sich aus vorgegebenen Rohstoffmengen $\boldsymbol{r}$ herstellen lassen. Im Einklang zur Darstellung bei reellen Zahlen ist damit ein Zusammenhang

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{C}^{-1} \cdot \boldsymbol{r}$$

zu bestimmen, in dem noch offen ist, was man unter der Matrix $\boldsymbol{C}^{-1}$ versteht. Die folgende Überlegung soll das klären.

Gegeben sei die lineare Transformation $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. Durch Auflösen nach $\boldsymbol{x}$ ist der umgekehrte Zusammenhang $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$ zu bestimmen.

Setzt man $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$ in $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ ein, so erhält man

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$$

Ebenso ergibt sich durch Einsetzen von $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ in $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$ die Beziehung

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$$

In beiden Fällen handelt es sich um identische Transformationen

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{y} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{x}\,.$$

Die zu bestimmende Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$ muß demnach so beschaffen sein, daß bei Multiplikation mit $\boldsymbol{A}$ von links oder von rechts die Einheitsmatrix $\boldsymbol{E}$ entsteht. Damit die Verkettbarkeit in beiden Richtungen gewährleistet ist, muß $\boldsymbol{A}$ quadratisch sein.

Definition

Die quadratische Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$, die zusammen mit einer gegebenen quadratischen Matrix $\boldsymbol{A}$ die Bedingung

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} \tag{4.9}$$

erfüllt, heißt **inverse Matrix** oder **reziproke Matrix** oder **Kehrmatrix** zu**A**.

Zur Berechnung der inversen Matrix geht man vom linearen Funktionensystem $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ aus und multipliziert von links mit $\boldsymbol{A}^{-1}$:

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$$

Die Beziehung $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$ stellt das zu $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ inverse Funktionensystem dar, das u. a. mit dem Austauschverfahren ermittelt werden kann. Am Beispiel 4.4 wurde das in 4.1.2.1 gezeigt. Für die dort angegebene Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{lautet die inverse Matrix} \quad \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0{,}5 & 1{,}5 & -2 \\ -1 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

Die Probe ergibt

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0{,}5 & 1{,}5 & -2 \\ -1 & -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Auf eine weitere Möglichkeit zur Berechnung der inversen Matrix wird in 4.4.3.2 eingegangen.

Beim Berechnen der inversen Matrix, z.B. mit dem Austauschverfahren, kann das Verfahren abbrechen, weil sich kein von null verschiedenes Pivotelement mehr finden läßt. Dann gibt es keine inverse Matrix. Die Existenz der inversen Matrix ist eine besondere Eigenschaft, die nicht jeder Matrix, nicht einmal jeder quadratischen Matrix zukommt.

Definition

Eine quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$, zu der die inverse Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$ existiert, heißt **reguläre Matrix**, ansonsten **singuläre Matrix.**

Beim Rechnen mit inversen Matrizen sind die folgenden Regeln zu beachten.

Satz

Für reguläre Matrizen gilt

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} &= \boldsymbol{A} \\ (\boldsymbol{A}^{T})^{-1} &= (\boldsymbol{A}^{-1})^{T} \\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} &= \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \end{aligned}$$

Man bestätigt diese Regeln durch Multiplikation mit geeigneten Faktoren unter

Berücksichtigung der Definitionsgleichung (4.9) der inversen Matrix. Zum Beweis der dritten Regel setze man $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{AB})^{-1}$ und rechne wie folgt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}(\boldsymbol{AB}) &= (\boldsymbol{AB})^{-1}(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{E} \\ (\boldsymbol{XA})\boldsymbol{BB}^{-1} &= \boldsymbol{EB}^{-1} \\ \boldsymbol{XA} &= \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{XAA}^{-1} &= \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \\ \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \end{aligned}$$

Bei manchen Anwendungen treten quadratische Matrizen mit der folgenden Eigenschaft auf.

Definition

Eine quadratische Matrix **A** mit der Eigenschaft

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} \tag{4.10}$$

heißt **orthogonale Matrix**.

Da die Zeilen von $\boldsymbol{A}$ in $\boldsymbol{A}^T$ als Spalten erscheinen, verlangt (4.10) die Skalarproduktbildung der Zeilen mit den Spalten ein und derselben quadratischen Matrix. Die ausführliche Darstellung von (4.10) lautet

$$\boldsymbol{a}_i^T \cdot \boldsymbol{a}_k = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{für } i = k \end{cases}$$

Das bedeutet aus geometrischer Sicht, daß die Zeilen- bzw. Spaltenvektoren einer orthogonalen Matrix den Betrag 1 haben und paarweise aufeinander senkrecht stehen. Multipliziert man (4.10) von links mit $\boldsymbol{A}^{-1}$, so sieht man, daß für orthogonale Matrizen gilt

$$\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}^{-1}$$

Daraus folgt nach Multiplikation mit $(\boldsymbol{A}^T)^{-1}$, daß auch die inverse Matrix einer orthogonalen Matrix wieder orthogonal ist.

Beispiel 4.26

Die Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$ ist orthogonal, denn

es gilt $$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.3.7 Matrizengleichungen

Die Auflösung der Gleichung $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax}$ nach $\boldsymbol{x}$ lautet $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$. Hier wird $\boldsymbol{x}$ als unbekannter Zeilenvektor vorausgesetzt. Der entscheidende Lösungsgedanke ist die Multiplikation mit der inversen Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$. Das läßt sich auf allgemeinere

Zusammenhänge übertragen, aus denen eine unbekannte Matrix zu bestimmen ist. Eine Bestimmungsgleichung für eine unbekannte Matrix heißt *Matrizengleichung.* Als übliche Lösungsmethode kommen Ausklammern gemeinsamer Faktoren und Heranmultiplizieren mit einer geeigneten inversen Matrix in Frage. Um Schwierigkeiten zu vermeiden, sei vorausgesetzt, daß die zu bestimmende Matrix stets nur als Linksfaktor oder stets nur als Rechtsfaktor auftritt.
Die folgenden Beispiele zeigen das Lösungsprinzip.

Beispiel 4.27

Man bestimme $\boldsymbol{X}$ aus $\boldsymbol{AX}+\lambda\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
($\boldsymbol{X}$ ist ausschließlich Rechtsfaktor!)

Lösung:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{X} &= \boldsymbol{B} \qquad \text{(Es gilt stets } \boldsymbol{X}=\boldsymbol{EX}\text{)}\\ (\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{X} &= (\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{X} &= (\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{B}\end{aligned}$$

Beispiel 4.28

Man bestimme $\boldsymbol{X}$ aus $\boldsymbol{XA}+\lambda\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
($\boldsymbol{X}$ ist ausschließlich Linksfaktor, $\lambda\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}\lambda$)

Lösung:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E}) &= \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E})^{-1} &= \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E})^{-1}\\ \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E})^{-1}\end{aligned}$$

Beispiel 4.29

Man bestimme $\boldsymbol{X}$ aus $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{E}$ ($\boldsymbol{X}$ tritt nur einmal auf!)

Lösung:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}^2)^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{XBB}^{-1} &= (\boldsymbol{A}^2)^{-1}\boldsymbol{EB}^{-1}\\ \boldsymbol{EXE} &= (\boldsymbol{A}^2)^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{X} &= (\boldsymbol{BA}^2)^{-1}\end{aligned}$$

Beispiel 4.30

Man bestimme $\boldsymbol{X}$ aus $2\boldsymbol{X}-\boldsymbol{BX}-\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A})^T$

Lösung: Zunächst ist $(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A})^T=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}$ zu beachten.

$$\begin{aligned}2\boldsymbol{X}-\boldsymbol{BX}-\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X} &= \boldsymbol{E}\\ (2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}^T)\boldsymbol{X} &= \boldsymbol{E}\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}^T)^{-1}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}^T)\boldsymbol{X} &= (2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}^T)^{-1}\cdot\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{X} &= (2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}^T)^{-1}\end{aligned}$$

4.3.8 Blockmatrizen

Bisher wurden Matrizen betrachtet, deren Elemente reelle oder komplexe Zahlen sind. Bei manchen Untersuchungen ist es sinnvoll, Matrizen in Blöcke zu unterteilen. Eine Matrix, deren Elemente selbst Matrizen sind, bezeichnet man als *Blockmatrix* oder *Übermatrix.* Jeder Block als Element der Übermatrix ist dann eine sogenannte *Untermatrix.* Dieses Vorgehen ist insbesondere bei größeren und bei solchen Matrizen nützlich, die Einheitsmatrizen oder Nullmatrizen enthalten.

Beispiel 4.31

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c|cc} 3 & 2 & -1 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 3 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

ist in 6 Blöcke unterteilt. Darin ist $A_{21} = E$ eine Einheitsmatrix, $A_{13} = N$ eine Nullmatrix und A_{12}, A_{22} sind Spaltenmatrizen.

Bei der Einteilung in Blöcke dürfen die Trennlinien keine Stufen bilden. Wird das beachtet, haben alle Blöcke A_{ik} mit gleichem Zeilenindex i die gleiche Anzahl von Zeilen und alle Blöcke mit gleichem Spaltenindex die gleiche Anzahl von Spalten. Damit ist die Voraussetzung dafür erfüllt, daß man mit den Blöcken einer Blockmatrix nach den üblichen Regeln der Matrizenrechnung umgehen kann. Zu beachten ist dabei lediglich, daß die Elemente nicht Zahlen, sondern Matrizen sind. Voraussetzung für die Multiplikation zweier Blockmatrizen ist die Verkettbarkeit der Untermatrizen. Das folgende Beispiel macht dies deutlich.

Beispiel 4.32

Zu berechnen ist $C = A \cdot B$ aus

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{und} \quad B = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Lösung:

Die Blockeinteilung berücksichtigt vorhandene Null- bzw. Einheitsmatrizen.

Man erhält

$$\begin{pmatrix} E & A_{12} \\ A_{21} & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & N \\ N & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

und daraus

$$\begin{aligned} C_{11} &= EB_{11} + A_{12}N &&= B_{11} \\ C_{12} &= EN + A_{12}B_{22} &&= A_{12}B_{22} \\ C_{21} &= A_{21}B_{11} + NN &&= A_{21}B_{11} \\ C_{22} &= A_{21}N + NB_{22} &&= N \end{aligned}$$

Damit lautet die Produktmatrix

$$C = \begin{pmatrix} B_{11} & A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} & N \end{pmatrix}$$

Die Matrizen B_{11} und N können ohne Rechnung übernommen werden. Zu berechnen sind

$$\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -1 & -13 \\ 22 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Man erhält

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & -13 \\ 1 & -2 & 22 & -3 \\ 11 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In ähnlicher Weise können sich Vorteile bei der Berechnung der inversen Matrix ergeben, wenn bei der Zerlegung in Blöcke Null- oder Einheitsmatrizen auftreten. Um die Blöcke der inversen Matrix zu bestimmen, muß man Matrizengleichungen lösen.

Aufgaben 4.3 bis 4.7

4.4 Determinanten

4.4.1 Definition und Berechnung von Determinanten

Ein einfacher Weg zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

ist das Additionsverfahren. Nach Multiplikation der ersten Gleichung mit a_{22} und der zweiten mit $(-a_{12})$ und anschließender Addition erhält man

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\,x_1 &= b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ x_1 &= \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Entsprechend gilt

$$x_2 = \frac{a_{11}b_1 - a_{21}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \tag{4.12}$$

Beide Brüche enthalten den gleichen Nenner $D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Eine ähnliche Rechnung für ein lineares Gleichungssystem dreier Gleichungen mit 3 Unbekannten führt auf den Nenner

$$D = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Dieser Nenner, der sich aus der quadratischen Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems berechnen läßt, bestimmt maßgeblich das Ergebnis.

Definition

Die Zahl

$$D_2 = \det \boldsymbol{A}_{(2,2)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{4.13}$$

nennt man eine **Determinante 2. Ordnung** oder *zweireihige Determinante.*

Definition

Die Zahl

$$D_3 = \det \boldsymbol{A}_{(3,3)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

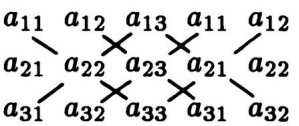
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

heißt **Determinante 3. Ordnung** oder *dreireihige Determinante.* (4.14)

Anmerkung:
Im Gegensatz zur Matrix, die ein Zahlenschema darstellt, ist eine Determinante eine Zahl, die aus einer quadratischen Matrix berechnet wird. Um diesen Unterschied äußerlich sichtbar zu machen, werden Matrizen in runde Klammern, Determinanten zwischen senkrechte Striche eingeschlossen.

Nach (4.13) berechnet sich eine zweireihige Determinante aus der zweireihigen quadratischen Matrix als Produkt der Hauptdiagonalelemente minus Produkt der Nebendiagonalelemente. Für dreireihige Determinanten gilt in ähnlicher Weise die Regel von SARRUS[1], nach der die ersten beiden Spalten anzufügen sind und dann gemäß (4.14) von den Produkten in Hauptdiagonalenrichtung die Produkte in Nebendiagonalenrichtung subtrahiert werden müssen:



Beispiel 4.33

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 = 13$$

[1] PIERRE FRÉDÉRIC SARRUS (1798 - 1861), Mathematiker in Strasbourg

Beispiel 4.34

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 8 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 5 + 3 \cdot 8 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \cdot 6 - (-1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 8 \cdot 6 + 3 \cdot 4 \cdot 5)$$

$$= 10 + 24 - 24 - (-1 + 96 + 60) = -145$$

Betrachtet man die Regel zur Berechnung der Produkte der dreireihigen Determinante in der Formel (4.14) etwas genauer, so erkennt man folgendes:

- Der erste Index läuft bei allen Produkten in der natürlichen Reihenfolge 1 2 3.
- Der zweite Index läuft bei positivem Vorzeichen zyklisch ebenfalls in der natürlichen Reihenfolge 1 2 3, 2 3 1, 3 1 2, bei negativem Vorzeichen zyklisch entgegengesetzt zur natürlichen Reihenfolge 1 3 2, 2 1 3, 3 2 1.

Gegenüber der natürlichen Reihenfolge 1 2 3 enthält die Reihenfolge 2 1 3 eine Vertauschung (Inversion), die Reihenfolge 2 3 1 zwei Vertauschungen. Derartige Anordnungen sind Gegenstand der sogenannten Kombinatorik, auf die im Abschnitt 12 eingegangen wird. An dieser Stelle werden daraus die folgenden Begriffe verwendet.

Definition

Unter einer **Permutation** versteht man eine Anordnung einer aus n verschiedenen Elementen bestehenden Menge in irgendeiner Reihenfolge. Als **Inversion** innerhalb einer Permutation bezeichnet man die Vertauschung zweier benachbarter Elemente entgegengesetzt zur natürlichen bzw. zur vereinbarten Reihenfolge. Eine Permutation heißt gerade bzw. ungerade je nachdem, ob sie eine gerade bzw. ungerade Anzahl von Inversionen aufweist.

Beispiel 4.35

Eine Permutation der Zahlen {1, 2, 3, 4} in der natürlichen Reihenfolge ist 1 2 3 4, die Permutation 1 2 4 3 enthält eine Inversion, 1 4 2 3 enthält zwei, 1 4 3 2 enthält drei Inversionen.

Beispiel 4.36

b c a ist eine Permutation mit zwei Inversionen gegenüber der natürlichen Reihenfolge *a b c*.

Nach diesen Überlegungen erkennt man, daß in der Definition der dreireihigen Determinante gemäß (4.14) das Vorzeichen der einzelnen Produkte durch die Anzahl der Inversionen beim zweiten Index bestimmt wird. Ist I die Anzahl der Inversionen, so erhält man das Vorzeichen aus $(-1)^I$.

Diese Eigenschaft nutzt man zur Definition einer Determinante n-ter Ordnung.

Definition

Es sei $k_1, k_2, \ldots, k_n$ eine beliebige Permutation der n Indizes $1, 2, \ldots, n$. Dann versteht man unter der Determinante D_n einer n-reihigen quadratischen Matrix den Zahlenwert

$$D_n = \det \boldsymbol{A}_{(n,n)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n} (-1)^I a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n} \tag{4.15}$$

Die Summation erstreckt sich über alle Permutationen der Indizes 1, 2, ..., n. D_n heißt **Determinante n-ter Ordnung** oder *n-reihige Determinante.*

Die praktische Berechnung einer n-reihigen Determinante läßt sich etwas einfacher gestalten. Die in (4.14) in den Klammern stehenden Differenzen können als zweireihige Determinanten geschrieben werden. Damit ist für (4.14) auch die folgende Darstellung möglich:

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{4.16}$$

Die Faktoren vor den zweireihigen Determinanten sind die Elemente der ersten Zeile mit wechselnden Vorzeichen. Man sagt, D_3 sei nach der ersten Zeile "entwickelt". Eine derartige Entwicklung ist mit jeder beliebigen Zeile oder Spalte durchführbar. Die in (4.16) auftretenden zweireihigen Determinanten entstehen aus D_3 durch Streichen der ersten Zeile und nacheinander der ersten, zweiten bzw. dritten Spalte. Dieses Vorgehen ist auf beliebige n-reihige Determinanten anwendbar.

Definition

Streicht man in einer Determinante n-ter Ordnung alle Elemente der i-ten Zeile und der k-ten Spalte, dann bilden die verbleibenden Elemente die **Unterdeterminante** Δ_{ik} der Ordnung $n-1$. Die mit $(-1)^{i+k}$ multiplizierte Unterdeterminante heißt **Adjunkte** A_{ik}:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \Delta_{ik} \tag{4.17}$$

Die Vorschrift zur Bestimmung des Vorzeichens der Adjunkte A_{ik} in (4.17) ist als **Schachbrettregel** bekannt, denn der Faktor $(-1)^{i+k}$ bewirkt wechselnde Vorzeichen nach dem folgenden Schema:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Unter Beachtung von (4.17) und (4.16) ist für die dreireihige Determinante D_3 folgende Darstellung möglich:

$$D_3 = \det \boldsymbol{A}_{(3,3)} = a_{11}\Delta_{11} - a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Der sogenannte **Entwicklungssatz von Laplace**[1] verallgemeinert das auf Determinanten n-ter Ordnung.

Satz

Man erhält den Wert einer n-reihigen Determinante D_n durch Entwicklung nach der i- ten Zeile

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \tag{4.18}$$

oder durch Entwicklung nach der k-ten Spalte

$$D_n = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \tag{4.19}$$

Für $n = 2$ und $n = 3$ folgt die Behauptung aus (4.13) bzw. (4.14). Um die Gültigkeit des Satzes für beliebiges n einzusehen, bedenke man, daß in (4.15) definitionsgemäß jedes Produkt aus jeder Zeile und Spalte der Determinante genau je einen Faktor enthält. In $a_{ik}A_{ik}$ stammt a_{ik} aus der i-ten Zeile und der k- ten Spalte, die damit als Spender für weitere Faktoren nicht mehr zur Verfügung stehen. Die i-te Zeile und die k-te Spalte sind daher zu streichen. Alle übrigen n-1 Zeilen und n-1 Spalten müssen in der Adjunkte A_{ik} durch je ein Element vertreten sein. Also ist A_{ik} eine Unterdeterminante, die durch Streichen der i-ten Zeile und der k-ten Spalte entsteht. Die rekursive Berechnung der Unterdeterminanten liefert zusammen mit der Vorschrift (4.15) die Behauptung für beliebiges n.

Beispiel 4.37

Mit Hilfe des Entwicklungssatzes von LAPLACE sind zu berechnen:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{(Entwicklung nach der 1. Zeile)}$$

[1] PIERRE SIMON LAPLACE (1749 - 1827), Mathematiker in Paris

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(3-4) - 3(12-2) - 1(8-1) = -39$$

Beispiel 4.38

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$ (Entwicklung nach der 2. Spalte)

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -23 + 63 = 40$$

Beispiel 4.39

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & -8 & -1 \\ 3 & 1 & -6 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$ (Entwicklung nach der 5. Zeile)

$$= -(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & -1 \\ 3 & 1 & -6 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$ (Entwicklung nach der 4. Zeile)

$$= -(-1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 89 = 89$$

4.4.2 Eigenschaften von Determinanten

Das Rechnen mit Determinanten läßt sich erheblich erleichtern, wenn man die nachfolgend erörterten Eigenschaften geschickt ausnutzt. Um die Darstellung zu vereinfachen, sollen die Zeilen und Spalten einer Determinante mit dem Oberbegriff Reihen bezeichnet werden. Außerdem sei daran erinnert, daß eine Determinante immer nur aus einer quadratischen Matrix berechnet werden darf. Betrachtet man eine solche Matrix als Anordnung nebeneinandergesetzter Spalten, so ist die Darstellung

$$\det \boldsymbol{A} = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

möglich. Die Beweise der folgenden Sätze sollen nur angedeutet bzw. auf zweireihige Determinanten beschränkt werden.

Satz

Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn die Zeilen gegen die Spalten getauscht werden, d. h. es gilt

$$\det \boldsymbol{A}^T = \det \boldsymbol{A} \tag{4.20}$$

Leicht einzusehen ist diese Eigenschaft für zweireihige Determinanten:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Für mehrreihige Determinanten muß zum Beweis der Entwicklungssatz von LAPLACE herangezogen werden.

Satz

Beim Vertauschen zweier benachbarter Reihen ändert sich das Vorzeichen der Determinante

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = -\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{i+1}, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \tag{4.21}$$

Bei einer derartigen Vertauschung werden in allen Produkten von (4.15) zwei benachbarte Elemente vertauscht, wodurch sich in jedem Produkt die Zahl I der Inversionen um 1 ändert. Das bewirkt in (4.15) den Vorzeichenwechsel.

Satz

Eine Determinante wird mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert, indem alle Elemente einer beliebigen Reihe der Determinante mit λ multipliziert werden. Umgekehrt kann ein Faktor λ ausgeklammert werden, wenn alle Elemente einer Reihe diesen Faktor enthalten:

$$\lambda \cdot \det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \ldots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4.22}$$

Da nach (4.15) jede Reihe für jedes Produkt der Determinante genau einen Faktor liefert, ist auch der Faktor λ der i-ten Reihe in jedem Produkt enthalten und kann daher ausgeklammert werden.

Da bei Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl λ jedes Element der Matrix mit λ zu multiplizieren ist, ergibt sich als Folgerung aus (4.22) für eine n-reihige quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ die Beziehung

$$\det(\lambda \boldsymbol{A}) = \lambda^n \det \boldsymbol{A} \tag{4.23}$$

Satz

Eine Determinante hat den Wert null, wenn sie zwei gleiche parallele Reihen enthält.

Diese Eigenschaft ergibt sich daraus, daß beim Vertauschen zweier gleicher Reihen die Determinante sich nicht ändert, nach (4.21) aber das Vorzeichen wechselt. Das ist nur möglich, wenn die Determinante null ist.

Satz

Eine Determinante hat den Wert null, wenn in ihr zwei parallele Reihen zueinander proportional sind.

Die Proportionalität $a_k = \lambda a_i$ erlaubt es, den Faktor λ auszuklammern. Dann erhält die verbleibende Determinante zwei gleiche Reihen und ihr Wert ist null. Ist insbesondere $\lambda = 0$, so ergibt sich der

Satz

Eine Determinante hat den Wert null, wenn alle Elemente einer Reihe null sind.

Der folgende Satz erweist sich als nützlich für die Addition zweier Determinanten, mehr noch aber für die Zerlegung einer Determinante in zwei Determinanten.

Satz

Unterscheiden sich zwei Determinanten nur in den Elementen ein und derselben Reihe, so gilt für die Summe

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a'_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a'_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a'_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} + a'_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} + a'_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} + a'_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4.24}$$

Die Entwicklung der beiden links stehenden Determinanten nach den Elementen der i-ten Spalte liefert die Beziehung

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{ki} + \sum_{k=1}^{n} a'_{ki}A_{ki} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ki} + a'_{ki})A_{ki}$$

woraus unmittelbar (4.24) folgt.

Zur Berechnung einer n-reihigen Determinante wird für $n > 3$ vorzugsweise der

Entwicklungssatz von LAPLACE gemäß (4.18) bzw. (4.19) herangezogen. Dabei ist die Rechnung besonders einfach, wenn in einer Reihe möglichst viele Elemente null sind. Diese Situation kann mit Hilfe des folgenden Satzes herbeigeführt werden.

Satz

Der Wert einer Determinante bleibt unverändert, wenn zu den Elementen einer Reihe das Vielfache der Elemente einer parallelen Reihe addiert wird, d. h.

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_i + \lambda \boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \tag{4.25}$$

Die in (4.25) rechts stehende Determinante kann nach (4.24) in zwei Determinanten zerlegt werden, von denen eine mit der in (4.25) links stehenden übereinstimmt und die andere null ist, da sie die beiden proportionalen Reihen $\boldsymbol{a}_k$ und $\lambda \boldsymbol{a}_k$ enthält.

Das folgende Beispiel soll zeigen, wie durch mehrmalige Anwendung dieses Satzes in einer Reihe Nullen erzeugt werden können, wodurch die Entwicklung nach den Elementen einer Reihe sehr einfach wird.

Beispiel 4.40

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 7 & 3 & 6 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{(1. Spalte } +2 \cdot \text{2.Spalte)}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & -5 & -2 \\ 1 & -1 & 6 & 2 \\ 7 & 3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{(3. Spalte } -3 \cdot \text{2. Spalte)}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 8 & -5 & -2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 7 & -3 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{(Entwicklung nach der 1. Zeile)}$$

$$= (-1) \cdot 377 = -377$$

Besonders einfach berechnet sich die Determinante einer Dreiecksmatrix.

Satz

Ist $\boldsymbol{A}$ eine Dreiecksmatrix, so gilt

$$\det \boldsymbol{A} = a_{11} a_{22} \ldots a_{nn} ,$$

d.h., der Wert der Determinante ist gleich dem Produkt der Hauptdiagonalenelemente. Insbesondere gilt für die Einheitsmatrix $\det \boldsymbol{E} = 1$.

Diese Eigenschaft folgt unmittelbar aus der wiederholten Anwendung des Entwicklungssatzes (4.18) bzw. (4.19).

Durch das Erzeugen von Nullen nach (4.25) oder durch die Anwendung des Gaußschen Algorithmus ist es immer möglich, eine beliebige quadratische Matrix in eine Dreiecksmatrix umzuformen. Da beim Gaußschen Algorithmus Zeilenvielfache zu parallelen Zeilen addiert werden, ändert sich wegen (4.25) der Wert der zugehörigen Determinante nicht. Das folgende Beispiel vergleicht die Anwendung von (4.25) und den Gaußschen Algorithmus. Man sieht, daß die Rechnungen inhaltlich identisch sind.

Beispiel 4.41

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 9 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 10 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 9 & -3 \\ 0 & 5 & -15 & 16 \\ 0 & 10 & -26 & 12 \\ 0 & 20 & -56 & 19 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 9 & -3 \\ 0 & 5 & -15 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & -20 \\ 0 & 0 & 4 & -45 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 9 & -3 \\ 0 & 5 & -15 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & -25 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot (-25) = -500$$

x_1	x_2	x_3	x_4	Probe
1	−2	9	−3	5
2	1	3	10	16
3	4	1	3	11
6	8	−2	1	13
	5	−15	16	6
	10	−26	12	−4
	20	−56	19	−17
		4	−20	−16
		4	−45	−41
			−25	−25

d.h.

$$\det \boldsymbol{A} = 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot (-25) = -500$$

Für den Fall, daß die Determinante eines Matrizenproduktes zu berechnen ist, gilt der

Satz

Sind $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ zwei Matrizen vom Typ (n, n), so ist

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \det \boldsymbol{A} \cdot \det \boldsymbol{B} \,. \tag{4.26}$$

Für $n = 2$ läßt sich das nachprüfen, indem zunächst die Determinante des Matrizenprodukts $\boldsymbol{AB}$ errechnet wird:

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \det \begin{pmatrix} a_{11}b_{12} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Nach mehrmaliger Anwendung von (4.24) erhält man daraus eine Zerlegung in vier Determinanten, von denen zwei wegen gleicher Zeilen null sind. Aus den übrigen

beiden Determinanten lassen sich Faktoren ausklammern, wodurch sich die rechte Seite von (4.26) ergibt.

Eine unmittelbare Folgerung aus (4.26) ist der

Satz

Sind $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ Matrizen des Typs (n, n), so gilt

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{BA}) \tag{4.27}$$

$$\det(\boldsymbol{A}^n) = (\det \boldsymbol{A})^n \tag{4.28}$$

und falls $\boldsymbol{A}$ zusätzlich regulär ist

$$\det \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \tag{4.29}$$

(4.29) gilt wegen $\det \boldsymbol{A} \cdot \det \boldsymbol{A}^{-1} = \det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}) = \det \boldsymbol{E} = 1$.

4.4.3 Ausgewählte Anwendungen

4.4.3.1 Cramersche Regel

Am Beginn des Abschnitts 4.4.1 wurde ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit 2 Unbekannten betrachtet. Die Formeln (4.11) und (4.12) lassen sich mit Hilfe zweireihiger Determinanten darstellen:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Demnach erhält man die Lösungen des linearen Gleichungssystems als Quotienten zweier Determinanten, wovon die Nennerdeterminante D mit der Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems identisch ist. Die Zählerdeterminante erhält man, indem die Koeffizienten der zu berechnenden Unbekannten durch die rechte Seite des Gleichungssystems ersetzt werden. Das gilt allgemein.

Satz (Cramersche Regel)[1]

Die Lösungen x_i eines inhomogenen linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ ergeben sich für $D = \det \boldsymbol{A} \neq 0$ eindeutig aus der Formel

$$x_i = \frac{D_i}{D} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.30}$$

worin die Determinanten D_i aus D entstehen, indem die i-te Spalte durch die Spalte $\boldsymbol{b}$ der rechten Seiten ersetzt wird.

[1] GABRIEL CRAMER (1704 - 1752), Philosoph und Mathematiker in Genf

Die Voraussetzung $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ beschränkt die Anwendbarkeit dieser Regel auf Gleichungssysteme mit quadratischer Koeffizientenmatrix. Man kann sich davon überzeugen, daß für $D = 0$ und $D_i = 0 (i = 1, 2, \ldots, n)$ das System parameterabhängige frei wählbare Lösungen besitzt, wogegen für $D = 0$ und mindestens ein $D_i \neq 0$ wegen eines Widerspruchs keine Lösung existiert.

Beispiel 4.42

Aus

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 15 \\ x_1 + x_2 &= -2 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

folgt

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 15 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 15 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 21$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 15 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -28$$

und daraus

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -3, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 4$$

4.4.3.2 Berechnung der inversen Matrix

Im Abschnitt 4.3.6 wurde das Austauschverfahren zur Berechnung der inversen Matrix herangezogen. Die Verwendung von Determinanten eröffnet eine weitere Möglichkeit, aus einer gegebenen Matrix $\boldsymbol{A}$ die zugehörige inverse Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$ zu berechnen. Setzt man $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$, so können die zunächst noch unbekannten Elemente von $\boldsymbol{A}^{-1}$ mit x_{ik} bezeichnet werden. Nach Definition der inversen Matrix gilt dann

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{E}$$

Das ist eine Matrizengleichung, die durch das Falksche Schema die folgende Gestalt erhält:

$$\begin{array}{cccc|c|ccc}
 & & & & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\
 & & & & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\
 & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \\
\hline
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}$$

Untersucht man, wie durch Multiplikation von $\boldsymbol{A}$ mit den Spalten von $\boldsymbol{X}$ die Spalten der Einheitsmatrix $\boldsymbol{E}$ entstehen, so erhält man für die umrahmte erste Spalte:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_{11} & + & a_{12}x_{21} & + & \dots & + & a_{1n}x_{n1} & = & 1 \\
a_{21}x_{11} & + & a_{22}x_{21} & + & \dots & + & a_{2n}x_{n1} & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1}x_{11} & + & a_{n2}x_{21} & + & \dots & + & a_{nn}x_{n1} & = & 0
\end{array}$$

Unter der Bedingung, daß $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, liefern die Cramersche Regel und der Entwicklungssatz von LAPLACE:

$$x_{11} = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \cdot A_{11}$$

In gleicher Weise kann man die übrigen Elemente x_{ik} der Matrix $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$ berechnen. Für x_{21} ergibt sich

$$x_{21} = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \cdot A_{12}$$

Allgemein gilt $\quad x_{ik} = \dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}} \cdot A_{ki}$

Bei der Berechnung der Adjunkten A_{ki} darf die Schachbrettregel zur Bestimmung des Vorzeichens nicht außer acht gelassen werden.
Somit gilt der

Satz

Für $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ erhält man die inverse Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$ nach der Formel

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

Da $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ die einzige Bedingung dieses Satzes ist, andererseits nur für reguläre Matrizen die inverse Matrix existiert, folgt daraus unmittelbar der

Satz

Eine Matrix $\boldsymbol{A}$ ist genau dann regulär, wenn $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ ist.

Beispiel 4.43

Besonders einfach läßt sich die inverse Matrix aus 2- bzw. 3reihigen quadratischen Matrizen nach (4.31) berechnen.

Aus $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ folgt

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,45 & -0,10 \\ -0,40 & 0,20 \end{pmatrix}$$

Beispiel 4.44

Aus $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 10 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ folgt

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -5 & 19 & -37 \\ 0 & -2 & 6 \\ 5 & -9 & 17 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0,5 & 1,9 & -3,7 \\ 0 & -0,2 & -0,6 \\ 0,5 & -0,9 & 1,7 \end{pmatrix}$$

4.4.3.3 Vektorielles Produkt zweier Vektoren

Eine formale Anwendungsmöglichkeit einer dreireihigen Determinante bietet das bereits im Abschnitt 3.2.7 behandelte vektorielle Produkt zweier Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ des Raumes $\mathbb{R}^3$. Mit der in diesem Zusammenhang üblichen Bezeichnung $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ für die drei Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$ ergibt sich das vektorielle Produkt

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ der Vektoren

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} \text{ und } \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$$

nach der Vorschrift

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{k}$$

Die in den Klammern stehenden Differenzen können als zweireihige Determinanten dargestellt werden und zusammen mit dem Entwicklungssatz von LAPLACE erhält man

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

4.4.3.4 Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte

Die Gleichung einer Geraden durch die beiden vorgegebenen Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ läßt sich aus der sogenannten Zweipunktegleichung errechnen:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Eine Umformung ergibt

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1) = 0$$

und

$$x_2y - xy_2 - x_1y + xy_1 + x_1y_2 - x_2y_1 = 0$$

bzw.

$$\begin{vmatrix} x_2 & x \\ y_2 & y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & x \\ y_1 & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

Schließlich ermöglicht der Entwicklungssatz von LAPLACE die Darstellung

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \end{vmatrix} = 0$$

Aufgaben 4.8 bis 4.10

4.5 Theorie der Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

4.5.1 Rang einer Matrix

Eine grundlegende Aufgabe der linearen Algebra ist die Untersuchung der Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme. Wie die Beispiele 4.1 bis 4.3 zeigten, können drei mögliche Fälle eintreten. Ein lineares Gleichungssystem kann eine eindeutige Lösung besitzen, es kann beliebig viele, parameterabhängige Lösungen haben, oder es hat überhaupt keine Lösung.

Eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{x}$ des Systems $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ gibt es wegen $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ aber nur, wenn die inverse Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$ existiert. Das bedeutet, daß die Matrix $\boldsymbol{A}$ als regulär und damit $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ vorauszusetzen sind (vgl. Gl. (4.31)). Nach den Regeln des Abschnitts 4.4.2 ist $\det \boldsymbol{A} = 0$ eine Folge der Existenz linear abhängiger Reihen innerhalb der Matrix $\boldsymbol{A}$.

Satz

$\det \boldsymbol{A} = 0$ gilt genau dann, wenn die Zeilen- bzw. Spaltenvektoren von $\boldsymbol{A}$ linear abhängig sind.

Der *Beweis* dieses Satzes ist in zwei Richtungen zu führen. Wegen $\det \boldsymbol{A}^T = \det \boldsymbol{A}$ genügt es, die Aussage für Spaltenvektoren zu zeigen. Setzt man die Spaltenvektoren als linear abhängig voraus, so ist mindestens ein Vektor $\boldsymbol{a}_k$ Linearkombination der übrigen:

$$\boldsymbol{a}_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i \boldsymbol{a}_i$$

und kann daher wegen (4.22) und (4.24) als Summe mehrerer Determinanten dargestellt werden, die alle mindestens zwei gleiche Spalten haben. Daraus folgt $\det \boldsymbol{A} = 0$. Andererseits kann nach Gl. (4.25) $\det \boldsymbol{A}$ ohne Änderung ihres Wertes in die Determinante einer Dreiecksmatrix umgeformt werden, deren Wert gleich dem Produkt der Hauptdiagonalenelemente ist. Wird $\det \boldsymbol{A} = 0$ vorausgesetzt, so muß mindestens eines dieser Hauptdiagonalenelemente null sein. Damit bricht der Gaußsche Algorithmus ab, bevor eine eindeutige Auflösung errreicht ist. Daraus folgt die lineare Abhängigkeit der Vektoren.

Für die weiteren Überlegungen interessiert die Frage, wie viele linear unabhängige Zeilen- oder Spaltenvektoren eine Matrix hat.

Definition

Die Maximalzahl r der linear unabhängigen Zeilen- oder Spaltenvektoren einer Matrix $\boldsymbol{A}$ heißt **Rang** der Matrix. Man schreibt $r = r(\boldsymbol{A})$.

Hier schließt sich sofort die weitere Frage an, wie der Rang einer Matrix zu bestimmen ist. Zuvor soll gezeigt werden, daß zwischen dem Rang $r(\boldsymbol{A})$ und der Alternative $\det \boldsymbol{A} = 0$ oder $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ ein enger Zusammenhang besteht.

Satz

Eine Matrix $\boldsymbol{A}$ vom Typ (m, n) hat genau dann den Rang r mit

$$r = r(\boldsymbol{A}) \leq \min(m, n), \tag{4.32}$$

wenn es eine r-reihige nichtverschwindende Unterdeterminante von $\boldsymbol{A}$ gibt und jede Unterdeterminante von $\boldsymbol{A}$ mit mehr als r Reihen verschwindet.

Beweis:
Wird $r(\boldsymbol{A}) = r$ vorausgesetzt, so folgt nach Definition des Ranges als Maximalzahl linear unabhängiger Reihen von $\boldsymbol{A}$ und nach dem vorhergehenden Satz die Existenz einer r-reihigen Unterdeterminante $\det \boldsymbol{A}_r \neq 0$, und für jede $(r+1)$-reihige Unterdeterminante gilt $\det \boldsymbol{A}_{r+1} = 0$. Ist andererseits $\det \boldsymbol{A}_r \neq 0$, aber $\det \boldsymbol{A}_{r+1} = 0$, so hat $\boldsymbol{A}$ genau r linear unabhängige Reihen und es ist $r(\boldsymbol{A}) = r$. Damit ist $r(\boldsymbol{A})$ gleich der Zeilen- bzw. Spaltenanzahl r der Unterdeterminante größter Ordnung mit $\det \boldsymbol{A}_r \neq 0$. Da die Unterdeterminante nur aus einer quadratischen Matrix $\boldsymbol{A}_r$ hervorgehen kann, muß $r(\boldsymbol{A}) \leq \min(m, n)$ erfüllt sein.

Aus den vorangegangenen Überlegungen dieses Abschnitts und der Abschnitte 4.3 und 4.4 ergibt sich der

Satz

Für eine quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ vom Typ (n, n) sind folgende Aussagen gleichbedeutend:
(1) Die Matrix $\boldsymbol{A}$ ist regulär.
(2) Zur Matrix $\boldsymbol{A}$ existiert eine inverse Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$.
(3) $\det \boldsymbol{A} \neq 0$
(4) Die Zeilen- bzw. Spaltenvektoren von $\boldsymbol{A}$ sind linear unabhängig.
(5) $r(\boldsymbol{A}) = n$

Diese Zusammenhänge eröffnen Wege zur praktischen *Rangbestimmung* einer Matrix. Wegen der Aussage (3) des vorstehenden Satzes könnte man versuchen, aus einer Matrix $\boldsymbol{A}$ schrittweise Unterdeterminanten möglichst hoher Ordnung zu bilden, bis man eine Unterdeterminante mit $\det \boldsymbol{A}_r \neq 0$ findet. Das wäre mühsam und unsystematisch. Günstiger ist die Bezugnahme auf Aussage (4) und die Verwendung des Austauschverfahrens. Betrachtet man $\boldsymbol{A}$ als Koeffizientenmatrix des linearen Funktionensystems

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

so bewirkt das Austauschverfahren die Auflösung nach $\boldsymbol{x}$ mit

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}.$$

Wie bereits gezeigt, kann das Verfahren abbrechen, weil alle noch als Pivotelement in Frage kommenden Elemente null sind. Das ist gleichbedeutend mit der linearen Abhängigkeit zwischen den Zeilen- bzw. Spaltenvektoren der Matrix. Dabei läßt sich aus der letzten Tabelle des Austauschverfahrens sogar die Art der linearen Abhängigkeit ablesen. Der Rang der Matrix $\boldsymbol{A}$ ist identisch mit der Höchstzahl der beim Austauschverfahren durchführbaren Schritte. Begnügt man sich mit der Feststellung des Ranges, ohne die Art der linearen Abhängigkeit bestimmen zu wollen, kann das Austauschverfahren durch Tilgung der ausgetauschten Zeilen und Spalten verkürzt werden. Das folgende Beispiel stellt beide Möglichkeiten nebeneinander.

Beispiel 4.45

Zu bestimmen ist der Rang von $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Lösung:

Vollständiges Austauschverfahren:

T_1	x_1	x_2	x_3	x_4	Probe
y_1	1	−1	1	2	−2
y_2	3	−2	1	4	−5
y_3	2	−1	0	2	−2
y_4	0	1	−2	−2	4
K	*	1	−1	−2	2

T_2	y_1	x_2	x_3	x_4	Probe
x_1	1	1	−1	−2	2
y_2	3	1	−2	−2	1
y_3	2	1	−2	−2	2
y_4	0	1	−2	−2	4
K	−3	*	2	2	−1

T_3	y_1	y_2	x_3	x_4	Probe
x_1	−2	1	1	0	1
x_2	−3	1	2	2	−1
y_3	−1	1	0	0	1
y_4	−3	1	0	0	3

Austauschverfahren mit Zeilen- und Spaltentilgung:

T_1	x_1	x_2	x_3	x_4	Probe
y_1	1	−1	1	2	−3
y_2	3	−2	1	4	−6
y_3	2	−1	0	2	−3
y_4	0	1	−2	−2	3
K	*	1	−1	−2	3

T_2	x_2	x_3	x_4	Probe
y_2	1	−2	−2	3
y_3	1	−2	−2	3
y_4	1	−2	−2	3
K	1	−2	−2	−3

T_3	x_3	x_4	Probe
y_3	0	0	0
y_4	0	0	0

Es ließen sich 2 Austauschschritte durchführen. Ein weiterer Variablentausch scheitert daran, daß sämtliche möglichen Pivotelemente null sind. Daher ist $r(\boldsymbol{A}) = 2$. Aus der letzten Tabelle der linksstehenden Rechnung ist darüber hinaus ablesbar:

$$\begin{aligned} y_3 &= -y_1 + y_2 \\ y_4 &= -3y_1 + y_2 \end{aligned}$$

Damit ist die Art der Abhängigkeit zwischen den Zeilen der Matrix $\boldsymbol{A}$ beschrieben.

In entsprechender Weise läßt sich auch der Gaußsche Algorithmus zur Rangbestimmung verwenden. Der Rang der Matrix ist identisch mit der Anzahl der Zeilen des gestaffelten Gleichungssystems.

Beispiel 4.46

Für die Matrix $\boldsymbol{A}$ aus Beispiel 4.45 ergibt der Gaußsche Algorithmus

x_1	x_2	x_3	x_4	Probe
1	−1	1	2	3
3	−2	1	4	6
2	−1	0	2	3
0	1	−2	−2	−3
	1	−2	−2	−3
	1	−2	−2	−3
	1	−2	−2	−3
		0	0	0
		0	0	0

woraus $r(\boldsymbol{A}) = 2$ folgt.

4.5.2 Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

4.5.2.1 Grundlagen

Die Aussagen des vorangehenden Abschnitts erlauben nun eine genauere Untersuchung der Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme. Zu berücksichtigen ist dabei, daß die Anzahl der Gleichungen von der Anzahl der Unbekannten verschieden sein kann. Betrachtet werde ein System von m linearen Gleichungen mit n Unbekannten:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{4.33}$$

für das nach den Regeln der Matrizenrechnung gleichberechtigt auch die folgenden Darstellungen stehen können:

$$\boldsymbol{a}_1 x_1 + \boldsymbol{a}_2 x_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_n x_n = \boldsymbol{b} \tag{4.33'}$$

bzw.

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{4.33''}$$

bzw.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{4.33'''}$$

Um exakte Formulierungen zu ermöglichen, sei zunächst folgendes vereinbart.

Definition

Die um die rechten Seiten $\boldsymbol{b}$ ergänzte Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$ des linearen Gleichungssystems (4.33) bzw. (4.33''') heißt **erweiterte Koeffizientenmatrix**. Man schreibt

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Die zu klärende Frage wird durch ein leicht zu durchschauendes Beispiel deutlich.

Beispiel 4.47

Gegeben sei das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 3x_1 + 6x_2 &= 12 \end{aligned}$$

Nach Multiplikation der zweiten Gleichung mit dem Faktor $\frac{1}{3}$ erhält man

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

was offensichtlich ein Widerspruch ist und Unlösbarkeit des Gleichungssystems bedeutet. Die Ursache dafür liegt darin, daß

$$r(\boldsymbol{A}) = r \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 1$$

wegen der linearen Abhängigkeit der Zeilen bzw. Spalten,
aber

$$r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = r \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix} = 2$$

Die grundlegende Aussage zur Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystem liefert der

Satz

Ein lineares Gleichungssystem ist dann und nur dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix mit dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix übereinstimmt.

Zum *Beweis* beachte man, daß $\boldsymbol{A}$ vollständig in $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ enthalten ist. Der Rang von $\boldsymbol{A}$ kann also nicht größer als der von $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ sein:

$$r(\boldsymbol{A}) \leq r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) .$$

Da $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ genau eine Spalte mehr als $\boldsymbol{A}$ enthält, gilt aber auch

$$r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \leq r(\boldsymbol{A}) + 1,$$

folglich $r(\boldsymbol{A}) \leq r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \leq r(\boldsymbol{A}) + 1$.

Wäre $r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = r(\boldsymbol{A}) + 1$, würde das die Widersprüchlichkeit und damit die Unlösbarkeit des Gleichungssystems bedeuten. Also gilt $r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = r(\boldsymbol{A})$. Da die Hinzunahme des Spaltenvektors $\boldsymbol{b}$ zu den Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ der Matrix $\boldsymbol{A}$ den Rang von $\boldsymbol{A}$ nicht verändert, ist $\boldsymbol{b}$ von $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ linear abhängig (vgl. (4.33')). Damit ist gesichert, daß eine Lösung des Systems existiert, deren Art im folgenden näher untersucht wird.

4.5.2.2 Inhomogene lineare Gleichungssysteme

Betrachtet werde ein lineares Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$ in der Darstellung (4.33). Da die Anzahl m der Gleichungen nicht unbedingt mit der Anzahl n der Unbekannten übereinstimmen muß, ergeben sich drei Fälle, die im folgenden untersucht werden.

Fall $m = n$

Die Bedingung für die Lösbarkeit des Systems, nämlich

$$r = r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$$

sei erfüllt. Dann gibt es die beiden Möglichkeiten $r = n$ oder $r < n$.

Aus $r = n$ folgt $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ und die Existenz von $\boldsymbol{A}^{-1}$. Damit hat das System $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ die eindeutige Lösung $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.

Für $r < n$ kann man annehmen, daß die ersten r Gleichungen linear unabhängig sind. Notfalls muß man durch Umordnen der Gleichungen dafür sorgen. Dann ist die in der linken oberen Ecke des Systems stehende Unterdeterminante von null verschieden:

$$\det \boldsymbol{A}_{(r,r)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Das aus den ersten r Gleichungen bestehende System läßt sich so schreiben:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1r}x_r & = & b_1 & - & a_{1,r+1}x_{r+1} & - & \ldots & - & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2r}x_r & = & b_2 & - & a_{2,r+1}x_{r+1} & - & \ldots & - & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}x_1 & + & a_{r2}x_2 & + & \ldots & + & a_{rr}x_r & = & b_r & - & a_{r,r+1}x_{r+1} & - & \ldots & - & a_{rn}x_n \end{array} \tag{4.34}$$

Die auf der rechten Seite stehenden $n - r$ Unbekannten $x_{r+1}, \ldots, x_n$ treten als frei wählbare Parameter auf. Die r Unbekannten $x_1, \ldots, x_r$ hängen von der Wahl dieser Parameter ab.

Für jede Wahl von $x_{r+1}, \ldots, x_n$ sind die rechten Seiten in (4.34) fest vorgegebene Zahlen. Jede Veränderung auch nur eines dieser Parameter führt zu einer neuen Lösung. Die Anzahl der Lösungen ist nicht begrenzt. Jede Lösung erfüllt auch die restlichen $n - r$ Gleichungen, da diese von den ersten r Gleichungen linear abhängig sind.

Fall $m > n$
Das System enthält mehr Gleichungen als Unbekannte. Wegen (4.32) kann $r = r(\boldsymbol{A})$ höchstens gleich n sein. Dann sind wie im obigen Fall $n - r$ Unbekannte frei wählbar. Wegen $m > n$ gibt es überflüssige Gleichungen, die gestrichen werden können.

Fall $m < n$
Das System enthält weniger Gleichungen als Unbekannte. $r = r(\boldsymbol{A})$ kann höchstens gleich m sein. Für $r = m$ sind $n - m$ Unbekannte frei wählbar, für $r < m$ gibt es $n - r$ frei wählbare Parameter.

4.5.2.3 Homogene lineare Gleichungssysteme

Aus (4.33) erhält man für $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ das homogene lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{o}$. Für dieses System ist die Lösbarkeitsbedingung $r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = r(\boldsymbol{A})$ stets erfüllt, da die Erweiterung von $\boldsymbol{A}$ durch den Nullvektor den Rang nicht verändert. Das System $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{o}$ ist daher immer lösbar. Zu unterscheiden sind die beiden Fälle $r = n$ und $r < n$.
Für $r = n$ ist $\det \boldsymbol{A}_{(n,n)} \neq 0$ und es existiert die inverse Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}_{(n,n)}$.
Aus $\boldsymbol{A}_{(n,n)}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ erhält man die eindeutige Lösung $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}_{(n,n)} \cdot \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$,
d. h., die sogenannte *triviale Lösung* $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ ist die einzige Lösung dieses Systems.
Für $r < n$ ist $\det \boldsymbol{A}_{(n,n)} = 0$ und es besteht lineare Abhängigkeit zwischen den Zeilen bzw. Spalten der Koeffizientenmatrix. In diesem Fall sind $n - r$ Unbekannte frei wählbar, d. h. neben der immer existierenden trivialen Lösung lassen sich unbegrenzt viele nichttriviale Lösungen finden.

Beispiel 4.48

Das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 3x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 - 7x_5 &= 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

ist auf Lösbarkeit zu untersuchen.

Lösung:
Ohne Rechnung erkennt man, daß die triviale Lösung

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$$

das Gleichungssystem erfüllt. Um die Frage zu beantworten, ob dieses System auch nichttriviale Lösungen besitzt, geht man von der Darstellung $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ mit der Annahme $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$ aus. Das Austauschverfahren liefert die folgende Rechnung, wobei wegen $y_i = 0$ die y-Spalten nach dem Austausch getilgt werden können (Spaltentilgung):

T_1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Probe
y_1	1	−1	−1	2	2	−3
y_2	3	−2	−4	5	3	−5
y_3	1	2	−4	−1	−7	9
y_4	0	1	−1	−1	−3	4
K	*	1	1	−2	−2	3

T_2	x_2	x_3	x_4	x_5	Probe
x_1	1	1	−2	−2	3
y_2	1	−1	−1	−3	4
y_3	3	−3	−3	−9	12
y_4	1	−1	−1	−3	4
K	*	1	3	3	−4

T_3	x_3	x_4	x_5	Probe
x_1	2	−1	1	−1
x_2	1	1	3	−4
y_3	0	0	0	0
y_4	0	0	0	0

Es sind nur 2 Austauschschritte durchführbar.
Daher ist $r(\boldsymbol{A}) = 2$. Aus der letzten Tabelle läßt sich ablesen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_3 - x_4 + x_5 \\ x_2 &= x_3 + x_4 + 3x_5 \end{aligned}$$

Die Unbekannten x_3, x_4, x_5 sind frei wählbare Parameter, x_1, x_2 hängen von diesen Parametern ab.

4.5.3 Allgemeine Lösung

Die vorstehenden Betrachtungen erhellen den Zusammenhang zwischen der Lösung eines inhomogenen und der Lösung des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems. Zunächst soll an das Beispiel 4.48 angeknüpft werden. Setzt man in der dort angegebenen Lösung $x_3 = u$, $x_4 = v$, $x_5 = w$, so erhält man

$$\begin{aligned} x_1 &= 2u - v + w \\ x_2 &= u + v + 3w \\ x_3 &= u \\ x_4 &= v \\ x_5 &= w \end{aligned} \qquad \text{bzw.} \qquad \boldsymbol{x} = u \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Lösungsvektor $\boldsymbol{x}$ ist demnach eine Linearkombination $\boldsymbol{x} = u\boldsymbol{x}^{(1)} + v\boldsymbol{x}^{(2)} + w\boldsymbol{x}^{(3)}$ der drei linear unabhängigen Vektoren

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allgemein gilt der

Satz

Ein *homogenes lineares Gleichungssystem* $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{o}$ mit n Unbekannten, dessen Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$ den Rang $r < n$ hat, besitzt genau $n - r$ linear unabhängige Lösungen, die man als **Fundamentalsystem** bezeichnet. Jede andere Lösung läßt sich als Linearkombination der linear unabhängigen Lösungen darstellen. Als sogenannte **allgemeine Lösung** des homogenen Systems erhält man

$$\boldsymbol{x}_h = \lambda_1 \boldsymbol{x}^{(1)} + \lambda_2 \boldsymbol{x}^{(2)} + \ldots + \lambda_{n-r} \boldsymbol{x}^{(n-r)}$$

Der *Beweis* stützt sich auf die Regeln der Matrizenrechnung. Wird $\boldsymbol{x}^{(i)}$ als Lösung von $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{o}$ vorausgesetzt, so sieht man, daß auch $\lambda_i \boldsymbol{x}^{(i)}$ und $\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i \boldsymbol{x}^{(i)}$ das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{o}$ erfüllen.

Bei der Betrachtung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ ist $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$ und $r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = r(\boldsymbol{A})$ vorauszusetzen. Zwischen den Lösungen dieses Systems und denen des zugehörigen homogenen Systems ist ein Zusammenhang zu erwarten, der im folgenden Satz beschrieben wird.

Satz:

Man erhält die allgemeine Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, indem zu einer speziellen (oder partikulären) Lösung $\boldsymbol{x}_p$ dieses inhomogenen Systems die allgemeine Lösung $\boldsymbol{x}_h$ des zugehörigen homogenen Systems addiert wird:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_h$$

Der *Beweis* hat die Existenz der allgemeinen Lösung des inhomogenen Systems zu zeigen und Aussagen zur Eindeutigkeit der Lösung zu machen.
Aus der Annahme, daß $\boldsymbol{x}_p$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems, $\boldsymbol{x}_h$ die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems sind, folgt

$$\boldsymbol{Ax}_p = \boldsymbol{b} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{Ax}_h = \boldsymbol{o}$$

Dann ist auch $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_h$ Lösung des inhomogenen Systems, denn es gilt nach Voraussetzung

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_h) = \boldsymbol{Ax}_p + \boldsymbol{Ax}_h = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{b}\,.$$

Ist mit $\boldsymbol{x}_p'$ neben $\boldsymbol{x}_p$ eine weitere spezielle Lösung des inhomogenen Systems ge-

geben, gelten also

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_p' = \boldsymbol{b} \text{ und } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{b},$$

so folgt durch Subtraktion $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_p' - \boldsymbol{x}_p) = \boldsymbol{o}$, d.h., $\boldsymbol{x}_p' - \boldsymbol{x}_p$ ist Lösung des homogenen Systems.

Für $r(\boldsymbol{A}) = n$ ist $\boldsymbol{x}_h = \boldsymbol{o}$ die einzige Lösung des homogenen Systems. In diesem Falle muß also $\boldsymbol{x}_p' - \boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{o}$ und somit $\boldsymbol{x}_p' = \boldsymbol{x}_p$ gelten. Die Lösung ist eindeutig.

Für $r(\boldsymbol{A}) < n$ gilt nach dem vorhergehenden Satz

$$\boldsymbol{x}_h = \lambda_1 \boldsymbol{x}^{(1)} + \lambda_2 \boldsymbol{x}^{(2)} + \ldots + \lambda_{n-r} \boldsymbol{x}^{(n-r)}$$

und somit

$$\boldsymbol{x}_p' - \boldsymbol{x}_p = \lambda_1 \boldsymbol{x}^{(1)} + \lambda_2 \boldsymbol{x}^{(2)} + \ldots + \lambda_{n-r} \boldsymbol{x}^{(n-r)}$$

bzw.

$$\boldsymbol{x}_p' = \boldsymbol{x}_p + \lambda_1 \boldsymbol{x}^{(1)} + \lambda_2 \boldsymbol{x}^{(2)} + \ldots + \lambda_{n-r} \boldsymbol{x}^{(n-r)}$$

in Übereinstimmung mit der Aussage dieses Satzes.

Beispiel 4.49

Das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 14 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 3x_5 &= 22 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 - 7x_5 &= -46 \\ x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 &= -20 \end{aligned}$$

besitzt die spezielle Lösung

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5$$

bzw.

$$\boldsymbol{x}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

woraus man zusammen mit der allgemeinen Lösung des Beispiels 4.48 als allgemeine Lösung des inhomogenen Systems erhält

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.11

4.6 Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme

4.6.1 Auswahl eines Lösungsverfahrens

Die bisher gezeigten Beispiele erwecken den Eindruck, als sei ein lineares Gleichungssystem völlig problemlos zu lösen. Das ist ein Irrtum, den man spätestens bei der Lösung sehr umfangreicher Gleichungssysteme mit vielen Unbekannten bemerkt. Auch zahlenmäßig sehr große Unterschiede der Koeffizienten können die Rechnung behindern.

Die vorhandenen Lösungsverfahren lassen sich zwei Gruppen zuordnen, den *direkten Verfahren* oder den *iterativen Verfahren.*

Zu der erstgenannten Gruppe gehören das Austauschverfahren und der Gaußsche Algorithmus, die im Abschnitt 4.1.2 behandelt wurden. Beide Verfahren gelten als Standardverfahren, die sich insbesondere für die Handrechnung gut eignen, die aber auch die Grundlage für leistungsfähige Computerprogramme darstellen. Die Handrechnung ist selbst unter Zuhilfenahme eines Taschenrechners begrenzt auf lineare Gleichungssysteme mit wenigen Variablen. Ein weiteres, im Abschnitt 4.4.3.1 behandeltes Verfahren, die Cramersche Regel, ist beschränkt auf inhomogene lineare Gleichungssysteme mit regulärer Koeffizientenmatrix.

Der Gaußsche Algorithmus verfolgt das Prinzip der schrittweisen Elimination der Unbekannten und wandelt die Koeffizientenmatrix um. Der Vorteil dieses Verfahrens liegt im relativ geringen Schreibaufwand. Das Austauschverfahren ist aufwendiger. Ein vorgegebenes Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ muß zunächst umgeformt werden in

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}, \tag{4.35}$$

wodurch die rechten Seiten ein entgegengesetztes Vorzeichen erhalten und $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$ vorauszusetzen ist. Diese Voraussetzung berechtigt zur Spaltentilgung. Die Bedingung $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$ (bzw. $y_i = 0$ für alle i) erfordert, daß nach der Wahl der Probenelemente in y-Zeilen die Zeilensumme null sein muß. Die weitere Rechnung verläuft so, wie im Abschnitt 4.1.2.1 gezeigt.

Die hier genannten *direkten Verfahren* haben die gemeinsame Eigenschaft, nach endlich vielen Schritten zu einem Ergebnis zu gelangen, das entweder die gesuchte Lösung ist oder die Nichtexistenz einer Lösung offenbart.

Die *iterativen Verfahren* verfolgen das Prinzip der schrittweisen Verbesserung einer Näherungslösung. Sie sind ohne Einsatz geeigneter Computerprogramme praktisch nicht durchführbar. Das gegebene Gleichungssystem ist so umzuformen, daß jede Gleichung nach einer Unbekannten umgestellt wird, wodurch die iterationsfähige Form

$$\boldsymbol{x} = \Phi(\boldsymbol{x}) \tag{4.36}$$

entsteht. Setzt man in die rechte Seite von (4.36) eine erste Näherungslösung $\boldsymbol{x}^{(0)}$ ein, so kann man daraus einen Lösungsvektor $\boldsymbol{x}^{(1)}$ errechnen, von dem man hofft, daß er genauer ist als der Startvektor $\boldsymbol{x}^{(0)}$. Die Iterationsvorschrift

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \Phi(\boldsymbol{x}^{(k)})$$

erzeugt eine Folge von Lösungsvektoren $\boldsymbol{x}^{(0)}$, $\boldsymbol{x}^{(1)}$, $\boldsymbol{x}^{(2)}$, ..., $\boldsymbol{x}^{(k)}$, ..., die bei Konvergenz des Verfahrens die Lösung mit jeder gewünschten Genauigkeit liefert. Einzelheiten und Bedingungen derartiger Verfahren sollen im Rahmen dieses Lehrbuches nicht behandelt werden. Im Bedarfsfall ist dazu geeignete Fachliteratur heranzuziehen.[1]

Sowohl bei den direkten als auch bei den iterativen Verfahren können während der Rechnung numerische Probleme auftreten, auf die im folgenden Abschnitt eingegangen wird.

4.6.2 Konditionierungsprobleme

Bei allen behandelten Lösungsverfahren muß im Laufe der Rechnung mindestens einmal, in der Regel aber mehrmals dividiert werden. Beim Austauschverfahren ist in jedem Schritt durch das Pivotelement zu dividieren, beim Gaußschen Algorithmus durch die Diagonalenelemente der oberen Dreiecksmatrix und bei der Cramerschen Regel durch die Koeffizientendeterminante. Damit das möglich ist, dürfen die erwähnten Elemente nicht null sein.
Sind die Pivotelemente kleine Zahlen nahe null oder ist $\det \boldsymbol{A}$ ein Wert in der Nähe von null, so lassen sich zwar alle Rechnungen ausführen, es kann aber zu großen Ungenauigkeiten kommen. Die verheerende Wirkung derartiger Divisionen wird sofort klar, wenn man bedenkt, daß zum Beispiel die Division durch 0,01 eine Multiplikation mit 100 bedeutet, wodurch alle Rundungsfehler verhundertfacht werden. Die Subtraktion nahezu gleichgroßer Zahlen kann zu Ziffernauslöschungen führen.

Beispiel 4.50

Für das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5{,}06x_1 + 2x_2 &= 29{,}30 \\ 10{,}14x_1 + 4x_2 &= 58{,}70 \end{aligned}$$

erhält man $\det \boldsymbol{A} = -0{,}04$ und $x_1 = 5$, $x_2 = 2$.
Durch Runden auf eine Dezimale entsteht das System

$$\begin{aligned} 5{,}1x_1 + 2x_2 &= 29{,}3 \\ 10{,}1x_1 + 4x_2 &= 58{,}7 \end{aligned}$$

Hierin sind lediglich die Koeffizienten von x_1 geringfügig verändert worden. Die erneute Rechnung liefert $\det \boldsymbol{A} = 0{,}2$ und

$$x_1 = \frac{1}{0{,}2} \begin{vmatrix} 29{,}3 & 2 \\ 58{,}7 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

[1] z.B. Schwetlick/Kretschmar: Numerische Verfahren für Naturwissenschaftler und Ingenieure. Fachbuchverlag Leipzig.

$$x_2 = \frac{1}{0,2} \begin{vmatrix} 5,1 & 29,3 \\ 10,1 & 58,7 \end{vmatrix} = 17,2$$

Ein sorgloses Runden, ohne die übrigen Bedingungen zu beachten, kann zu völlig anderen Ergebnissen führen.
Der im Beipiel gezeigte Sachverhalt wird durch die folgenden Begriffe beschrieben.

Definition

Ist zwar $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, aber der Wert nahe null, so heißt die Matrix $\boldsymbol{A}$ **fast singulär**. Ein lineares Gleichungssystem mit dieser Eigenschaft gilt als **schlecht konditioniert**.

Definition

Als **Maximumnorm** der quadratischen Matrix $\boldsymbol{A}$ bezeichnet man die Zahl

$$\|\boldsymbol{A}\| = \max_{i,k} |a_{ik}| \tag{4.37}$$

d.h. das dem Betrag nach größte Matrixelement bestimmt die Maximumnorm.

Offensichtlich gilt für die Einheitsmatrix $\|\boldsymbol{E}\| = 1$. Neben der Maximumnorm sind noch andere Matrixnormen üblich.
Aus der Definition der Maximumnorm und der des Matrixprodukts ist die Eigenschaft

$$\|\boldsymbol{AB}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{B}\| \tag{4.38}$$

herleitbar.

Definition

Die Zahl

$$\text{cond}(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \tag{4.39}$$

heißt **Kondition** (oder *Konditionalzahl*) von $\boldsymbol{A}$.

Es ist stets

$$\text{cond}(\boldsymbol{A}) \geq 1\,,$$

was unmittelbar aus (4.39), (4.38) und $\|\boldsymbol{E}\| = 1$ folgt. Liegt $\text{cond}(\boldsymbol{A})$ nur wenig über 1, so wird das zugehörige Gleichungssystem als gut konditioniert bezeichnet. Ein Gleichungssystem mit der kleineren Kondition gilt als besser konditioniert als eines mit einer größeren Kondition.

Beispiel 4.51

Im Anschluß an Beispiel 4.50 erhält man

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 5,06 & 2 \\ 10,14 & 4 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_1^{-1} = \frac{1}{-0,04} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -10,14 & 5,06 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 & 50 \\ 253,5 & -126,5 \end{pmatrix}$$

und $$\text{cond}(\boldsymbol{A}_1) = 10,14 \cdot 253,5 = 2570,49$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 5,1 & 2 \\ 10,1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2^{-1} = \frac{1}{0,2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -10,1 & 5,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -10 \\ -50,5 & 25,5 \end{pmatrix}$$

und $\qquad \text{cond}(\boldsymbol{A}_2) = 10,1 \cdot 50,5 = 510,05$

Somit ist $\boldsymbol{A}_2$ besser konditioniert als $\boldsymbol{A}_1$, d.h. bei $\boldsymbol{A}_2$ haben Rechenungenauigkeiten weniger schwere Folgen als bei $\boldsymbol{A}_1$.

Bei der rechentechnischen Bearbeitung derartiger Aufgaben ist zu beachten, daß ein Computer stets nur Zahlen mit begrenzter Ziffernanzahl verarbeiten kann. Verwendet man ein Programm, das die Kondition eines linearen Gleichungssystems nicht prüft, kann es zu Unstimmigkeiten kommen.

Aufgabe 4.12

4.7 Anwendungen der linearen Algebra

4.7.1 Matrizeneigenwertprobleme

Die lineare Transformation $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ mit einer Matrix $\boldsymbol{A}$ des Typs (m, n) überführt den n-dimensionalen Vektor $\boldsymbol{x}$ in einen m-dimensionalen Vektor $\boldsymbol{y}$. Es soll der Frage nachgegangen werden, ob es Vektoren $\boldsymbol{x}$ gibt, die bei einer derartigen Transformation unverändert bleiben oder in ein Vielfaches von sich selbst übergehen, für die also gilt

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \qquad \text{oder} \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\,.$$

Diese Frage ist die Grundfrage der sogenannten Eigenwerttheorie, die eine wichtige Rolle beim Vermeiden instabiler Schwingungen spielt, z.B. des Flatterns von Flugzeugtragflächen oder der Resonanz schwingender Brücken.
Für die folgenden Betrachtungen muß die Matrix $\boldsymbol{A}$ als quadratisch vorausgesetzt werden. Die Elemente von $\boldsymbol{A}$ und des Vektors $\boldsymbol{x}$ dürfen reell- oder komplexwertig sein. Zunächst sollen einige Begriffe vereinbart werden.

Definition

$\boldsymbol{A}$ sei eine komplexe Matrix vom Typ (n, n). Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ heißt ein **Eigenwert** von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{x}$ ein zugehöriger **Eigenvektor**, wenn gilt

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}. \tag{4.40}$$

Die Menge aller Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ heißt **Spektrum** von $\boldsymbol{A}$.

In dieser Definition ist $\boldsymbol{x}$ rechtsseitiger Faktor von $\boldsymbol{A}$, also genauer $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_r = \lambda\boldsymbol{x}_r$. Bei linksseitiger Multiplikation lautet die Aufgabe $\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \lambda\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}$. Durch Transponieren erhält man $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_l = \lambda\boldsymbol{x}_l$, d.h., die linksseitigen Eigenvektoren einer Matrix stimmen mit den rechtsseitigen Eigenvektoren der transponierten Matrix $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ überein, und demzufolge sind auch die zugehörigen Eigenwerte λ die gleichen. Daher

wird im folgenden das Eigenwertproblem nur für rechtsseitige Eigenvektoren ohne besondere Kennzeichnung betrachtet.
Um eine geometrische Vorstellung von der Gleichung (4.40) zu erhalten, sei eine Darstellung im $\mathbb{R}^2$ gewählt.
$\boldsymbol{x}_0$ ist ein Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$ genau dann, wenn $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \lambda_0\boldsymbol{x}_0$, d.h. wenn $\boldsymbol{x}_0$ in ein Vielfaches von sich selbst abgebildet wird. $\lambda_0\boldsymbol{x}_0$ hat die gleiche Richtung wie $\boldsymbol{x}_0$, die Länge ist aber auf das λ_0-fache verändert. Die Vektoren $\lambda_0\boldsymbol{x}_0$ erzeugen damit eine Gerade, die als *Fixgerade* bezeichnet wird, denn durch die Transformation $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ geht jeder beliebige Punkt dieser Geraden wieder in einen Punkt derselben Geraden über. Das Eigenwertproblem $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ besteht darin, alle zu $\boldsymbol{A}$ gehörigen Fixgeraden zu bestimmen.
Diese geometrische Interpretation läßt vermuten, daß es bei der Bestimmung eines Eigenvektors nur auf die Richtung, nicht auf die Länge des Vektors ankommt.

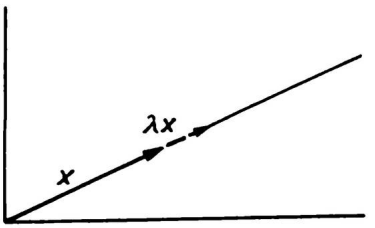


Bild 4.5

Satz

Ist $\boldsymbol{x}$ ein Eigenvektor der Matrix $\boldsymbol{A}$ und $c \neq 0$ eine Zahl mit $c \in \mathbb{C}$, so ist $c\boldsymbol{x}$ ebenfalls ein Eigenvektor zum gleichen Eigenwert, d.h., jeder Eigenvektor ist nur bis auf einen von null verschiedenen Faktor eindeutig bestimmt.

Beweis:

$\boldsymbol{x}$ sei Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$, d.h., $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$. Ist außerdem $\boldsymbol{y} = c\boldsymbol{x}$, also $\boldsymbol{x} = \frac{1}{c}\boldsymbol{y}$, so erhält man $\boldsymbol{A} \cdot \frac{1}{c}\boldsymbol{y} = \lambda\frac{1}{c}\boldsymbol{y}$ und somit $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{y}$. Damit erweist sich auch $\boldsymbol{y}$ als Eigenvektor.

Im folgenden wird gezeigt, wie sich Eigenwerte und Eigenvektoren praktisch berechnen lassen.

Berechnung von Eigenwerten

Die sogenannte *Eigengleichung* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ läßt sich wegen $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{x}$ umschreiben in $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}$. Die übliche Darstellung des Eigenwertproblems lautet somit

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \tag{4.41}$$

Das ist ein homogenes lineares Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}$ und dem Vektor $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ der Unbekannten. Anknüpfend an den Abschnitt 4.5.2.3 sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}$ ist regulär, d.h. $\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) \neq 0$.
   Dann existiert nur die triviale Lösung $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$.

2. $\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}$ ist singulär, d.h. $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = 0$.
   Dann gibt es auch Lösungen $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$.

Somit gilt der

Satz

Die Eigengleichung $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ hat genau dann nichttriviale Lösungen $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$, wenn

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = 0 . \tag{4.42}$$

Diese Gleichung heißt *charakteristische Gleichung* der Matrix $\boldsymbol{A}$.

Wird (4.42) ausgeschrieben, so erhält man

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Nach den Rechenregeln für Determinanten entsteht daraus, geordnet nach Potenzen von λ, das sogenannte *charakteristische Polynom*

$$p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \dots a_{nn})\lambda^{n-1} + \dots + \det \boldsymbol{A} = 0$$

bzw. nach Division durch $(-1)^n$ und unter Verwendung der Spur der Matrix $\boldsymbol{A}$ (s. Abschnitt 4.3.1)

$$\lambda^n - sp(\boldsymbol{A})\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det \boldsymbol{A} = 0 .$$

Das ist eine algebraische Gleichung n-ten Grades. Nach einer Folgerung aus dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt sie genau n reelle oder komplexe Lösungen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Diese sind die gesuchten Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A}$.

Beispiel 4.52

Zu bestimmen sind die Eigenwerte der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{5}{9} & -1 \\ 18 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Aus der Bedingung (4.42) erhält man die charakteristische Gleichung

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & \frac{5}{9} & -1 \\ 18 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 7\lambda - 10 = 0$$

Die Lösungen dieser Gleichung lauten $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 5$.

Beispiel 4.53

Gesucht sind die Eigenwerte zu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 17 & 6 \end{pmatrix}$.

Lösung:

Die charakteristische Gleichung lautet

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & -1 \\ 17 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 14\lambda + 65 = 0$$

Daraus erhält man $\lambda_1 = 7 + 4\mathrm{j}$, $\lambda_2 = 7 - 4\mathrm{j}$.

Besonders einfach lassen sich die Eigenwerte berechnen, wenn die Matrix $\boldsymbol{A}$ eine Dreiecksmatrix oder eine Diagonalmatrix ist. Dann gilt der

Satz

> Ist $\boldsymbol{A}$ eine Dreiecks- oder eine Diagonalmatrix, so sind die Hauptdiagonalenelemente die Eigenwerte der Matrix.

Der *Beweis* dieses Satzes stützt sich darauf, daß die Determinante einer Dreiecksmatrix gleich dem Produkt der Hauptdiagonalenelemente ist, d.h.

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \ldots (a_{nn} - \lambda) = 0\,,$$

woraus $\lambda_i = a_{ii}$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ folgt.

Berechnung von Eigenvektoren

Zu jedem Eigenwert λ_i gehört ein Eigenvektor $\boldsymbol{x}_i$, der aus dem homogenen linearen Gleichungssystem

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{E})\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{o}$$

berechnet werden kann. Wegen $\det(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{E}) = 0$ ist $r(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{E}) < n$, d.h. mindestens eine der Gleichungen des homogenen Systems ist linear abhängig von den übrigen und mindestens eine der Unbekannten $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}$ ist frei wählbar. Im Abschnitt 4.5.3 wurde gezeigt, daß die Anzahl der frei wählbaren Unbekannten und damit auch die Anzahl der linear unabhängigen Lösungsvektoren des homogenen Gleichungssystems durch den sogenannten *Rangabfall* $n - r$ festgelegt ist.

Es gilt der

Satz

> Die Anzahl der zu einem Eigenwert λ_i gehörigen linear unabhängigen Eigenvektoren ist $n - r(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{E})$.

Beispiel 4.54

Laut Beispiel 4.52 besitzt die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{5}{9} & -1 \\ 18 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 5$. Zu berechnen sind die zugehörigen Eigenvektoren.

Lösung:

Bezeichnet man den zu $\lambda_1 = 1$ gehörenden Eigenvektor mit $\boldsymbol{x}_1$ und seine Komponenten mit x_{11}, x_{12}, x_{13}, so erhält man aus (4.41) das homogene lineare Gleichungssystem

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{E})\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{9} & -1 \\ 18 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} = \boldsymbol{o}$$

bzw.
$$\begin{aligned} 2x_{11} + \frac{5}{9}x_{12} - x_{13} &= 0 \\ 18x_{11} + x_{12} &= 0 \\ 2x_{11} + x_{12} - 2x_{13} &= 0 \end{aligned}$$

Das Austauschverfahren oder der Gaußsche Algorithmus brechen nach 2 Schritten ab, d.h., es ist $r(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{E}) = 2$ und damit ist die Zahl der frei wählbaren Variablen $n - r = 3 - 2 = 1$.

Man erhält

$$\begin{aligned} x_{12} &= -18x_{11} \\ x_{13} &= -8x_{11} \end{aligned}$$

Setzt man $x_{11} = c_1$, so lautet der gesuchte Eigenvektor

$$\boldsymbol{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -18 \\ -8 \end{pmatrix},$$

der nur bis auf einen Faktor c_1 bestimmbar ist.

Entsprechende Rechnungen liefern für $\lambda_2 = -2$ den Eigenvektor

$$\boldsymbol{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{9}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

und für $\lambda_3 = 5$ den Eigenvektor

$$x_3 = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Wegen $n - r = 1$ existiert zu jedem Eigenwert λ_i nur ein Eigenvektor x_i, der bis auf einen Faktor c_i festgelegt ist.

4.7.2 Verflechtungsbilanzen in der Betriebswirtschaft

Eine wichtige betriebswirtschaftliche Aufgabe ist die Erfassung und Bilanzierung von Aufwänden und Leistungen. Mit Hilfe von Matrizen und Vektoren lassen sich die Zusammenhänge leicht durchschaubar darstellen. Das ist insbesondere dann vorteilhaft, wenn die Material- und Leistungsströme zwischen den Strukturteilen eines Unternehmens stark verflochten sind. Derartige Darstellungen werden als *Verflechtungsbilanzen* bezeichnet. Sie wurden von PICHLER[1] in die Form eines mathematischen Modells gebracht.

Das Problem soll zunächst am Beispiel eines Unternehmens erläutert werden, das in 4 Abteilungen A_1 bis A_4 insgesamt 6 Produkte in den Mengen f_1, f_2, ...f_6 herstellt. Dabei entstehen Aufwände $a_1, a_2, \ldots, a_5$. Die Verflechtung wird aus dem sogenannten *Flußbild* (Bild 4.6) deutlich.

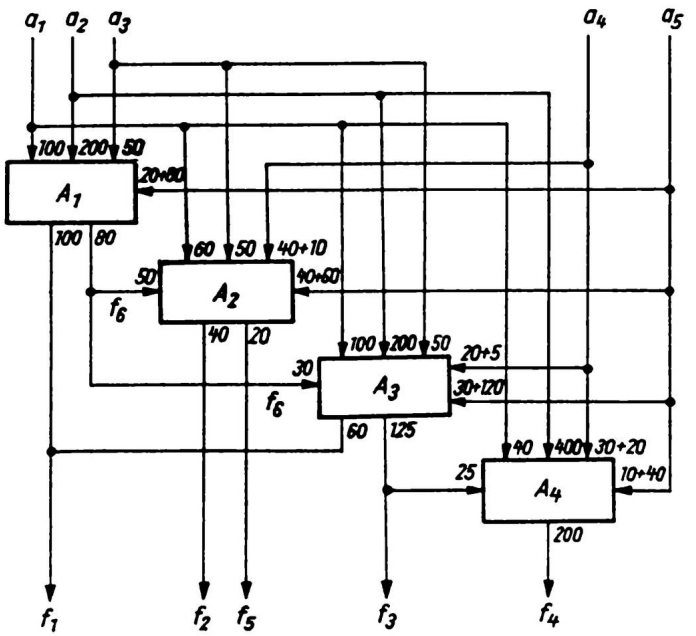


Bild 4.6

[1] OTTO PICHLER (1898 – 1965), Mathematiker in Leuna

Im vorliegenden Beispiel sind die Aufwände a_1, a_2, a_3 stoffliche Eingangsleistungen (wie sie etwa in der chemischen Industrie auftreten), a_4 und a_5 die Eingangsleistungen mit je einem produktionsproportionalen und je einem zeitproportionalen Anteil (z.B. Kühlflüssigkeit, die auch bei ruhender Produktion benötigt wird und Lohnkosten, die produktionsproportional und produktionsunabhängig anfallen). Die Ausgangsleistungen $f_1, f_2, \ldots, f_6$ sind als Fertigprodukt- oder Zwischenproduktmengen zu verstehen. Im Beispiel sind f_1, f_2, f_4 und f_5 reine Fertigprodukte, f_3 ist sowohl Fertig- als auch Zwischenprodukt und f_6 ist nur Zwischenprodukt.
Es ist üblich, den Stoffeinsatz und die Produktmengen in einer sogenannten *Bilanztabelle* darzustellen. Diese enthält neben den Produkt- und Aufwandsbezeichnungen die zugehörigen Mengeneinheiten (ME), die Erzeugung (mit positivem Vorzeichen) und den Verbrauch (mit negativem Vorzeichen) von Produkten, die Aufwände (mit positivem Vorzeichen) je Betriebsabteilung sowie eine Summenspalte zur Darstellung der Bilanz. Für das besprochene Beispiel lautet die Bilanztabelle:

	ME	A_1	A_2	A_3	A_4	$\sum$
f_1	t	<u>100</u>	0	60	0	160
f_2	Stck.	0	<u>40</u>	0	0	40
f_3	t	0	0	<u>125</u>	−25	100
f_4	t	0	0	0	<u>200</u>	200
f_5	t	0	20	0	0	20
f_6	t	80	−50	−30	0	0
a_1	t	100	60	100	40	300
a_2	t	200	0	200	400	800
a_3	hl	50	50	50	0	150
a_{4p}	hl	0	40	20	30	90
a_{4t}	hl	0	10	5	20	35
a_{5p}	TDM	20	40	30	10	100
a_{5t}	TDM	80	60	120	40	300

Dabei wird für jede Betriebsabteilung ein fest vorgegebener Zeitabschnitt vorausgesetzt, z.B. einheitlich eine Schicht, d.h. im Beispiel $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 8$ Stunden. Für die weitere Rechnung ist es zweckmäßig, die Angaben der Bilanztabelle zu normieren. Dazu muß für jede Abteilung genau ein dominierendes Produkt festgelegt werden. In der Bilanztabelle des Beispiels sind diese Festlegungen unterstrichen. Die so herausgehobenen Eingangsleistungen werden als *Durchsätze* d_i bezeichnet. Im Beispiel sind

$$d_1 = 100\,\text{t},\ d_2 = 40\,\text{Stück},\ d_3 = 125\,\text{t},\ d_4 = 200\,\text{t}.$$

Die Angaben beziehen sich auf den festgelegten Zeitabschnitt, also z.B. auf eine Schicht. Nach der Normierung, d.h. nach Division der produktionsabhängigen Anteile durch die Durchsätze d_i und der zeitabhängigen Anteile durch die Betriebszeiten t_i erhält man die sogenannte *Teilnormentabelle*:

	d_1	d_2	d_3	d_4	t_1	t_2	t_3	t_4
f_1	1	0	0,48	0	0	0	0	0
f_2	0	1	0	0	0	0	0	0
f_3	0	0	1	−0,125	0	0	0	0
f_4	0	0	0	1	0	0	0	0
f_5	0	0,5	0	0	0	0	0	0
f_6	0,8	−1,25	−0,24	0	0	0	0	0
a_1	1	1,5	0,8	0,2	0	0	0	0
a_2	2	0	1,6	2	0	0	0	0
a_3	0,5	1,25	0,4	0	0	0	0	0
a_4	0	1	0,16	0,15	0	1,25	0,625	2,5
a_5	0,2	1	0,24	0,05	10	7,5	15	5

Bezeichnet man

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{H}} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \boldsymbol{f}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} f_5 \\ f_6 \end{pmatrix} \text{ als Vektor der Haupt- bzw. der Nebenprodukte,}$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} \quad \text{als Aufwandsvektor,}$$

$\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}} = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ als Durchsatzvektor und

$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}} = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ als Basiszeitenvektor,

so erhält die Teilnormentabelle die folgende Struktur:

	$\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}$	$\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}$
$\boldsymbol{f}_{\mathrm{H}}$	$\boldsymbol{K}_{11}$	$\boldsymbol{K}_{12}$
$\boldsymbol{f}_N$	$\boldsymbol{K}_{21}$	$\boldsymbol{K}_{22}$
$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{K}_{31}$	$\boldsymbol{K}_{32}$

Die Matrizen $\boldsymbol{K}_{ik}$ werden als *Kopplungsmatrizen* bezeichnet. Beachtet man, daß $\boldsymbol{K}_{12}$ und $\boldsymbol{K}_{22}$ Nullmatrizen sind und vereinbart

$\boldsymbol{K}_{11} = \boldsymbol{K}_{\mathrm{H}}$ (Kopplungshauptmatrix),
$\boldsymbol{K}_{21} = \boldsymbol{K}_{\mathrm{N}}$ (Kopplungsnebenmatrix),
$\boldsymbol{K}_{31} = \boldsymbol{K}_d$ und $\boldsymbol{K}_{32} = \boldsymbol{K}_t$, so lautet die Teilnormentabelle

	d^T	t^T
f_H	K_H	0
f_N	K_N	0
a	K_d	K_t

bzw. als lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} f_H &= K_H d \\ f_N &= K_N d \\ a &= K_d d + K_t t \end{aligned} \tag{4.43}$$

Mit der weiteren Zusammenfassung zum *Leistungsvektor* $l = \begin{pmatrix} f_H \\ f_N \\ a \end{pmatrix}$,

zum *Einsatzvektor* $e = \begin{pmatrix} d \\ t \end{pmatrix}$ und zur

Gesamtkopplungsmatrix (*Leistungsmatrix*) $K = \begin{pmatrix} K_H & 0 \\ K_N & 0 \\ K_d & K_t \end{pmatrix}$

erhält man schließlich ein *Verflechtungsmodell*, das sich durch eine einzige Matrizengleichung darstellen läßt:

$$l = K \cdot e$$

Das System (4.43) liefert bei vorgegebenen Durchsätzen und Basiszeiten die entstehenden Aufwände und die resultierenden Produktmengen. Von praktischer Bedeutung ist ebenso die Umkehrung, nämlich die Frage nach Durchsätzen und Aufwänden bei vorgegebenen Produktmengen und Basiszeiten. Aus (4.43) erhält man

$$\begin{aligned} d &= K_H^{-1} f_H \\ f_N &= K_N K_H^{-1} f_H \\ a &= K_d K_H^{-1} f_H + K_t t \end{aligned} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} d \\ f_N \\ a \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} f_H \\ t \end{pmatrix} \tag{4.44}$$

Die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} K_H^{-1} & 0 \\ K_N K_H^{-1} & 0 \\ K_d K_H^{-1} & K_t \end{pmatrix}$$

wird *Strukturmatrix* genannt. Damit die Darstellung (4.44) möglich ist, muß K_H^{-1} existieren, d.h. die Kopplungshauptmatrix K_H muß regulär, insbesondere quadratisch sein. Das erreicht man, indem jeder Betriebsabteilung genau ein Hauptprodukt zugeordnet wird.

Für das diskutierte Beispiel erhält man durch Inversion der Kopplungshauptmatrix

$$\boldsymbol{K}_H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0,48 & -0,06 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,125 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Besteht der Wunsch, die Erzeugung der Hauptprodukte innerhalb einer Schicht auf

$$f_1 = 200\,\text{t},\ f_2 = 80\,\text{Stück},\ f_3 = 150\,\text{t},\ f_4 = 250\,\text{t}$$

zu erhöhen, so verändern sich die Durchsätze auf

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{K}_H^{-1} \cdot \boldsymbol{f}_H = \begin{pmatrix} 113 \\ 80 \\ 175 \\ 250 \end{pmatrix},$$

was für die Nebenprodukte und Aufwände

$$\boldsymbol{f}_N = \boldsymbol{K}_N \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 40 \\ -51,6 \end{pmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{K}_d \boldsymbol{d} + \boldsymbol{K}_t \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} 423 \\ 1006 \\ 226,5 \\ 145,5 \\ 157,1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 35 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 423 \\ 1006 \\ 226,5 \\ 180,5 \\ 457,1 \end{pmatrix}$$

zur Folge hat. Die mit $f_6 = -51,6\,\text{t}$ erforderliche Menge des Zwischenprodukts muß offensichtlich zur Realisierung dieses Produktionsprogramms zugekauft werden. Die Aufwandsposition a_5 erhöht sich von bisher 400 TDM auf 457,1 TDM.

Aufgabe 4.13

4.8 Aufgaben

4.1 Die folgenden Aufgaben können sowohl mit dem Austauschverfahren als auch mit dem Gaußschen Algorithmus gelöst werden. Falls die Verfahren vorzeitig abbrechen, ergeben sich parameterabhängige Lösungen.

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 11 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= -5 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} -10x + y + 6z &= 2 \\ 8x - y - 16z &= 10 \\ 9x - y - 11z &= 4 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 17x_4 &= -20 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 8x_4 &= -8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 7x_4 &= -4 \\ 2x_3 - x_4 &= 4 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 17 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 13 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 20x_1 + 5x_2 &= 15 \\ 18x_1 + 7x_2 &= 1 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} 5{,}01x_1 + 3{,}23x_2 + 7{,}45x_3 &= 1{,}67 \\ 4{,}89x_1 + 8{,}98x_2 - 2{,}76x_3 &= -3{,}54 \\ 11{,}32x_1 + 13{,}10x_2 - 3{,}01x_3 &= -7{,}23 \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} 5x_1 - x_3 + 7x_6 &= 0 \\ x_1 + x_5 &= -1 \\ -x_2 + x_4 - x_5 &= 0 \\ -x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_4 + x_6 &= 1 \\ -10x_1 - 5x_2 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - x_3 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - x_3 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 9 \\ 4x_1 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

4.2 Man stelle fest, ob die gegebenen Vektoren linear abhängig sind, und bestimme gegebenenfalls die Art der linearen Abhängigkeit.

a) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

4.3 Gegeben sind die Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Welche der Summen bzw. Produkte
$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{A}^T\cdot\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Y}^T\cdot\boldsymbol{B}$ sind sinnvoll?
Man berechne sie gegebenenfalls!

b) Man berechne $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{B}^2$, $\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^T$, $\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T$, $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$

c) Man berechne $\boldsymbol{B}^{-1}$, $(\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{Y})^{-1}$ unter Verwendung des Austauschverfahrens.

4.4 a) Man zeige, daß $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ eine orthogonale Matrix ist.

b) Ist $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ orthogonal?

Man berechne $\boldsymbol{A}^2$ und ziehe daraus Schlüsse für höhere Potenzen von $\boldsymbol{A}$ und für $\boldsymbol{A}^{-1}$.

4.5 Man berechne die inverse Matrix zu

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{j} & 0 \\ 0 & \mathrm{j} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} -8 & 15 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

4.6 Man berechne $\boldsymbol{A}^{-1}$ aus $\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

4.7 Die folgenden Gleichungen sind nach $\boldsymbol{X}$ aufzulösen

a) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}^2 - 8\boldsymbol{X}$

b) $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{X} + 2\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^2$

c) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{C})^T + \boldsymbol{E} = 2\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$

d) $\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1})^{-1}$

4.8 Man berechne die folgenden Determinanten:

a) $\begin{vmatrix} 9,41 & 2,79 \\ 0,96 & 1,73 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2j & \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ -1 & \sin\frac{\pi}{6} & 0 \\ 1 & 0 & \cos\frac{\pi}{6} \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 2j & -j & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1+j & -4+j & 0 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 & 1 \\ -4 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & 8 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -6 & 5 \end{vmatrix}$

4.9 Für welche Werte $\lambda, t \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Determinanten null?

a) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} t+1 & 2 & -t \\ -2 & t-2 & 0 \\ t & 0 & t \end{vmatrix}$

4.10 Man zerlege $\begin{vmatrix} 2 & 1+j \\ -1 & 3-2j \end{vmatrix}$ in zwei Determinanten, von denen eine nur reelle Elemente enthält.

4.11 Zu bestimmen sind die allgemeinen Lösungen von

a)
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 25 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 &= -16 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 &= -19 \\ 8x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 18 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 362 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 &= 296 \\ -x_1 - 10x_2 + 5x_3 &= 210 \end{aligned}$$

4.12 Man löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 17,123x_1 + 5,038x_2 &= 42,313 \\ 2,461x_1 + 0,724x_2 &= 6,081 \end{aligned}$$

a) mit 3 Dezimalen
b) nach Rundung der Koeffizienten auf 2 Dezimalen
c) nach Rundung der Koeffizienten auf eine Dezimale

4.13 Man bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -7 & 0 & 5 \\ -5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

5 Differentialrechnung für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

5.1 Folgen, Reihen, Grenzwerte

5.1.1 Grenzwerte von Folgen

Zu den wichtigsten Grundbegriffen der Mathematik zählt der Grenzwert. Er ermöglicht nicht nur Erweiterungen des Zahlbereiches, sondern ist auch Basis für Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit von Funktionen. Eigenschaften von Zahlenfolgen können auf diese Bereiche übertragen werden. Kurvendiskussionen dienen als praktische Anwendungen.

5.1.1.1 Begriff der Zahlenfolge

Bei der Charakterisierung einer Menge von Zahlen spielt die Anordnung der Zahlen keine Rolle. In vielen Anwendungen jedoch ist eine solche zusätzliche Eigenschaft von großer Bedeutung. So kennzeichnet man z.B. natürliche Zahlen in der Regel angeordnet in der Form

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots \qquad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Dabei wird jeder Zahl ein bestimmter Platz zugeordnet. Es gibt ein erstes Element sowie zu jeder Zahl einen Nachfolger und mit Ausnahme der Zahl 1 genau einen Vorgänger.

Ordnet man jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl x_n zu, so nennt man die **geordnete Menge der reellen Zahlen**

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \qquad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

eine **unendliche reelle Zahlenfolge**. Im folgenden wird bei Folgen in der Regel $n \geq 1$ gewählt. Gelegentlich beginnt eine Folge auch mit einem höheren Index.

Beispiel 5.1

Die Folge der **geraden Zahlen**: $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots \qquad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}^*$

Beispiel 5.2

Die Folge der **Primzahlen**: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, \ldots$

Definition

Unter einer **reellen Zahlenfolge** versteht man eine Funktion, die natürlichen Zahlen aus $\mathbb{N}$ oder aus einer Teilmenge aus $\mathbb{N}$ reelle Zahlen aus $\mathbb{R}$ zuordnet.
Definiert eine Funktion f diese Zuordnung
und setzt man $x_n = f(n)$ mit $x_n \in \mathbb{R}$, so erhält man

eine **unendliche reelle Zahlenfolge** z.B. für $n \in \mathbb{N}^*$ oder

eine **endliche reelle Zahlenfolge** für $n \in \{1, 2, 3, \ldots, m\} \subset \mathbb{N}$.

$x_1, x_2, x_3, \ldots$ heißen **Glieder der Folge.**
Abkürzend kennzeichnet man eine Folge durch

$$\{x_n\} : x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

x_n heißt das n-te oder **allgemeine Glied der Folge**.

In vielen Fällen kann das Bildungsgesetz einer Folge durch eine Funktionsgleichung $x_n = f(n)$ unabhängig von den anderen Gliedern der Folge angegeben werden. Man spricht dann von einer **unabhängigen Darstellung der Folge**.

Beispiel 5.3

$\{x_n\} = \{2n - 1\}$ 1, 3, 5, 7, 9, ...

Beispiel 5.4

$\{x_n\} = \{1 + (-1)^n\}$ 0, 2, 0, 2, 0, ...

Beispiel 5.5

$\{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+2}\right\}$ $\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \ldots$

Andererseits kann bei Vorgabe der ersten Glieder einer Folge in vielen Fällen das allgemeine Glied x_n angegeben werden.

Beispiel 5.6

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ führt zur Folge $\{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$

Beispiel 5.7

$\frac{1}{5}, \frac{2}{5^3}, \frac{3}{5^5}, \ldots$ führt zur Folge $\{x_n\} = \left\{\frac{n}{5^{2n-1}}\right\}$

Beispiel 5.8

$\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{9}, \ldots$ führt zur Folge $\{x_n\} = \left\{(-1)^{n-1}\frac{1}{2n+1}\right\}$

Im Falle der Folge der Primzahlen ist eine formelmäßige Darstellung des allgemeinen Gliedes nicht möglich.

In den obigen Fällen können die Glieder der Folge mit Hilfe des allgemeinen Gliedes x_n angegeben werden, ohne auf die Werte der anderen Glieder zurückgreifen zu müssen. Dies ist jedoch nicht in allen Fällen möglich. Manche Folgen sind vielmehr dadurch festgelegt, daß zwischen verschiedenen Gliedern der Folge Beziehungen bestehen, die die Berechnung eines Gliedes aus den Werten vorhergehender Glieder ermöglichen. Zur vollständigen Beschreibung ist zusätzlich der Wert eines Gliedes anzugeben. Diese Methode nennt man **rekursive Darstellung einer Folge**, zu der in vielen Fällen auch eine unabhängige Darstellung der Folge hergeleitet werden kann.

Beispiel 5.9

Die Glieder der Folge $\{x_n\}$ mit $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$ und $x_1 = 2$ lauten:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{1}{1+x_1} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}, \; x_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}, \quad x_4 = \frac{1}{1+\frac{3}{4}} = \frac{4}{7}, \ldots$$

Bei einer **arithmetischen Folge** $\{x_n\}$ ist die Differenz $d = x_{n+1} - x_n$ von zwei aufeinander folgenden Gliedern konstant. Wegen

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + d} \tag{5.1}$$

erhält man

$x_1, \; x_2 = x_1 + d, \; x_3 = x_2 + d, \; \ldots$

Beispiel 5.10

Für $d = 3$ und $x_1 = 1$ erhält man die arithmetische Folge $\{x_n\}$: 1, 4, 7, 10, 13, ...

Bei der Folge $\{x_n\}$ mit

$$\boxed{x_{n+2} = x_n + x_{n+1}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^* \text{ und } \quad x_1 = x_2 = 1 \tag{5.2}$$

sind vom dritten Glied an die Glieder jeweils gleich der Summe der beiden vorhergehenden:

$x_1 = 1, \; x_2 = 1, \; x_3 = x_1 + x_2, \; x_4 = x_2 + x_3, \; \ldots$ also

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Man spricht hier von der **Fibonacci–Folge**[1]; sie spielt eine interessante Rolle in der Geometrie.

[1] LEONARDO VON PISA, gen. FIBONACCI (etwa 1180 – 1250)

Eine **geometrische Zahlenfolge** $\{x_n\}$ ist rekursiv durch

$$\boxed{x_{n+1} = q\,x_n} \quad \text{mit } q \neq 0 \text{ und } x_1 \neq 0 \tag{5.3}$$

charakterisiert, d.h. jedes Glied ist konstantes Vielfaches des vorhergehenden:

$$\{x_n\}: \quad x_1\,,\ x_2 = q \cdot x_1\,,\ x_3 = q \cdot x_2 = q^2 \cdot x_1\,,\ \ldots$$

Beispiel 5.11

Für $q = \frac{1}{2}$ und $x_1 = 8$ ergibt sich die geometrische Folge

$$\{x_n\}: \quad 8,\ 4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots$$

Die oben angegebenen Folgen zeigen ein sehr unterschiedliches Verhalten. Die Glieder x_n werden z.B. mit wachsendem Index größer, kleiner oder wechseln das Vorzeichen. Diese Eigenschaften führen zu folgender

Definition

Eine Zahlenfolge $\{x_n\}$ heißt

	falls für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt:
monoton steigend	$x_n \leq x_{n+1}$
streng monoton steigend	$x_n < x_{n+1}$
monoton fallend	$x_n \geq x_{n+1}$
streng monoton fallend	$x_n > x_{n+1}$
konstant	$x_n = x_{n+1}$
alternierend	$x_n \cdot x_{n+1} < 0$

Beispiel 5.12

Die Folge

$$\{x_n\} = \left\{\frac{n+1}{n}\right\}: \quad 2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5},\ \frac{7}{6},\ \ldots \quad \text{ist echt monoton fallend:}$$

Für den rechnerischen Nachweis ist zu zeigen: $x_{n+1} < x_n$ oder $x_{n+1} - x_n < 0$.

Aus

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1+1}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{n^2 + 2n - (n^2 + 2n + 1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

folgt die Behauptung.

Geometrische Veranschaulichung an der Zahlengerade und in der Ebene:

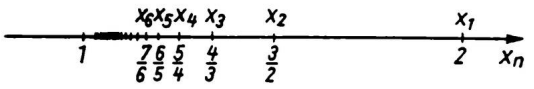


Bild 5.1

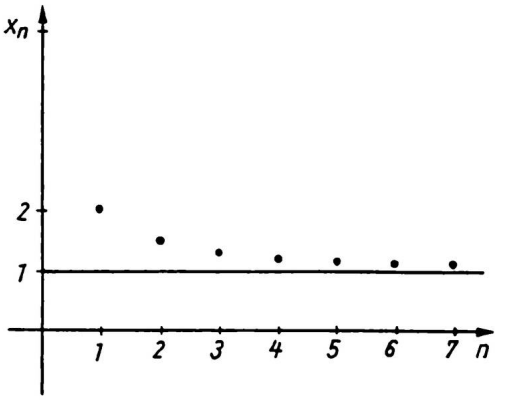


Bild 5.2

Beispiel 5.13

Die Folge

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{5}(-1)^{n+1} \cdot n\right\}: \quad \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 1, \ldots, \frac{1}{5}(-1)^{n+1}n, \ldots$$

ist wegen

$$x_{n+1} \cdot x_n = \frac{1}{25}(-1)^{n+2} \cdot (n+1) \cdot (-1)^{n+1} \cdot n = \frac{1}{25}(-1)^{2n+3} \cdot (n+1)n = -\frac{1}{25}(n+1)n < 0$$

alternierend.

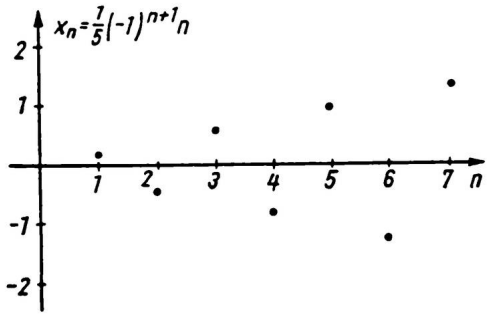


Bild 5.3

In ihrem Monotonieverhalten können sich Folgen wesentlich unterscheiden:

Die Folge

$$\{x_n\} = \{n^2\}: \qquad 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots, n^2, \ldots$$

ist offensichtlich monoton steigend. Gibt man sich irgendeine positive Zahl vor, so sind für hinreichend große Werte von n immer noch Glieder der Folge größer als diese Zahl. Sie wächst über jede noch so große Zahl hinaus.

Die Folge $\{x_n\} = \left\{\frac{n^2-1}{n^2}\right\} = \left\{1 - \frac{1}{n^2}\right\}: 0, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{15}{16}, \ldots$ ist wegen $(n \in \mathbb{N})$

$$x_{x+1} - x_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} - (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} > 0$$

ebenfalls monoton steigend. Wegen $1 - \frac{1}{n^2} < 1$ wächst sie jedoch nicht über 1 hinaus.

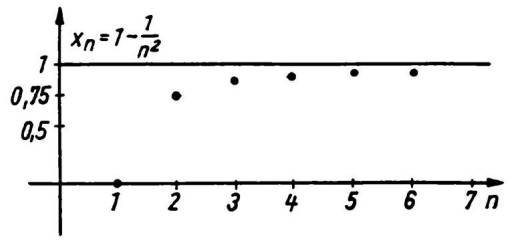


Bild 5.4

Definition

Eine Zahlenfolge $\{x_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ heißt **nach oben** bzw. **unten beschränkt**, wenn es eine Zahl $s_o \in \mathbb{R}$ bzw. $s_u \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt:

$$x_n \leq s_o \quad \text{bzw.} \quad x_n \geq s_u$$

Die Zahl s_o bzw. s_u heißt **obere** bzw. **untere Schranke der Zahlenfolge**. Ist eine Folge nach oben und unten beschränkt, so heißt sie **beschränkt**.

Beispiel 5.14

Die Folge

$$\{x_n\} = \{1 - 2^{-n}\}: \quad \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \dots$$

ist monoton steigend und beschränkt.

Nachweis der Monotonie

Wegen

$$x_{n+1} - x_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} - (1 - \frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2-1}{2^{n+1}} > 0$$

folgt $x_{n+1} > x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$, d.h. die Folge ist monoton steigend.

Beschränktheit

Wegen der Monotonie ist $x_1 = \frac{1}{2}$ das kleinste Glied, so daß gilt:

$$x_n = 1 - 2^{-n} \geq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^*$$

Nach oben kann die Folge abgeschätzt werden durch $x_n = 1 - 2^{-n} < 1$.
Damit erhält man

$$\frac{1}{2} \leq x_n < 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^*$$

Die untere Schranke $s_u = \frac{1}{2}$ ist ein Glied der Folge und somit größte untere Schranke. s_o ist kein Glied der Folge, jedoch eine obere Schranke.

5.1.1.2 Spezielle Zahlenfolgen

Zum Nachweis von Formeln, die von natürlichen Zahlen abhängen, verwendet man ein besonderes Verfahren, das auf dem Prinzip des schrittweisen Beweises einer Behauptung beruht und als vollständige Induktion bezeichnet wird. (vgl. 1.1.1.3). Diese Methode wird in den folgenden Ausführungen insbesondere bei Folgen, Reihen und Ungleichungen mehrfach angewandt. Erörtert werden arithmetische und geometrische Folgen und Reihen sowie die Bernoullische Ungleichung, die für verschiedene Abschätzungen zugrunde gelegt wird.

Beweisschema der vollständigen Induktion in Kurzform

Zu beweisen ist eine Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}^*$, die mit $A(n)$ bezeichnet werde. Der Beweis mit Hilfe der vollständigen Induktion ist dann durch folgende Schritte charakterisiert:

Induktionsanfang:	$A(1)$ ist richtig für $n = 1$
Induktionsannahme:	$A(n)$ ist richtig für *irgendeinen* Wert $n \in \mathbb{N}^*$
Induktionsschluß:	Aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$, d.h., die Aussage gilt auch für $n+1$.

Damit gilt die Aussage für *alle* $n \in \mathbb{N}^*$.

Bemerkung: Der Induktionsanfang kann auch $A(n_0)$ sein für eine natürliche Zahl n_0. Dann ist $n \geq n_0$.

Dieses Prinzip wird zur Herleitung verschiedener Formeln für Folgen und Reihen angewandt.

Summenformeln

Für $x \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$\text{a) } 1 + 2 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{5.4}$$

$$\text{b) } 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \tag{5.5}$$

Beweis zu b):

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Formel wegen

$1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$ offensichtlich richtig.

Induktionsannahme für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

Induktionsschluß von n auf $n+1$: Addition von $(n+1)^2$ führt zu

$$1^2+2^2+\ldots+(n+1)^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6)$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)=\frac{1}{6}(n+1)\,((n+1)+1)\,(2\,(n+1)+1)$$

Diese Formel folgt aus der obigen, indem man n durch $n+1$ ersetzt. Da sie auch für $n=1$ gilt, ist sie für alle $n\in\mathbb{N}^*$ richtig.

Satz

Aus der **rekursiven Darstellung einer arithmetischen Folge** $\{x_n\}$ mit

$$x_{n+1}=x_n+d \qquad (d\in\mathbb{R},\ x_1\neq 0) \tag{5.6}$$

folgt die **unabhängige Darstellung**

$$x_n=x_1+(n-1)\,d \tag{5.7}$$

Beweis:

Induktionsanfang: Die Aussage gilt für $n=1$: $x_1=x_1$

Induktionsannahme: $x_n=x_1+(n-1)\,d$ gilt für einen beliebigen Wert n.

Induktionsschluß: $x_{n+1}=x_n+d=(x_1+(n-1)\,d)+d=x_1+n\,d$

Diese Formel entsteht aus der obigen, indem man n durch $n+1$ ersetzt. Damit gilt die Aussage für alle $n\in\mathbb{N}^*$.

Ordnet man den n ersten Gliedern einer arithmetischen Folge $(k\in\mathbb{N}^*)$

$$\{x_k\}=\{x_1+(k-1)\,d\}$$

die Summe

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}x_k=\sum_{k=1}^{n}(x_1+(k-1)\,d)$$

zu, so spricht man von einer **arithmetischen Reihe mit n Gliedern**.

Satz

Für eine n-gliedrige arithmetische Reihe gilt die Summenformel

$$s_n=\frac{1}{2}n\,(2x_1+(n-1)\,d) \tag{5.8}$$

Beweis:

Induktionsanfang:

Für $n=1$ ist die Aussage wegen $s_1=x_1$ offensichtlich richtig.

Induktionsannahme:

$$s_n = \frac{1}{2}n(2x_1 + (n-1)\,d) \quad \text{für ein} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Induktionsschluß:

Addition von $x_{n+1} = x_1 + n\,d$ ergibt mit $s_{n+1} = s_n + x_{n+1}$:

$$s_{n+1} = \frac{1}{2}n(2x_1+(n-1)\,d)+x_1+n\,d = \frac{1}{2}(n(2x_1+(n-1)\,d)+2x_1+2nd)$$

$$= \frac{1}{2}((n+1)2x_1 + n(n+1)\,d) = \frac{1}{2}(n+1)(2x_1 + nd)$$

Damit gilt die Formel auch für $n+1$ und folglich für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

Beispiel 5.15

Summe der geraden Zahlen von 1 bis 100: Wegen $x_1 = 2$ und $d = 2$ folgt

$$s_{50} = \frac{50}{2}(2 \cdot 2 + 49 \cdot 2) = 50 \cdot 51 = 2550$$

Satz

Aus der **rekursiven Darstellung der geometrischen Folge** $\{x_n\}$ mit

$$x_{n+1} = q\,x_n \qquad (q \neq 0\,,\ x_1 \neq 0) \tag{5.9}$$

folgt die **unabhängige Darstellung**

$$x_n = x_1 q^{n-1} \tag{5.10}$$

Beweis:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt: $x_1 = x_1$,also ist die Formel hierfür richtig.

Induktionsannahme: $x_n = x_1 q^{n-1}$

Induktionsschluß: $x_{n+1} = qx_n = qx_1 q^{n-1} = x_1 q^n$

Die Formel gilt also, wenn man n durch $n+1$ ersetzt. Damit ist sie für alle $n \in \mathbb{N}^*$ richtig.

Als **geometrische Reihe mit n Gliedern** bezeichnet man die Summe s_n der ersten n Glieder einer geometrischen Folge $\{x_k\} = \{x_1\,q^{k-1}\}$ mit

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_1 q^{k-1} = x_1(1 + q^1 + q^2 + \ldots + q^{n-1})$$

Satz

Für eine geometrische Reihe mit n Gliedern gilt die Summenformel

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_1 q^{k-1} = x_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \qquad \text{für } q \neq 1 \tag{5.11}$$

Beweis:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ trifft die Aussage wegen

$$x_1 = x_1 \cdot \frac{1-q}{1-q} = x_1 \text{ zu.}$$

Induktionsannahme:

$$s_n = x_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Induktionsschluß: Durch Addition von $x_1 q^n$ erhält man

$$s_{n+1} = x_1(1 + q + \ldots + q^n) = x_1 \frac{1-q^n}{1-q} + x_1 q^n$$

$$= x_1 \frac{1-q^n+q^n(1-q)}{1-q} = x_1 \frac{1-q^n q}{1-q} = x_1 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Die Formel gilt auch für $n+1$ und damit für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

Beispiel 5.16

Gegeben sei die geometrische Folge $\{x_n\}$: 9, 6, 4, ...
Bestimmen Sie das Glied x_6 und berechnen Sie die Summe der ersten 10 Glieder.

Lösung:

$$x_1 = 9\,,\ q = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{wegen} \quad 4 = q \cdot 6$$

$$x_6 = x_1 q^5 = 9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{27}$$

$$s_{10} = x_1 \frac{1-q^{10}}{1-q} = 9 \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}}{1-\frac{2}{3}} = 26{,}53$$

Beispiel 5.17

Als ein typisches Beispiel für geometrische Folgen dient die **Zinseszinsrechnung**.

Welchen Wert hat ein Guthaben g_0 bei einer jährlichen Verzinsung von $p\%$ nach n Jahren?

Lösung:

Nach einem Jahr hat man mit dem Zinsertrag $\frac{p}{100} g_0$ das Guthaben

$$g_1 = g_0 + \frac{p}{100} \cdot g_0 = g_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Die Verzinsung von g_1 bringt nach dem zweiten Jahr das Guthaben

$$g_2 = g_1 + \frac{p}{100} g_1 = g_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = g_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

Nach n Jahren erhält man entsprechend

$$g_n = g_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Führt man den Zinsfaktor $q = 1 + \frac{p}{100}$ ein, so definiert

$g_n = g_0 q^n$

eine geometrische Folge.

Beispiel 5.18

Jemand behauptet, sein Guthaben g_0 durch Anlegen zu einem festen jährlichen Zinssatz nach 9 Jahren verdoppelt zu haben. Wie hoch ist dieser Zinssatz?

Lösung:

Aus $g_n = g_0 q^n$ mit $q = 1 + \frac{p}{100}$
folgt wegen

$2g_0 = g_0 q^9$ bzw. $2 = q^9$

der Zinsfaktor $q = \sqrt[9]{2} = 1,0800597 = 1 + 0,0800597$.
Das Guthaben wurde zu 8% verzinst.

Bernoullische Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \text{für} \quad x \in (-1, \infty) \text{ und } n \in \mathbb{N}^* \tag{5.12}$$

Beweis:

Induktionsanfang:
Wegen $(1+x)^1 = 1 + x$ ist die Ungleichung für $n = 1$ richtig.

Induktionsannahme:
$(1+x)^n \geq 1 + nx$

Induktionsschluß:
Multiplikation mit $1 + x$ ergibt wegen $(1 + x) > 0$:
$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2$
Da $nx^2 \geq 0$ ist, erhält man durch Streichung dieses Terms
$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$

Die für n gültige Ungleichung gilt auch für $n + 1$ und damit für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

Aufgaben 5.1 bis 5.8

5.1.1.3 Grenzwert einer Folge

Bei der Untersuchung der Eigenschaften einer Folge $\{x_n\}$ spielt das Verhalten für sehr große Werte von n ($n \to \infty$) eine entscheidende Rolle. Von Interesse ist dabei die Frage, ob die Glieder der Folge gegen einen endlichen Wert streben oder nicht. Dieses Grenzverhalten wird mit Hilfe des sog. Grenzwertes beschrieben, der nun mit Hilfe einführender Beispiele motiviert werden soll.

In Zusammenhang mit der Darstellung rationaler Zahlen in der Dezimalschreibweise treten z.B. Folgen auf, die **periodische Dezimalzahlen** charakterisieren. So kann die rationale Zahl 2/9 näherungsweise beschrieben werden durch die Folge $0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, 0.22222, \ldots$

Diese Folge ist monoton steigend, nach unten durch $0,2$ und nach oben z.B. durch $0,3$ beschränkt. Mit zunehmender Stellenzahl nähert sich die Folge dem Wert 2/9, den man Grenzwert nennt. Durch eine entsprechend hohe Anzahl von Gliedern kann jede gewünschte Genauigkeit erzielt werden.

Ein weiteres Beispiel für die Verwendung unendlicher Folgen liefert die **näherungsweise Berechnung von Wurzeln mit Hilfe rationaler Zahlen**. In der Algebra zeigt man, daß z.B. $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

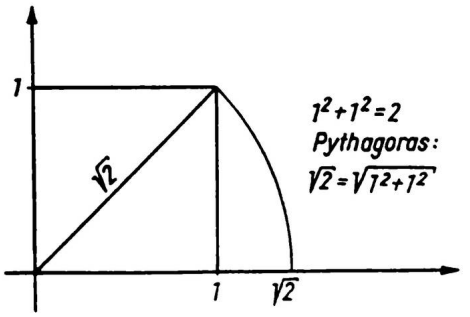


Bild 5.5

Man konstruiert eine monoton steigende und beschränkte Folge $\{x_n\}$ von Dezimalzahlen, bei der die Quadrate der Glieder kleiner als zwei, die Glieder selbst also kleiner als $\sqrt{2}$ sind.

x_n	1,4	1,41	1,414	1,4141	1,4142	1,41421	...
x_n^2	1,96	1,9881	1,999396	1,9996788	1,9999616	1,9999899	...

Zu jeder vorgegebenen Genauigkeit können beliebig viele Glieder angegeben werden, die diese erfüllen.

Zur analytischen Erfassung dieses Sachverhaltes sei als Beispiel die Folge

$$\{x_n\} = \left\{2 + \frac{(-1)^n}{n}\right\} \quad (n \in \mathbb{N}^*): \quad 1,\ 2\frac{1}{2},\ 1\frac{2}{3},\ 2\frac{1}{4},\ 1\frac{4}{5},\ \ldots$$

gegeben, die für wachsende Werte von n offensichtlich gegen 2 strebt.

Man untersucht nun das Verhalten der Folge in der Umgebung der Zahl 2, falls n beliebig groß wird. Dies charakterisiert man durch $n \to \infty$ (n gegen unendlich). Wählt man zu irgendeiner kleinen positiven Zahl $\varepsilon > 0$ das offene Intervall $(2-\varepsilon,\ 2+\varepsilon)$ der Länge 2ε mit der Zahl 2 als Mitte, so liegen bis auf endlich viele Glieder der Folge alle in diesem Intervall, das auch ε-Umgebung (sprich: epsilon-Umgebung) um 2 genannt und mit $U_\varepsilon(2)$ bezeichnet wird.

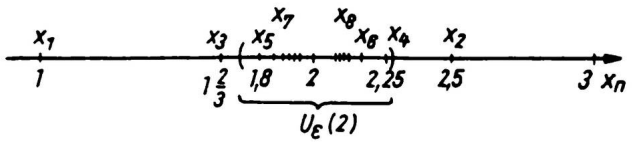


Bild 5.6

Definition

Ist ε eine positive reelle Zahl, so versteht man unter der ε-**Umgebung einer reellen Zahl** a das offene Intervall $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ der Länge 2ε, das a als Mittelpunkt enthält.
Man setzt

$$U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon) = \{x \mid |x-a| < \varepsilon \text{ und } x \in \mathbb{R}\}$$

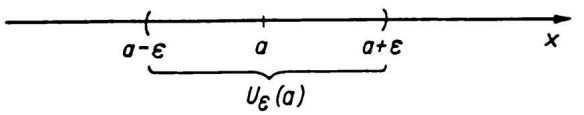


Bild 5.7

Die Betragsungleichung $|x-a| < \varepsilon$ beschreibt reelle Zahlen x, die von a einen Abstand kleiner als ε haben.

Gibt man z.B. den Wert $\varepsilon = 0,01$ vor, so können die Glieder der obigen Folge $\{x_n\}$ angegeben werden, die in der ε-Umgebung $U_{0,01}(2) = (2-0,01,\ 2+0,01) = (1,99,\ 2,01)$ der Zahl $a = 2$ liegen. Dazu werten wir die Ungleichung

$$|x_n - 2| < 0,01$$

aus:

$$\left|2 + \frac{(-1)^n}{n} - 2\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} < 0,01 \quad \text{, d.h. } n > 100$$

Damit fallen unendlich viele Glieder mit $n \geq 101$ in die Umgebung $U_{0,01}(2)$ und haben also von 2 einen Abstand kleiner als $0,01$, während die endlich vielen Glieder $x_1, \ldots, x_{100}$ außerhalb des Intervalls liegen. Wählt man z.B. $\varepsilon = 0,001$, so gehören zu dem Intervall $(2-0,001,\ 2+0,001)$ alle Glieder mit $n \geq 1001$.

Zu jeder positiven reellen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$, so daß alle Glieder x_n der Folge für $n \geq N(\varepsilon)$ in die ε-Umgebung $U_\varepsilon(2) = (2-\varepsilon,\ 2+\varepsilon)$ fallen. Wegen

$$|x_n - 2| = \left|2 + \frac{(-1)^n}{n} - 2\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

folgt

$$n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Die Zahl 2 wird Grenzwert der Folge $\{x_n\} = \left\{2 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ genannt.

Definition

Eine Zahl g heißt **Grenzwert einer Folge** $\{x_n\}$, wenn zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$ existiert, so daß für alle $n \geq N(\varepsilon)$ die Glieder x_n in der ε-Umgebung

$$U_\varepsilon(g) = (g-\varepsilon\,,\ g+\varepsilon) = \{x \mid |x-g| < \varepsilon \text{ und } x \in \mathbb{R}\}$$

liegen, also die Ungleichung

$$|x_n - g| < \varepsilon \tag{5.13}$$

gilt. Eine Zahlenfolge mit einem Grenzwert heißt **konvergent**. Eine Zahlenfolge ohne Grenzwert heißt **divergent**.

Im Falle der Konvergenz sagt man auch:

Die Folge $\{x_n\}$ **konvergiert** für $n \to \infty$ gegen den Grenzwert g, geschrieben

$$x_n \to g \text{ für } n \to \infty \qquad \text{oder} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = g$$

(sprich: limes x_n für $n \to \infty$ gleich g).

Für die obige Folge ergibt sich damit: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right) = 2$

Eine Folge $\{x_n\}$ mit dem Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ heißt **Nullfolge**.

Beispiel 5.19

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$:

Für $\varepsilon > 0$ folgt aus $\left|\dfrac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$: $\quad n^2 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ bzw. $n > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

Beispiel 5.20

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+2} = 0$:

Aus $\left|\dfrac{1}{n^2+2} - 0\right| < \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ folgt: $n^2 + 2 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ bzw. $n > \sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon} - 2}$

Die Folge

$$\{x_n\} = \{n\}: \quad 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4\,,\ 5\,,\ \ldots$$

ist nach oben nicht beschränkt, da die Glieder für $n \to \infty$ über jeden endlichen Wert hinaus wachsen, und damit nicht konvergent. Dieses Verhalten kennzeichnet man durch

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

und bezeichnet eine solche Folge als **bestimmt divergent**. Unter diesen Begriff fällt auch die Folge

$$\{x_n\} = \{-n\} \quad \text{mit} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty$$

In diesem Zusammenhang wird auch von einem **uneigentlichen Grenzwert** gesprochen.

Eine andere Art von Divergenz verdeutlicht die Folge

$$\{x_n\} = \{1 + (-1)^n\}: \quad 0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, \ldots$$

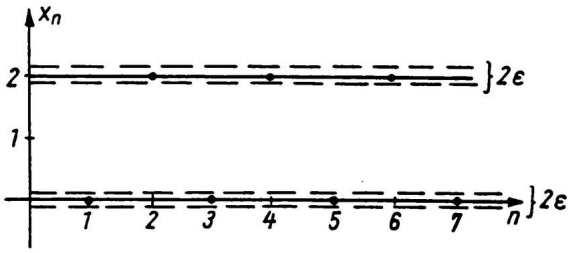


Bild 5.8

Weder 0 noch 2 sind Grenzwerte, da außerhalb einer ε-Umgebung einer dieser Zahlen noch unendlich viele Glieder der Folge liegen. Eine solche Zahlenfolge heißt **unbestimmt divergent**.

Beispiel 5.21

Untersuchen Sie die Folge

$$\{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+2}\right\}: \quad \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \ldots$$

auf Monotonie und Beschränktheit. Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$

Lösung:

Die Folge ist offensichtlich monoton steigend. Rechnerisch folgt dies aus

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{n+3} - \frac{n}{n+2} = \frac{(n+1)(n+2) - n(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{2}{(n+3)(n+2)} > 0$$

Wegen

$$\frac{n}{n+2} < \frac{n}{n} = 1$$

ist $s_o = 1$ eine obere Schranke. Als größte untere Schranke erhält man $s_u = \frac{1}{3}$.

Als Grenzwert wird die Zahl 1 vermutet. Dann müssen bei Vorgabe einer Zahl $\varepsilon > 0$ von einem bestimmten Index $N(\varepsilon)$ an alle Glieder der Folge in der Umgebung $U_\varepsilon(1) = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ liegen. Dieser Index wird aus $|x_n - 1| < \varepsilon$ bestimmt:

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+2} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+2)}{n+2}\right| = \left|\frac{-2}{n+2}\right| = \frac{2}{n+2} < \varepsilon,$$

so daß

$$2 < \varepsilon(n+2) \quad \text{bzw.} \quad n > \frac{2}{\varepsilon} - 2$$

Für $\epsilon = 0,01$ z.B. folgt $n > \frac{2}{0,01} - 2 = 198$, d.h. ab $N(0,01) = 199$ haben alle Glieder der Folge einen Abstand von der Zahl 1, der kleiner als 0,01 ist. So ist $x_{199} = \frac{199}{201} = 0,9900498$.

In der Regel können Grenzwerte nicht so einfach bestimmt werden. Wie kann festgestellt werden, ob ein solcher Wert überhaupt existiert? Eine Antwort hierauf liefert der

Satz

Eine monotone und beschränkte Zahlenfolge ist konvergent. (5.14)

Auf den Beweis wird in diesem Zusammenhang nicht eingegangen. Wichtig ist auch folgender

Satz

Hat eine Folge einen Grenzwert, so ist dieser eindeutig bestimmt. (5.15)

Beweis:
Um die Aussage zu beweisen, geht man von der gegenteiligen Behauptung aus und führt diese zum Widerspruch. Damit ist diese widerlegt. Die ursprüngliche Aussage ist also richtig. Diese Art von Beweisführung nennt man **indirekten Beweis**.

Ein Grenzwert ist dadurch charakterisiert, daß in jeder vorgegebenen Umgebung des Grenzwertes unendlich viele Glieder der Folge und außerhalb nur endlich viele liegen.
Nimmt man an, der Grenzwert der Folge sei nicht eindeutig bestimmt, so existieren mindestens zwei verschiedene Grenzwerte. Wählt man sich nicht überschneidende Umgebungen der Grenzwerte, so liegen entsprechend dem Grenzwertbegriff unendlich viele Glieder der Folge in *jeder* dieser Umgebungen. Damit liegen aber auch außerhalb der Umgebung *eines* Grenzwertes noch unendlich viele Glieder in der Umgebung des *anderen* Grenzwertes. Dies widerspricht der Definition des Grenzwertes. Folglich ist die Annahme, es gebe mehrere Grenzwerte einer Folge, falsch.

Beispiel 5.22

Die Folge $0,3$, $0,33$, $0,333$, $0,3333$, $0,33333$, $0,333333$, ...
ist monoton steigend und beschränkt. Sie konvergiert gegen den Grenzwert $\frac{1}{3}$.

5.1.1.4 Grenzwertsätze

Die Berechnung des Grenzwertes einer Folge, sofern er existiert, kann in vielen Fällen mit Hilfe von Rechenregeln auf bekannte Grenzwerte einfacher konvergenter Folgen zurückgeführt werden. Diese sogenannten Grenzwertsätze sind als Summen-, Faktor-, Produkt- und Quotientenregeln bekannt. Darauf werden später entsprechende Regeln für die Differentiation und Integration begründet.

s zwei Folgen $\{u_n\}$ und $\{v_n\}$ können mit Hilfe der üblichen rationalen Rechen-
erationen Summen-, Differenz-, Produkt- und Quotientenfolgen definiert werden,
$\in \mathbb{N}^*$):

mmenfolge	$\{u_n + v_n\}$
oduktfolge	$\{u_n v_n\}$
uotientenfolge	$\left\{\frac{u_n}{v_n}\right\}$ mit $v_n \neq 0$

enzwertsätze für Folgen

Konvergieren die Folgen $\{u_n\}$ und $\{v_n\}$ gegen die Grenzwerte u und v mit

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} v_n = v\,,$$

o gilt: (5.16)

ummenregel

Die Folge $\{u_n + v_n\}$ konvergiert gegen den Grenzwert $u + v$:

$$\lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n = u + v$$

aktorregel

Die Folge $\{\lambda u_n\}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ konvergiert gegen den Grenzwert λu:

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda u_n) = \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} u_n = \lambda u$$

roduktregel

Die Produktfolge $\{u_n\, v_n\}$ konvergiert gegen den Grenzwert $u\, v$:

$$\lim_{n\to\infty} (u_n v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n \cdot \lim_{n\to\infty} v_n = u\, v$$

uotientenregel

Mit $v_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und $v \neq 0$ konvergiert die Quotientenfolge $\left\{\frac{u_n}{v_n}\right\}$
gegen den Grenzwert $\frac{u}{v}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to\infty} v_n} = \frac{u}{v}$$

weis:

Beispiel für die Beweistechnik wird hier die Summenregel bewiesen. Analog
olgen die übrigen Beweise.

$u + v$ als Grenzwert der Folge $\{u_n + v_n\}$ zu erhalten, müssen für einen vor-
gebenen Wert $\varepsilon > 0$ von einem bestimmten Index $N(\varepsilon)$ an alle Glieder der

Summenfolge in der ε-Umgebung $U_\varepsilon(u+v) = (u+v-\varepsilon, u+v+\varepsilon)$ liegen, d.h., es muß gelten

$$|u_n + v_n - (u+v)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon)$$

Wegen

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} v_n = v$$

existieren zu einer reellen Zahl $\varepsilon > 0$ Indizes $N_1(\varepsilon)$ und $N_2(\varepsilon)$, so daß sich die Abschätzungen

$$|u_n - u| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } n \geq N_1(\varepsilon)$$

und

$$|v_n - v| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } n \geq N_2(\varepsilon)$$

ergeben. Bezeichnet man den größeren der beiden Indizes N_1 und N_2 mit N, so folgt:

$$|u_n - u| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{und} \qquad |v_n - v| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon)$$

Wegen der Ungleichung

$$|a+b| \leq |a| + |b| \qquad \text{für alle } a \text{ und } b \in \mathbb{R}$$

ergibt sich für alle $n \geq N(\varepsilon)$

$$|(u_n + v_n) - (u+v)| = |(u_n - u) + (v_n - v)| \leq |u_n - u| + |v_n - v| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

und damit die Behauptung.

Beispiel 5.23

Summenregel:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} - 4\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} - \lim_{n\to\infty} 4 = 0 - 4 = -4$$

Beispiel 5.24

Faktorregel:

$$\lim_{n\to\infty} \left(3 \cdot \frac{1}{n^2+1}\right) = 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 3 \cdot 0 = 0$$

Beispiel 5.25

Produktregel:

$$\lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \left(\left(3 + \frac{1}{n}\right)\left(3 + \frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right)\right)^2 = 3^2 = 9$$

Beispiel 5.26

Quotientenregel:

Diese Regel kann nur angewandt werden, wenn die Grenzwerte im Zähler und Nenner existieren. Bei Quotientenfolgen ist dies nicht immer der Fall, kann aber in typischen Fällen durch geeignete Termumformungen erreicht werden. Folgendes Beispiel soll diesen Sachverhalt erläutern.

Für die Glieder der Folge

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{4n^2 - 2}{2n^2 + n + 1} \right\}$$

existieren wegen

$$\lim_{n\to\infty} (4n^2 - 2) = \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} (2n^2 + n + 1) = \infty$$

die Grenzwerte der Terme im Zähler und Nenner nicht, so daß die Quotientenregel so nicht anwendbar ist. Kürzt man jedoch den Quotienten durch die größte gemeinsame Potenz von n, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 - 2}{2n^2 + n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \left(4 - \frac{2}{n^2}\right)}{n^2 \left(2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4 - \frac{2}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(4 - \frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{4}{2} = 2$$

5.1.1.5 Geometrische Folgen und Reihen

Im folgenden werden einige Folgen erörtert, die nicht nur für Anwendungen von Bedeutung sind, sondern auch das Charakteristische von Berechnungsmethoden verdeutlichen sollen. Insbesondere werden zunächst Konvergenz und Divergenz einer geometrischen Folge untersucht, der dann durch Summenbildung eine unendliche geometrische Reihe zugeordnet wird. Entsprechende Summenformeln werden hergeleitet.

Eine **geometrische Folge** sei gegeben in der Form

$$\{x_n\} = \{x_1 q^{n-1}\}: \quad x_1, x_1 q, \ldots, x_1 q^{n-1}, \ldots$$

mit Anfangsglied $x_1 \neq 0$, konstantem Faktor $q \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}^*$.

Unter diesen Voraussetzungen gilt der

Satz

Die geometrische Folge $\{x_n\} = \{x_1 q^{n-1}\}$
ist bestimmt divergent für $|q| > 1$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} |q^n| = \infty$
und unbestimmt divergent für $q = -1$.
Die Folge konvergiert für
$q = 1$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_1$
und
$|q| < 1$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$,
d.h. für $|q| < 1$ ist $\{x_n\}$ eine Nullfolge. (5.17)

Beweis:

Die geometrische Darstellung von q^n veranschaulicht die Konvergenz bzw. Divergenz der Folge $\{q^n\}$.

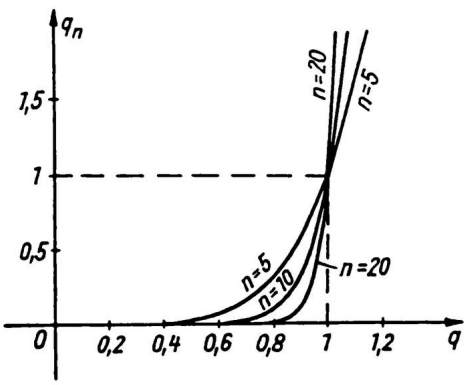


Bild 5.9

Die Folge $\{x_n\}$ ist darstellbar in der Form

$$x_n = x_1 q^{n-1} = \frac{x_1}{q} q^n$$

mit konstantem Faktor $\frac{x_1}{q}$, der die Art des Konvergenzverhaltens nicht beeinflußt,

so daß man die vereinfachte Folge

$$\{q^n\}: \quad q, q^2, \ldots, q^n, \ldots$$

zugrunde legen kann.

$\underline{|q| > 1}$

Untersucht wird das Verhalten von $|q^n|$ für $n \to \infty$.

Wegen $|q| > 1$ setzt man $|q| = 1 + b$ mit $b > 0$.

Mit der Bernoullischen Ungleichung (vgl. (5.12) in 5.1.1.2)

$$(1+x)^n \geq 1 + n\,x \text{ für } x > -1$$

folgt

$$|q^n| = |q|^n = (1+b)^n \geq 1 + n\,b$$

Wegen

$$\lim_{n\to\infty} (1 + n\,b) = \infty$$

wird damit für $n \to \infty$ auch $|q^n|$ beliebig groß. Die Folge ist bestimmt divergent.

$\underline{q = -1}$

Die Folge $\{q^n\} = \{(-1)^n\}$: $-1, 1, -1, 1, \ldots$

ist alternierend und unbestimmt divergent.

$\underline{q = 1}$

Die Folge $\{q^n\} = \{1^n\}$: $1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$

ist konstant und hat den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$

$\underline{|q| < 1}$

Wegen $|q| < 1$ kann man

$$|q| = \frac{1}{1+b} \qquad \text{mit } b > 0$$

setzen. Daraus folgt

$$|q^n| = |q|^n = \left(\frac{1}{1+b}\right)^n = \frac{1}{(1+b)^n}$$

Anwendung der Bernoulli-Ungleichung liefert eine Abschätzung des Nenners nach unten und damit eine Abschätzung des Quotienten nach oben:

$$|q^n| = |q|^n = \left(\frac{1}{1+b}\right)^n \leq \frac{1}{1+nb}$$

Wegen

$$\lim_{n\to\infty} |q^n| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nb} = 0$$

ist $\{q^n\}$ und damit $\{x_n\}$ eine Nullfolge.

Beispiel 5.27

Die Folge

$$\{q^n\} = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} : \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$

hat den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Einer unendlichen Folge $\{x_n\}$ von Zahlen kann formal auch eine Summe von unendlich vielen Summanden

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n + \ldots$$

zugeordnet werden, die man als **unendliche Reihe** bezeichnet. Um sinnvoll rechnen zu können, sind gewisse Vorschriften zu beachten.

Hierzu konstruiert man eine **Folge $\{s_n\}$ von Teil- oder Partialsummen**, indem man setzt:

$$s = \sum_{k=1}^{n} x_k \quad \text{, d.h.} \quad s_1 = x_1\,,\ s_2 = x_1 + x_2\,,\ s_3 = x_1 + x_2 + x_3\,,\ \ldots$$

Konvergiert die Folge der Partialsummen gegen den Grenzwert

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k\,,$$

so schreibt man dafür

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots$$

und bezeichnet diese formale unendliche Summe als **konvergente unendliche Reihe**.
Konvergiert die Folge der Partialsummen nicht, so heißt die Reihe **divergent**.

Der geometrischen Folge

$$\{x_n\} = \left\{x_1 q^{n-1}\right\}: \quad x_1\,,\ x_1 q\,,\ \ldots\,,\ x_1 q^{n-1}\,,\ \ldots$$

entspricht die **geometrische Reihe**

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_1 q^{n-1} = x_1 + x_1 q + \ldots + x_1 q^{n-1} + \ldots$$

Satz

Die unendliche geometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_1 q^{n-1} = x_1 + x_1 q + x_1 q^2 + \ldots$$

konvergiert für $|q| < 1$ gegen den Summenwert

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} x_1 q^{n-1} = \frac{x_1}{1-q}$$

und divergiert für $|q| \geq 1$. (5.18)

Beweis:

Zu untersuchen ist die Konvergenz der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_1 q^{k-1} = x_1 \left(1 + q + \ldots + q^{n-1}\right) = x_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q},$$

wobei die Summenformel für endliche geometrische Reihen aus (5.1.1.2) verwendet wird.

$\underline{|q| < 1}$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ folgt

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} x_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{x_1}{1-q}$$

$\underline{q = -1}$

Die Folge der Partialsummen

$$\{s_n\} = \left\{ x_1 \frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} \right\} : \quad x_1, 0, x_1, 0, \ldots$$

ist alternierend und unbestimmt divergent.

$\underline{q = 1}$

Die Folge der Partialsummen $\{s_n\}$ mit $s_n = x_1 + x_1 + \ldots + x_1 = nx_1$ ist für $n \to \infty$ nicht beschränkt, also divergent.

$\underline{|q| > 1}$

Wegen der Divergenz von q^n ist auch die Folge $\{s_n\}$ mit $s_n = x_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$ divergent.

Beispiel 5.28

Die periodische Dezimalzahl $0,\overline{6}$ definiert eine geometrische Reihe mit dem Summenwert $\frac{2}{3}$.

Beweis:

Die Zahl ist darstellbar in der Form
$0,\overline{6} = 0,666666666\ldots = 0,6 + 0,06 + 0,006 + 0,0006 + \ldots$
und definiert eine geometrische Reihe mit Anfangsglied $x_1 = 0,6$ und konstantem Faktor $q = 0,1$. Damit folgt

$$0,\overline{6} = 0,6 \cdot \frac{1}{1-0,1} = \frac{0,6}{0,9} = \frac{2}{3}$$

Beispiel 5.29

Die geometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

mit dem Anfangsglied $x_1 = \frac{1}{2}$ und dem konstanten Faktor $q = \frac{1}{2}$ ist konvergent und hat den Summenwert

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

Geometrische Veranschaulichung durch eine Folge von Rechtecken, deren Inhalte den Summanden der Reihe entsprechen:

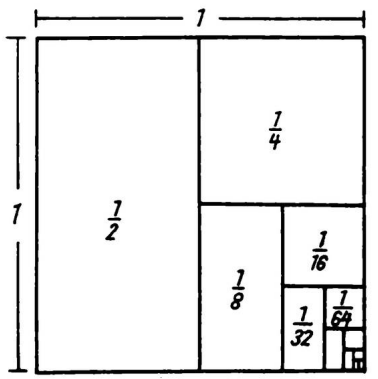


Bild 5.10

Zwischen einer geometrischen Folge $\{q^n\}$ und einer Folge $\{n^k\}$ vom Typ eines Polynoms k-ter Ordnung mit festem $k \in \mathbb{N}$ existiert ein Zusammenhang, der zur Beschreibung des Verhaltens von Funktionen für große Werte von n verwendet wird:

Für $n \to \infty$ wächst q^n für $q > 1$ stärker als jede Potenz n^k zu gegebenem Exponenten $k \in \mathbb{N}$.

Satz

Die Folge

$$\{x_n\} = \frac{n^k}{q^n} \quad \text{für} \quad q > 1 \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{N}$$

konvergiert gegen den Grenzwert Null mit

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^k}{q^n} = 0 \tag{5.19}$$

Beweis:

Der Nachweis wird mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung geführt.

$\underline{k = 0}$

Die Behauptung stimmt offensichtlich.

$\underline{k = 1}$

In diesem Falle untersucht man zunächst

$$\sqrt{x_n} = \sqrt{\frac{n}{q^n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{q^n}} = \frac{\sqrt{n}}{\left(\sqrt{q}\right)^n}$$

und setzt wegen $q > 1$:

$$\sqrt{q} = 1 + b \quad \text{mit} \quad b > 0$$

Potenzieren und Anwendung der Bernoullischen Ungleichung ergeben

$$\left(\sqrt{q}\right)^n = (1+b)^n \geq n\,b$$

bzw.

$$\sqrt{x_n} = \frac{\sqrt{n}}{(1+b)^n} \leq \frac{\sqrt{n}}{1+nb} < \frac{\sqrt{n}}{n\,b} = \frac{1}{\sqrt{n}\,b}\,,$$

so daß

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,b} = 0 \text{ , d.h. } \lim_{n\to\infty} x_n = 0\,.$$

$\underline{k \in \mathbb{N}^*}$

Analog zu oben folgt:

$$\sqrt[2k]{x_n} = \frac{\sqrt[2k]{n^k}}{\sqrt[2k]{q^n}} = \frac{\sqrt{n}}{\left(\sqrt[2k]{q}\right)^n}$$

Wegen $q > 1$ setzt man

$$\sqrt[2k]{q} = 1 + b_k \qquad \text{mit} \quad b_k > 0$$

Dann ist

$$\sqrt[2k]{x_n} = \frac{\sqrt{n}}{(1+b_k)^n} \leq \frac{\sqrt{n}}{1+n\,b_k} < \frac{\sqrt{n}}{n\,b_k} = \frac{1}{\sqrt{n}\,b_k}$$

Aus

$$x_n \leq \left(\frac{1}{\sqrt{n}\,b_k}\right)^{2k} = \frac{1}{n^k\,b_k^{2k}}$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k\,b_k^{2k}} = 0$$

5.1.1.6 Die Eulersche Zahl e als Grenzwert von Folgen

Eine ausgezeichnete Rolle unter den Zahlen und Anwendungen in Naturwissenschaft und Technik spielt die **Eulersche Zahl** $e = 2,7182818\ldots$, die als Grenzwert von geeigneten Folgen erhalten werden kann. Im folgenden werden dazu monoton steigende und monoton fallende Folgen $\{x_n\}$ und $\{o_n\}$ mit $o_n > x_n$ angegeben, denen eine Folge von ineinander geschachtelten Intervallen $I_n = (x_n\,,\, o_n)$ zugeordnet wird, die für $n \to \infty$ gegen null schrumpfen und dadurch einen Grenzwert definieren. Dieses Konstruktionsprinzip nennt man **Intervallschachtelung**. Anschließend werden Anwendungen aus der Praxis erörtert.

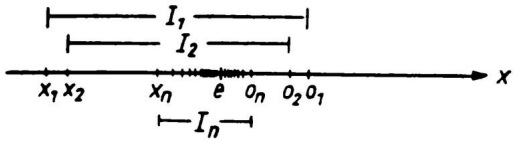


Bild 5.11

Satz

Die Folge $\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ konvergiert gegen den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \qquad \text{mit} \quad \mathrm{e} = 2{,}71828\ldots$$

Man nennt e **Eulersche Zahl**. (5.20)

Beweis:

Der Grenzwert wird mit Hilfe von monoton steigenden und fallenden Folgen nach dem Prinzip der Intervallschachtelung ermittelt. Den durchzuführenden Abschätzungen liegt unter anderem die Bernoullische Ungleichung zugrunde.

Die Folge

$$\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

ist monoton steigend, d.h.

$$x_{n+1} > x_n \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1:$$

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} \\ &= \left(\frac{(n+2)\,n}{(n+1)(n+1)}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} \\ &= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}\end{aligned}$$

Anwendung der Bernoullischen Ungleichung führt zu

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > 1-\frac{n+1}{(n+1)^2} = 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

so daß

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} = 1, \quad \text{d.h. } x_{n+1} > x_n \text{ für } n \in \mathbb{N}^*$$

Die Folge

$$\{o_n\} = \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \right\}$$

ist monoton fallend, d.h.

$$o_n > o_{n+1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{o_n}{o_{n+1}} > 1 \,.$$

Der Beweis erfolgt analog zu oben.

Ferner gilt $o_n > x_n$ wegen

$$\frac{o_n}{x_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = 1+\frac{1}{n} > 1$$

Die Folgen $\{o_n\}$ *und* $\{x_n\}$ *sind beschränkt*:

Da $\{o_n\}$ monoton fällt, ist o_1 die kleinste obere Schranke mit $o_1 = 4$. Wegen $x_n < o_n$ folgt auch $x_n < o_n \leq 4$. Damit sind beide Folgen nach oben beschränkt. $\{x_n\}$ ist monoton steigend und hat 2 als größte untere Schranke mit $2 \leq x_n$. Wegen $x_n < o_n$ folgt auch $2 < o_n$ und damit insgesamt die Ungleichung

$$2 \leq x_n < o_n \leq 4$$

Beide Folgen sind monoton und beschränkt und haben daher nach (5.1.1.3) jeweils einen Grenzwert.

Die Folgen $\{x_n\}$ und $\{o_n\}$ *haben denselben Grenzwert*:

Wegen

$$o_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right) x_n$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty} o_n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right) x_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Der numerische Wert des Grenzwertes kann näherungsweise mit Hilfe der Folge $\{x_n\}$ berechnet werden, wobei die Ungleichung $o_n - x_n < \frac{4}{n}$ eine Fehlerabschätzung ermöglicht. Zahlenmäßig ergibt sich:

n	10	100	1000	10 000	100 000	10^7
o_n	2,853117	2,731862	2,719641	2,718418	2,718295	2,718282
x_n	2,593742	2,704814	2,716924	2,718146	2,718268	2,718282

Die Eulersche Zahl e spielt bei der Beschreibung von Wachstumsprozessen eine entscheidende Rolle. Sie sind dadurch charakterisiert, daß von Augenblick zu Augenblick die Vermehrung einer Substanz der jeweils vorhandenen Menge in guter Näherung linear proportional ist. Dieser Sachverhalt kann am Beispiel der Zinseszinsrechnung modellhaft erläutert werden, indem hier eine Verfeinerung durchgeführt wird.

Bei jährlicher Verzinsung erhält man nach einem Jahr das Guthaben (vgl. Beispiel 5.17)

$$g_1 = g_0 + \frac{p}{100} g_0$$

Der Zuwachs ist linear. Unterteilt man das Jahr in n gleiche Zeiträume, nach denen dann jeweils wieder die Verzinsung einsetzt, so ergibt sich als Guthaben nach dem ersten Zeitraum

$$g_1 = g_0 + \frac{1}{n}\frac{p}{100} g_0 = \left(1 + \frac{p}{n100}\right) g_0,$$

nach dem zweiten

$$g_2 = \left(1 + \frac{p}{n100}\right) g_1 = \left(1 + \frac{p}{n100}\right)^2 g_0$$

und nach dem n-ten Zeitraum

$$g_n = \left(1 + \frac{p}{n100}\right)^n g_0$$

Mit

$$\frac{1}{n^*} = \frac{p}{n100} \qquad \text{bzw.} \qquad n = \frac{p}{100} n^*$$

folgt

$$g_n = g_0 \left(1 + \frac{1}{n^*}\right)^{n^* \frac{p}{100}} = g_0 \left(\left(1 + \frac{1}{n^*}\right)^{n^*}\right)^{\frac{p}{100}}$$

Mit $n \to \infty$ strebt auch $n^* \to \infty$.

Wegen (vgl. (5.84))

$$\lim_{n^* \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n^*}\right)^{n^*} = \mathrm{e}$$

erhält man schließlich

$$\lim_{n \to \infty} g_n = g_0 \mathrm{e}^{\frac{p}{100}} .$$

Man spricht hier von einer **stetigen Verzinsung**.

Auf die Exponentialfunktionen zur Basis e und deren Anwendungen wird später ausführlich eingegangen.

5.1.1.7 Wurzelfunktionen und Berechnung von Wurzeln

Folgen können häufig nur in rekursiver Darstellung angegeben werden. Sie treten insbesondere bei Iterationsverfahren auf, z.B. bei der Berechnung von Nullstellen oder der Bestimmung der Lösungen von Gleichungen. Diese Methoden werden wesentlich in der Datenverarbeitung verwendet.

Im folgenden wird als typischer Modellfall ein aktualisiertes klassisches Verfahren zur Berechnung von Quadratwurzeln aus positiven Zahlen erläutert. Der Zusammenhang zwischen verschiedenen Wurzelfunktionen wird anschließend angedeutet.

Als Einführung dient zunächst die näherungsweise Berechnung von $\sqrt{3}$.

Man geht von irgendeiner Näherung x_1 aus, z.B. $x_1 = 2$. Wegen $2^2 = 4 > 3$ ist $x_1 > \sqrt{3}$. Aus der Gleichung $x_1 \cdot b_1 = 3$ wird die Zahl $b_1 = \dfrac{3}{x_1} = \dfrac{3}{2}$ mit $b_1 < \sqrt{3}$ errechnet. Damit gilt

$$b_1 < \sqrt{3} < x_1 \qquad \text{bzw.} \quad \frac{3}{2} < \sqrt{3} < 2\,.$$

Als nächste Näherung wählt man das **arithmetische Mittel**

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{3}{x_1}\right), \qquad \text{also} \quad x_2 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{2}\right) = 1{,}75\,.$$

Wegen $x_2^2 = 1{,}75^2 = 3{,}0625 > 3$ ist $x_2 > \sqrt{3}$. Die Zahl b_2 aus der Gleichung $b_2 \cdot x_2 = 3$ hat den Wert $b_2 = \dfrac{3}{x_2} = \dfrac{3}{1{,}75} = 1{,}714286$. Wegen $b_2^2 = \left(\dfrac{3}{1{,}75}\right)^2 = 2{,}938776 < 3$ ist $b_2 < \sqrt{3}$, so daß

$$b_2 < \sqrt{3} < x_2 \qquad \text{bzw.} \qquad 1{,}714286 < \sqrt{3} < 1{,}75$$

Entsprechend bildet man

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{3}{x_2}\right)$$

und erhält

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{4} + \frac{3}{\frac{7}{4}}\right) = 1{,}732143 \qquad \text{mit} \quad x_3^2 = 3{,}000319\,.$$

b_3 aus der Gleichung $b_3 \cdot x_3 = x_3$ hat den Wert $b_3 = \dfrac{3}{x_3} = 1{,}731959$,

so daß

$$b_3 < \sqrt{3} < x_3 \qquad \text{bzw.} \qquad 1{,}731959 < \sqrt{3} < 1{,}732143$$

Allgemein ergibt sich die Rekursionsformel

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right)$$

Wählt man verschiedene Startwerte x_1, so errechnet man z.B. folgende Werte, die alle relativ schnell eine 6stellige Genauigkeit von $\sqrt{3}$ liefern.

	$x_1 = 1$		$x_1 = 1,5$		$x_1 = 5$	
n	x_n	x_n^2	x_n	x_n^2	x_n	x_n^2
1	1	1	1,5	2,25	5	25
2	2	4	1,75	3,0625	2,8	7,84
3	1,75	3,0625	1,732143	3,000319	1,935714	3,74699
4	1,732143	3,000319	1,732051	3	1,742765	3,037229
5	1,732051	3	1,732051	3	1,732084	3,000114
6	1,732051	3	1,732051	3	1,732051	3
7	1,732051	3	1,732051	3	1,732051	3

Geometrische Veranschaulichung auf der Zahlengerade:

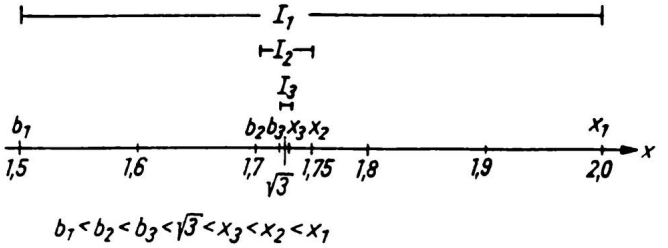


Bild 5.12

Für die Berechnung von a für $a > 0$ gilt der

Satz

Die Folge $\{x_n\}$ mit $x_1 \neq 0$ und

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \qquad \text{für } a > 0 \text{ und } x_1 > 0$$

konvergiert gegen den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \sqrt{a} \tag{5.21}$$

Beweis:

Die Konvergenz der Folge kann geometrisch plausibel gemacht werden, wenn man die Funktion f mit

$$f(x) = 0,5 \cdot \left(x + \frac{a}{x}\right)$$

graphisch darstellt. Mit Hilfe der Geradengleichung $g(x) = x$, der die Winkelhalbierende entspricht, erhält man aus

$$f(x) = g(x), \text{ d.h. aus } 0,5 \cdot \left(x + \frac{a}{x}\right) = x$$

die Schnittstelle $x = \sqrt{a}$. Die Bestimmung der Werte x_n ist angedeutet.

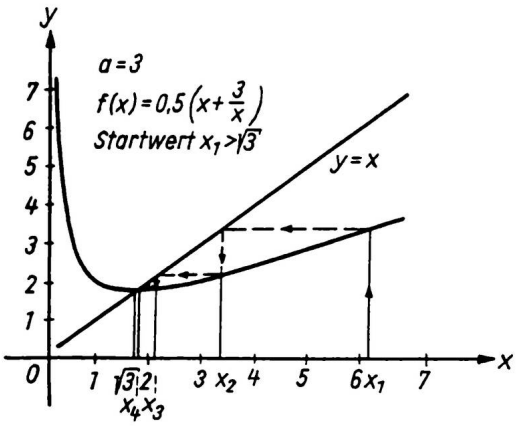


Bild 5.13

Eine Folge konvergiert, falls sie monoton und beschränkt ist.

Die Folge $\{x_n\}$ *ist monoton fallend für* $n \geq 2$:

Wegen

$$x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}\left(x_n^2 + 2a + \frac{a^2}{x_n^2}\right) - a$$

$$= \frac{1}{4}\left(x_n^2 - 2a + \frac{a^2}{x_n^2}\right) = \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right)^2 \geq 0,$$

also

$$x_{n+1}^2 - a \geq 0, \quad x_{n+1}^2 \geq a \quad \text{und} \quad \frac{a}{x_{n+1}} \leq x_{n+1},$$

folgt

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}\left(x_{n+1} + \frac{a}{x_{n+1}}\right) \leq \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_{n+1}) = x_{n+1}, \text{ d.h. } x_{n+2} \leq x_{n+1}$$

Damit ist die Folge $\{x_n\}$ monoton fallend für $n \geq 2$.

Beschränktheit:

Wegen $x_{n+1}^2 \geq a$ und $x_{n+1} \geq \sqrt{a}$ ist $\{x_{n+1}\}$ durch $\sqrt{a}$ nach unten beschränkt. Eine obere Schranke ist durch x_1 oder x_2 gegeben, da die Monotonie in jedem Falle vom zweiten Glied an gegeben ist. Somit ist die Folge konvergent.

Für den Grenzwert erhält man

$$g = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} x_n + \frac{a}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(g + \frac{a}{g}\right) \qquad \text{wegen } \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}$$

Dies führt zu der quadratischen Gleichung

$$2g^2 = g^2 + a \qquad \text{mit der positiven Lösung} \quad g = \sqrt{a}.$$

Als Verallgemeinerung erhält man den

Satz

Die Folge $\{x_n\}$ mit

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)\,x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right)$$

für $a > 0$, $x_1 > 0$ und eine natürliche Zahl $k > 1$ konvergiert gegen den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt[k]{a} \tag{5.22}$$

Diese Folge wird später als Sonderfall der **Newtonschen Methode** zur Lösung von Gleichungen erhalten.

Beispiel 5.30

a) $a = 2$, $n = 1, \ldots, 7$ $\quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) = \sqrt{2}$$

	$x_1 = 1,5$		$x_1 = 2$		$x_1 = 5$	
n	x_n	x_n^2	x_n	x_n^2	x_n	x_n^2
1	1,5	2,25	2	4	5	25
2	1,416667	2,006944	1,5	2,25	2,7	7,29
3	1,414216	2,000006	1,416667	2,006944	1,72037	2,959674
4	1,414214	2	1,414216	2,000006	1,441455	2,077794
5	1,414214	2	1,414214	2	1,414471	2,000728
6	1,414214	2	1,414214	2	1,414214	2
7	1,414214	2	1,414214	2	1,414214	2

b) $a = 51$, $n = 1, \ldots, 7$, $\quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{51}{x_n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{51}{x_n}\right) = \sqrt{51}$$

	$x_1 = 2$		$x_1 = 5$		$x_1 = 7$	
n	x_n	x_n^2	x_n	x_n^2	x_n	x_n^2
1	2	4	5	25	7	49
2	13,75	189,0625	7,6	57,76	7,142857	51,020408
3	8,729545	76,204964	7,155263	51,197791	7,141429	51,000002
4	7,285887	53,08415	7,141442	51,000191	7,141428	51
5	7,142861	51,020457	7,141428	51	7,141428	51
6	7,141429	51,000002	7,141428	51	7,141428	51
7	7,141428	51	7,141428	51	7,141428	51

Ein günstig gewählter Startwert x_1 beeinflußt den Aufwand der Rechnung!

Für die n-ten Wurzeln $\sqrt[n]{q}$ für $n \to \infty$ gilt der

Satz

Die Folge $\{x_n\} = \sqrt[n]{q}$ für $q > 0$
konvergiert gegen den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1 \tag{5.23}$$

Beweis:

Geometrische Veranschaulichung von $\sqrt[n]{q}$ für $n = 3$, 5 und 10:

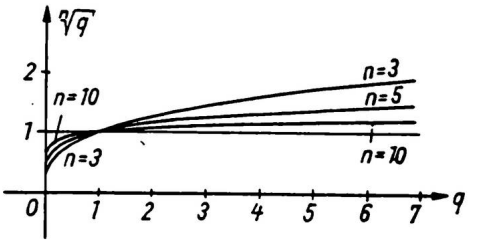


Bild 5.14

$\underline{q = 1}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$$

$\underline{q > 1}$

Mit $q > 1$ ist auch $\sqrt[n]{q} > 1$.

Daher kann

$$\sqrt[n]{q} = 1 + b_n \quad \text{mit} \quad b_n > 0 \quad \text{bzw.} \quad q = (1 + b_n)^n$$

gesetzt werden. Anwendung der Bernoullischen Ungleichung (5.12) ergibt

$$q = (1 + b_n)^n \geq 1 + n\, b_n\,,$$

so daß

$$q \geq 1 + n\, b_n \quad \text{bzw.} \quad b_n \leq \frac{q-1}{n}$$

Wegen $b_n > 0$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = \lim_{n\to\infty} (1 + b_n) = 1 + \lim_{n\to\infty} b_n = 1$$

$\underline{0 < q < 1}$

Setzt man $q = \dfrac{1}{p}$ mit $p > 1$, so folgt aufgrund des obigen Ergebnisses und der Grenzwertsätze

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{p}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{p}} = \frac{1}{1} = 1$$

Aufgaben 5.9 bis 5.13

5.1.2 Grenzwerte von Funktionen

Grenzwertuntersuchungen von Folgen bilden ein geeignetes Hilfsmittel, um das Verhalten einer Funktion in der Umgebung einer Stelle zu charakterisieren. Dabei sind Graphen von Funktionen von besonderem Interesse, die Besonderheiten wie Knicke, Lücken oder Sprünge aufweisen. Bezüglich der Anwendungen sei auf physikalische Größen mit sprunghaften Veränderungen verwiesen, die beispielsweise bei Zustandsänderungen, in der Impulstechnik oder bei Bewegungsvorgängen vorkommen.

5.1.2.1 Grenzwert einer Funktion für $x \to x_0$

Als Einstieg wird eine Funktion mit einem zusammenhängenden Graphen untersucht. Beispiele hierfür liefern die Gleichungen

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 \quad \text{und} \quad g(x) = |x - 1| \text{ (vgl. Bild 5.16)}$$

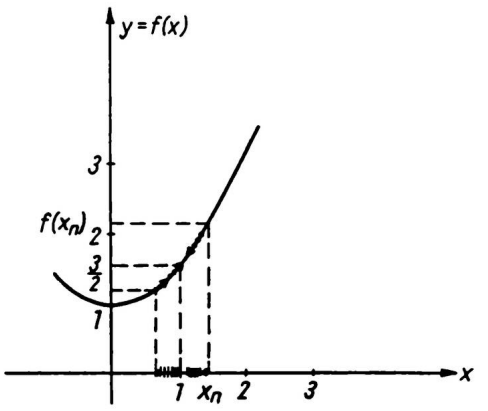


Bild 5.15

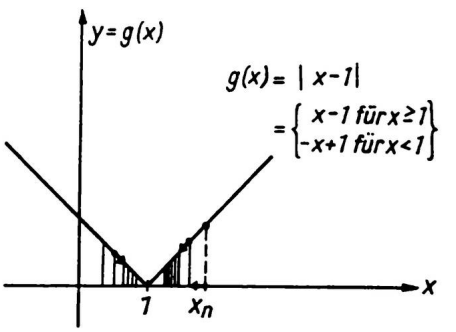


Bild 5.16

Um das Verhalten der Funktion f in der Umgebung einer Stelle $x_0 = 1$ zu studieren, wählt man z.B. eine Folge $\{x_n^+\}$ mit

$$x_n^+ = 1 + \frac{1}{n},$$

die von rechts gegen die Stelle $x_0 = 1$ konvergiert. Ihr wird eine Folge von Funktionswerten

$$f\left(x_n^+\right) = f\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

zugeordnet, die bei Anwendung von Grenzwertsätzen für Folgen den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n^+\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^2 + 1 = \frac{3}{2}$$

liefert. Für die Folge $x_n^- = 1 - \frac{1}{n}$, die von links gegen $x_0 = 1$ konvergiert, ergibt sich für die Folge der Funktionswerte $f(x_n^-)$ derselbe Grenzwert 3/2.

Diese Eigenschaft gilt für jede Folge

$$\{x_n\} \quad \text{mit} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 1\,,$$

da

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}x_n^2 + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^2 + 1 = \frac{1}{2}\cdot 1 + 1 = \frac{3}{2}.$$

Der Grenzwert stimmt mit dem Funktionswert der Funktion an dieser Stelle überein. Im allgemeinen trifft dies jedoch nicht zu. Oft ist der Funktionswert an einer zu untersuchenden Stelle erst gar nicht definiert. Dennoch kann ein Grenzwert existieren. Dies soll am Graphen einer punktierten Gerade erläutert werden. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einer **hebbaren Lücke**.

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \qquad \text{für} \quad x \neq 1$$

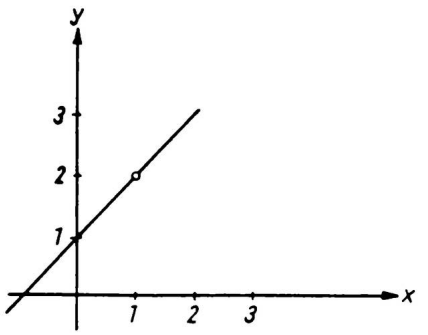


Bild 5.17

Im Falle der Gleichung $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \qquad$ für $\quad x \neq 1$

erhält man für eine Folge $\{x_n^+\}$ mit $x_n^+ = 1 + \dfrac{1}{n}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^+ = 1$

für die Folge der Funktionswerte $f(x_n^+) = 1 + \dfrac{1}{n} + 1$ als Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n^+) = \lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2\,,$$

der sich auch für die Folge $\{f(x_n^-)\} = \left\{1 - \dfrac{1}{n} + 1\right\}$ ergibt. Jede andere Folge $\{x_n\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ führt zu demselben Ergebnis $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 2$, obwohl $f(1)$

nicht definiert ist. Die Existenz eines Grenzwertes setzt also nicht voraus, daß der Funktionswert an der untersuchten Stelle existiert. Dies führt zu der

Definition

Der Definitionsbereich einer Funktion f enthalte eine Umgebung U einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ oder zumindest die Umgebung $U \setminus \{x_0\}$ ohne die Stelle x_0. Konvergiert die Folge der Funktionswerte $\{f(x_n)\}$ gegen den Grenzwert g für *jede* Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \in U \setminus \{x_0\}$, die mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gegen die Stelle x_0 konvergiert, so heißt g **Grenzwert der Funktion f an der Stelle x_0**. Dafür schreibt man

$$f(x) \to g \quad \text{für} \quad x \to x_0 \qquad \text{oder} \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = g \tag{5.24}$$

Es gibt Funktionen, für die an einzelnen Stellen Grenzwerte nicht existieren. Dann ist zu klären, ob gegebenenfalls ein Grenzwert von rechts oder links vorhanden ist.

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{array} \right\}$$

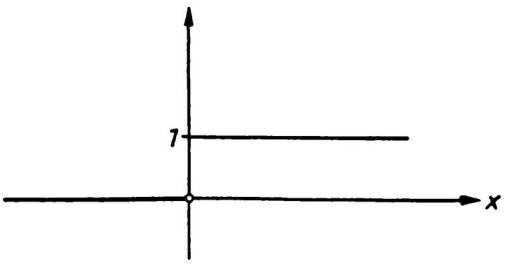


Bild 5.18

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{array} \right\}$$

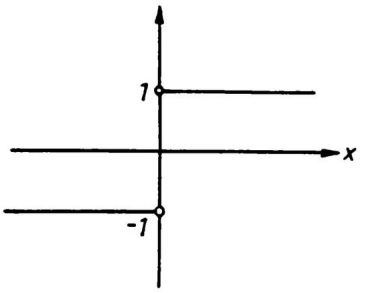


Bild 5.19

Dazu wird als Beispiel die **Sprungfunktion** f mit $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{array} \right\}$ an der Stelle $x_0 = 0$ untersucht.

Bei der rechtsseitigen Annäherung an die Stelle $x_0 = 0$ z.B. mit $x_n^+ = \dfrac{1}{n}$ für $n \to \infty$ folgt für die Funktion

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n^+) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1\,.$$

Dies gilt für jede von rechts gegen $x_0 = 0$ konvergierende Folge $\{x_n^+\}$.

Analog ergibt sich für eine Annäherung von links an die Stelle $x_0 = 0$ mit $x_n^- = -\dfrac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n^-) = \lim_{n\to\infty} f\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0\,.$$

Dieser linksseitige Grenzwert ergibt sich für jede von links gegen $x_0 = 0$ konvergierende Folge $\{x_n^-\}$. Die einseitigen Grenzwerte existieren also, sind jedoch verschieden. Der Funktionswert an der Stelle $x_0 = 0$ stimmt mit dem rechtsseitigen Grenzwert überein.

Für die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{array} \right\}$$

ist an der Stelle $x_0 = 0$ für jede von rechts gegen $x_0 = 0$ konvergierende Folge $\{x_n^+\}$ mit $x_n^+ > 0$ der rechtsseitige Grenzwert gleich

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n^+) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

und für jede von links gegen $x_0 = 0$ konvergierende Folge $\{x_n^-\}$ mit $x_n^- < 0$ der linksseitige Grenzwert gleich

$\lim_{n\to\infty} f(x_n^-) = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1.$

Allerdings ist in diesem Beispiel die Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ nicht erklärt.

Im folgenden verwenden wir die Begriffe

rechtsseitige Umgebung U^+ von x_0

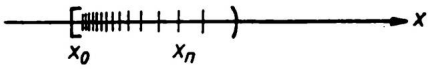


Bild 5.20

linksseitige Umgebung U^- von x_0

Bild 5.21

Definition

Der Definitionsbereich einer Funktion f enthalte eine rechtsseitige Umgebung U^+ an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ oder zumindest die Umgebung $U^+ \setminus \{x_0\}$. Konvergiert die Folge der Grenzwerte $f(x_n)$ gegen den Grenzwert g^+ für *jede* von rechts gegen x_0 konvergierende Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \in U^+ \setminus \{x_0\}$, so heißt g^+ **rechtsseitiger Grenzwert der Funktion f an der Stelle x_0**.

Man schreibt dafür

$$f(x) \to g^+ \quad \text{für} \quad x \to x_0 + 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = g^+ \tag{5.25}$$

Entsprechend definiert man den **linksseitigen Grenzwert** g^- bei der Annäherung an die Stelle x_0 von links.
Dafür setzt man

$$f(x) \to g^- \quad \text{für} \quad x \to x_0 - 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{x\to x_0-0} f(x) = g^-$$

In der Literatur sind auch folgende Darstellungen üblich:

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x<x_0)}} f(x) = \lim_{x\to x_{0-}} f(x) = g^- = g_l$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ (x>x_0)}} f(x) = \lim_{x\to x_{0+}} f(x) = g^+ = g_r$$

Zwischen dem Grenzwert g und den einseitigen Grenzwerten gilt der

Satz

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \text{ ist gleichwertig mit } \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = g \tag{5.26}$$

Analog zu den Grenzwertsätzen für Folgen gelten **Grenzwertsätze für Funktionen.**

Satz

Sind f und g zwei Funktionen mit den Grenzwerten

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g_1 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = g_2\,,$$

so folgt für $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to x_0} \lambda f(x) = \lambda \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda g_1$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = g_1 + g_2 \tag{5.27}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = g_1 g_2$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{g_1}{g_2} \qquad \text{für} \quad g_2 \neq 0$$

Der Grenzwert einer Funktion an einer Stelle existiert nicht, wenn beide einseitigen Grenzwerte vorhanden sind, aber nicht übereinstimmen. Dies gilt erst recht, wenn man keinen einseitigen Grenzwert ermitteln kann. Dies wird am folgenden Beispiel verdeutlicht.

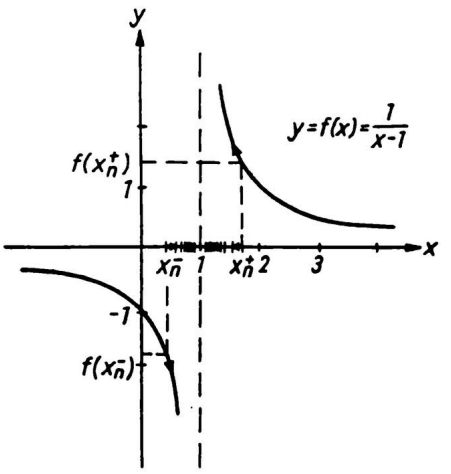


Bild 5.22

Die Grenzwertuntersuchung für die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ an der Stelle $x_0 = 1$ ergibt für $x_n^+ = 1 + \dfrac{1}{n}$ bzw. $x_n^- = 1 - \dfrac{1}{n}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^+ = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^- = 1$:

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{n\to\infty} f\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}-1} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

bzw.

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{n\to\infty} f\left(1-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{n}-1} = \lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty$$

Die Folgen sind bestimmt divergent und charakterisieren das Verhalten der Funktion in der Umgebung der untersuchten Stelle. Im Falle einer rationalen Funktion spricht man dann von einer **Polstelle**. Grenzwerte sind hier nicht vorhanden.

Beispiel 5.31

$$\lim_{x\to 2}(2x^3 - x^2 + 4) = 2\left(\lim_{x\to 2} x\right)^3 - \left(\lim_{x\to 2} x\right)^2 + \lim_{x\to 2} 4 = 2\cdot 2^3 - 2^2 + 4 = 16$$

Beispiel 5.32

Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x}{x}$.

Lösung:

Für $x \neq 0$ ist $\dfrac{x^2-2x}{x} = x-2$, so daß

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-2x}{x} = \lim_{x\to 0}(x-2) = -2$$

der Grenzwert an der Stelle $x_0 = 0$ ist.

Beispiel 5.33

Existiert der Grenzwert der Funktion f mit

$f(x) = \dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x+2}$ an der Stelle $x_0 = -2$?

Lösung:

f ist an der Stelle $x_0 = -2$ nicht definiert. Zähler und Nenner haben dieselbe Nullstelle $x_0 = -2$, so daß der lineare Faktor $x - x_0 = x+2$ abgespalten werden kann. Man erhält

$$f(x) = \frac{(x+2)(x^2-1)}{x+2} = x^2 - 1 \quad \text{für} \quad x \neq -2.$$

Als Grenzwert ergibt sich

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^2-1)}{x+2} = \lim_{x\to -2}(x^2-1) = 3$$

Beispiel 5.34

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f mit

$f(x) = 1 + 2^{-\frac{1}{x}}$ für $x \to 0$.

Lösung:

a) *Rechtsseitige Annäherung* z.B. mit $x_n^+ = \dfrac{1}{n}$ ergibt

$$\lim_{x\to +0}\left(1+2^{-\frac{1}{x}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+2^{-\frac{1}{\frac{1}{n}}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+2^{-n}\right) = 1$$

wegen $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

b) *Linksseitige Annäherung* mit $x_n^- = -\frac{1}{n}$ führt zu

$$\lim_{x\to-0}\left(1+2^{-\frac{1}{x}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+2^{-\frac{1}{-\frac{1}{n}}}\right) = \lim_{n\to\infty}(1+2^n) = \infty$$

Der Grenzwert an der Stelle $x_0 = 0$ existiert folglich nicht.

Die Berechnung des Grenzwertes einer Funktion an einer Stelle x_0 erfordert zum Teil besondere Methoden und gelegentlich auch erheblichen Aufwand. Als Beispiel hierfür und wegen der besonderen Bedeutung für zahlreiche Anwendungen wird folgendes Grenzverhalten diskutiert:

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1} \tag{5.28}$$

Da der Quotient für $x \to 0$ vom Typ $\frac{0}{0}$ ist, sofern man Zähler und Nenner einzeln untersucht, muß der Quotient zunächst geeignet umgeformt werden, um dann den Grenzwert ermitteln zu können. In diesem Fall wird eine geometrisch begründete Abschätzung durchgeführt.

Die Funktion f mit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist wegen

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x) \qquad \text{für } x \neq 0$$

eine *gerade Funktion*, so daß man sich auf den rechtsseitigen Grenzfall

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}$$

beschränken kann, der im Falle der Existenz des Grenzwertes gleich dem linksseitigen sein muß.

Verwendet man die Beziehungen zwischen Inhalten der Dreiecke und des Kreissektors am Einheitskreis, so folgt für den Winkel x mit

$$0 < x < \frac{\pi}{2}:$$

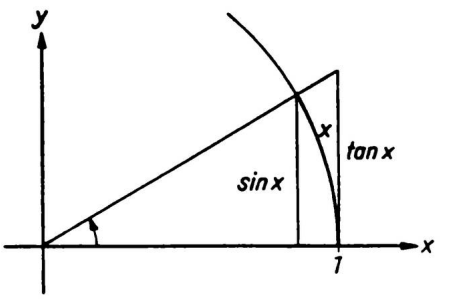


Bild 5.23

Für den Inhalt des Kreissektors A gilt die Gleichung

$$\frac{A}{\pi r^2} = \frac{x}{2\pi r} \text{ bzw. } \frac{A}{\pi} = \frac{x}{2\pi} \text{ wegen } r = 1 \text{ und damit } A = \frac{x}{2}.$$

Die geometrische Betrachtung ergibt für die Flächeninhalte

$$\frac{1}{2}\cos x \cdot \sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \tan x$$

Bei Division durch $\frac{1}{2}\sin x$ folgt die Ungleichung

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

Aus der Grenzbetrachtung

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} \geq \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \geq \lim_{x\to 0}\cos x\,, \text{ d.h.}$$

$$1 \geq \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \geq 1\,, \text{ erhält man schließlich} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Beispiel 5.35

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1$$

5.1.2.2 Grenzwerte von Funktionen für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$

Bei der Charakterisierung von Funktionen ist auch das Verhalten für sehr große Werte von $|x|$ zu untersuchen, gekennzeichnet durch $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

Definition

Eine Funktion f hat den Grenzwert g oder konvergiert gegen den Grenzwert g, falls für jede Folge $\{x_n\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ bzw. $\lim\limits_{n\to -\infty} x_n = -\infty$

die Folge der Funktionswerte denselben Grenzwert hat. Dafür schreibt man

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = g \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = g \tag{5.29}$$

Beispiel 5.36

Mit der Folge $\{x_n\} = \{n\}$ ergibt sich $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0.$

Allgemein gilt für $n \geq 1$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n} = 0} \tag{5.30}$$

Beispiel 5.37

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^3 - 4x^2 + 2}{x^3 + 4x + 2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(-2 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(1 + \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-2 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-2 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)} = -2$$

Um den Grenzwert einer gebrochenrationalen Funktion errechnen zu können, wird der Quotient umgeformt, indem man durch die größte gemeinsame Potenz von x kürzt.

Allgemeines Berechnungsschema

Haben die Polynome im Zähler und Nenner einer rationalen Funktion denselben Grad, so lautet der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n+\ldots+a_1x+a_0}{b_n x^n+\ldots+b_1x+b_0}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_n+\ldots+\dfrac{a_1}{x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{x^n}}{b_n+\ldots+\dfrac{b_1}{x^{n-1}}+\dfrac{b_0}{x^n}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(a_n+\ldots+\dfrac{a_0}{x^n}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(b_n+\ldots+\dfrac{b_0}{x^n}\right)}=\frac{a_n}{b_n}\qquad\text{für } a_n\neq 0 \quad\text{und}\quad b_n\neq 0\,.$$

Beispiel 5.38

Ist der Grad des Polynoms im Zähler einer rationalen Funktion größer als der Grad im Nenner, so liegt keine Konvergenz vor.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}=\infty$$

Für Exponentialfunktionen gilt

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}a^x=\infty}\quad\text{und}\quad\boxed{\lim_{x\to-\infty}a^x=0}\qquad\text{für}\quad a>1\qquad(5.31)$$

Beweis:

Setzt man $a=1+b$ mit $b>0$ und verwendet $(1+b)^x\geq 1+b\,x$, so ist

$$\lim_{x\to\infty}a^x=\lim_{x\to\infty}(1+b)^x\geq\lim_{x\to\infty}(1+b\,x)=\infty$$

Ferner erhält man für $x<0$ mit $z=-x$ und $x=-z$

$$\lim_{x\to-\infty}a^x=\lim_{z\to\infty}a^{-z}=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{a^z}=0$$

Das Verhalten von Exponential- und Potenzfunktionen zueinander ist charakterisiert durch

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^k}=\infty}\qquad\text{für}\quad a>1\quad\text{und}\quad k\geq 0\qquad(5.32)$$

Der Beweis ergibt sich mit Hilfe von Satz (5.19):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0\qquad\text{bzw.}\qquad\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^k}=\infty$$

Für $k=0$ ist das Ergebnis offensichtlich.

Für die Funktion ln und die Potenzfunktion gilt:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^k}=0} \qquad \text{für} \quad k\geq 1 \tag{5.33}$$

Setzt man $x=\mathrm{e}^z$ und $a=\mathrm{e}^k$, so strebt für $x\to\infty$ auch $z\to\infty$, so daß

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^k}=\lim_{z\to\infty}\frac{\ln \mathrm{e}^z}{(\mathrm{e}^z)^k}=\lim_{z\to\infty}\frac{z}{(\mathrm{e}^k)^z}=\lim_{z\to\infty}\frac{z}{a^z}=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{\frac{a^z}{z}}=0$$

nach (5.32) wegen $a>1$.

Aufgaben 5.14 bis 5.16

5.1.3 Stetigkeit von Funktionen

5.1.3.1 Begriff der Stetigkeit

Mit Hilfe des Grenzwertbegriffes nach Abschn. 5.1.2 kann das Verhalten von Funktionen charakterisiert werden.

Definition

Der Definitionsbereich einer Funktion f enthalte eine Umgebung U der Stelle x_0. Stimmt der Grenzwert von f für $x\to x_0$ überein mit dem Funktionswert $f(x_0)$, d.h. gilt

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

so heißt die **Funktion f stetig an der Stelle x_0. Die Funktion heißt stetig**, falls sie an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches stetig ist.
Ist eine Funktion an einer Stelle ihres Definitionsbereiches nicht stetig, so nennt man sie an dieser Stelle **unstetig**. (5.34)

Um die Stetigkeit, die bisher im Innern eines Intervalles erklärt ist, auch am Rand eines abgeschlossenen Intervalles zu erörtern, verwendet man den Begriff des einseitigen Grenzwertes.

Definition

Eine Funktion f heißt an einer Stelle x_0 ihres Definitionsbereiches **rechtsseitig bzw. linksseitig stetig**, falls der rechtsseitige bzw. linksseitige Grenzwert existiert und mit dem Funktionswert übereinstimmt, d.h. falls

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0) \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0) \tag{5.35}$$

Beispiel 5.39

Die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{|x-1|}$ ist an der Stelle $x_0 = 1$ stetig:

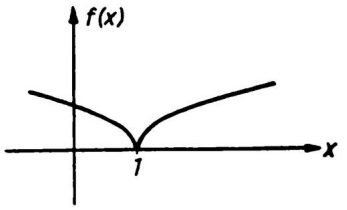


Bild 5.24

Funktionswert $f(1) = 0$

linksseitiger Grenzwert für $x_h^- = 1 - h$ mit $h \geq 0$:

$$\lim_{x \to 1-0} \sqrt{|x-1|} = \lim_{h \to +0} \sqrt{|1-h-1|} = \lim_{h \to +0} \sqrt{|-h|} = 0$$

rechtsseitiger Grenzwert für $x_h^+ = 1 + h$

$$\lim_{x \to 1+0} \sqrt{|x-1|} = \lim_{h \to +0} \sqrt{|1+h-1|} = \lim_{h \to +0} \sqrt{h} = 0$$

Für jede gegen 1 konvergierende Folge erhält man den Funktionswert $f(1) = 0$.

Daraus folgt $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{|x-1|} = f(1)$

Sind f und g zwei stetige Funktionen über demselben Definitionsbereich, so erhält man mit Hilfe rationaler Operationen wieder stetige Funktionen:

Summe, Produkt und Quotient stetiger Funktionen erzeugen stetige Funktionen. Im letzten Fall muß allerdings der Funktionsterm im Nenner ungleich null sein. Der Beweis beruht im wesentlichen auf den Grenzwertsätzen für Funktionen.

5.1.3.2 Unstetigkeitsstellen und Lücken

Sind Funktionen an einer Stelle x_0 unstetig oder weisen an dieser Stelle eine Definitionslücke auf, so ist das Verhalten der Funktion in einer Umgebung von x_0 von besonderer Bedeutung. Einige typische Fälle werden im folgenden aufgelistet.

a) *Funktionen, die an einer Stelle x_0 des Definitionsbereiches unstetig sind*

α) *Einseitige Grenzwerte vorhanden, aber verschieden*

$$y = f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } x < 1 \\ 2 & \text{für } x \geq 1 \end{array} \right\}$$

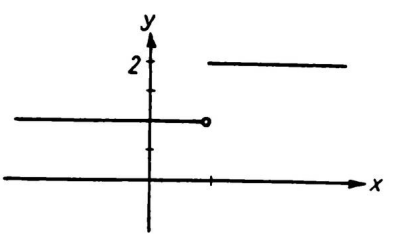


Bild 5.25

Funktionswert: $f(1) = 2$

Linksseitiger Grenzwert: $g^- = \lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} 1 = 1$

Rechtsseitiger Grenzwert: $g^+ = \lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} 2 = 2$

Daraus folgt: $g^+ \neq g^-$ mit $f(1) = g^+$, d.h., f ist unstetig an der Stelle $x_0 = 1$. Der Graph hat an dieser Stelle einen endlichen Sprung.

β) *Grenzwert existiert, aber verschieden vom Funktionswert*

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{array} \right\}$$

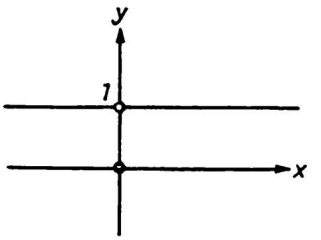


Bild 5.26

$f(0) = 0$, $g^+ = \lim\limits_{x \to +0} 1 = 1$, $g^- = \lim\limits_{x \to -0} 1 = 1$

Daraus folgt: $g^+ = g^- = g$, aber $g \neq f(0) = 0$. Die Funktion ist an dieser Stelle unstetig.

b) *Der Definitionsbereich der Funktion enthält eine Umgebung U ohne die Stelle x_0, d.h., an dieser Stelle ist die Funktion nicht definiert, es liegt eine Definitionslücke vor.*

α) *Hebbare Lücke*

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{für } x \neq 0$$

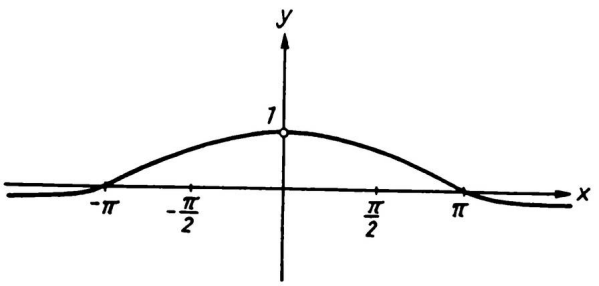


Bild 5.27

Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ existiert (vgl. 5.28).

Erweitert man den Definitionsbereich um $x_0 = 0$ und definiert als zusätzlichen Funktionswert $f(0) = 1$ den erhaltenen Grenzwert, so erhält man eine über dem gesamten Bereich stetige Funktion. Die Lücke ist dann geschlossen oder behoben.

β) Nicht hebbare Lücke (Polstelle)

$$y = f(x) = \frac{1}{x-2}$$

Definitionslücke: $x_0 = 2$

$$x_n^+ = 2 + \frac{1}{n}, \quad x_n^- = 2 - \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n^+ = \lim_{n\to\infty} x_n^- = 2$$

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{1}{x-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}-2} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

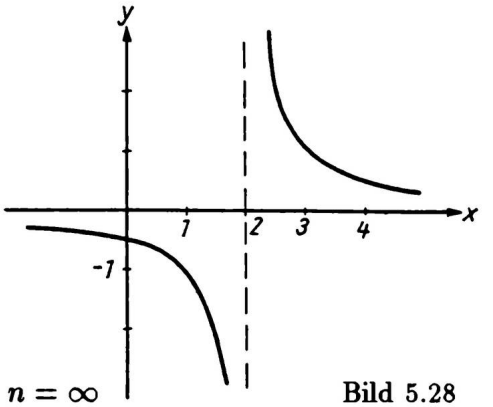


Bild 5.28

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{1}{x-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2-\frac{1}{n}-2} = \lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty$$

Beide einseitigen Grenzwerte existieren nicht. **Die Stelle $x_0 = 2$ heißt eine Polstelle der Funktion f.**

γ) Nicht hebbare Lücke mit einem einseitigen Grenzwert

$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ für $x \neq 0$

$$x_n^- = -\frac{1}{n} \quad \text{mit} \quad \lim_{n\to\infty} x_n^- = 0,$$

$$x_n^+ = \frac{1}{n} \quad \text{mit} \quad \lim_{n\to\infty} x_n^+ = 0$$

$$g^- = \lim_{x\to -0} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0;$$

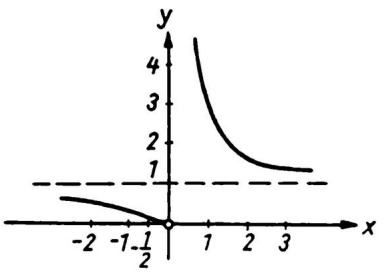


Bild 5.29

$g^- = 0$ erhält man für jede von links gegen 0 konvergierende Folge $\{x_n^-\}$.

$$g^+ = \lim_{x\to +0} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

g^- existiert, aber g^+ nicht. Die Lücke kann nicht behoben werden.

Aufgaben 5.17 bis 5.21

5.2 Ableitung einer Funktion

In der Naturwissenschaft und Technik sind physikalische Größen wie beispielsweise Geschwindigkeit oder Beschleunigung in der Regel nicht konstant, sondern zeitlich und räumlich veränderlich. Solche Vorgänge können mit Hilfe der Differentialrechnung erfaßt werden. Wesentliche Grundlage hierfür ist die Ableitung einer Funktion.

5.2.1 Begriff der Ableitung

Zur Beschreibung von Kurven verwendet man wesentlich den Begriff der **Steigung**, der wegen seiner praktischen Bedeutung sogar bei Verkehrsschildern benutzt wird.

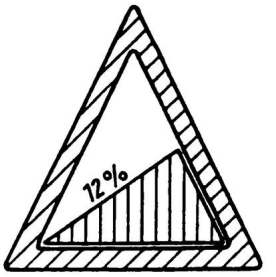


Bild 5.30

Dazu betrachten wir zunächst die **Steigung m einer Strecke P_0P** mit dem Steigungswinkel α. Wegen $m = \tan\alpha$ erhalten wir (vgl. Bild 5.31)

$$m = \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

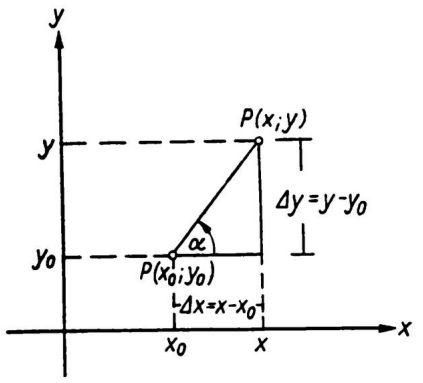


Bild 5.31

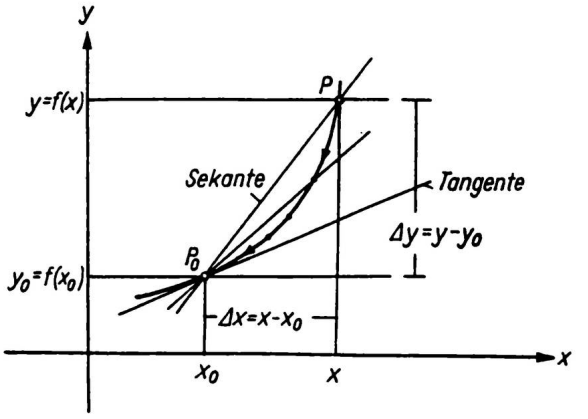


Bild 5.32

Zur näherungsweisen Charakterisierung eines Kurvenstückes des Graphen einer stetigen Funktion f mit $y = f(x)$ durch zwei Punkte P_0 und P konstruiert man die **Sekante** durch diese Punkte, wobei die Steigung der Sekante als eine **mittlere Steigung des Kurvenbogens** gedeutet wird (vgl. Bild 5.32).

In diesem Falle folgt als Steigung der **Differenzenquotient**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Strebt nun der Punkt P gegen den Punkt P_0, so erhält man eine Schar von Sekanten durch P_0. Die **Grenzgerade**, die man bei diesem Prozeß erzeugt, bezeichnet man als die **Tangente** an die Kurve im Punkte P_0. Die Steigung dieser ausgezeichneten Geraden wählt man dann als Steigung der Kurve in diesem Punkte. Dazu untersucht man den Grenzwert des Differenzenquotienten für $x \to x_0$. Im Falle der

Existenz wird dieser als Steigung der Tangente gewählt.

Definition

Eine Funktion f über dem Intervall $(a;b)$ heißt *an der Stelle* $x_0 \in (a,b)$ **differenzierbar**, falls der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

existiert. $f'(x_0)$ nennt man dann die **Ableitung von** f an der Stelle x_0.
Die Funktion heißt **differenzierbar im Intervall** (a,b), wenn f an jeder Stelle $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar ist.

Das Bilden der Ableitung bezeichnet man auch als **Differenzieren**, **Differentiation** oder **Ableiten**. Im Falle einer differenzierbaren Funktion spricht man von der **Ableitungsfunktion** f'. (5.36)

Der Differenzenquotient ist auch noch in einer anderen Form darstellbar, falls man $x = x_0 + \Delta x$ verwendet:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Die Ableitung $f'(x_0)$ ist dann gegeben durch

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Beispiel 5.40

Die Ableitung einer **konstanten** Funktion f mit $f(x) = c$ und $c \in \mathbb{R}$ ist gleich null.
Für jede Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt nämlich

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

Beispiel 5.41

Für die **lineare Funktion** f mit $f(x) = mx + n$ gilt:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{mx + n - (mx_0 + n)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{m(x - x_0)}{x - x_0} = m$$

d.h. $\boxed{f(x) = mx + n \Rightarrow f'(x) = m}$

Beispiel 5.42

Für $f(x) = x^2$ erhalten wir für jede Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0\,,$$

d.h. $\boxed{f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x}$

Beispiel 5.43

Für $f(x) = \sqrt{x}$ mit $x > 0$ folgt

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

d.h. $$\boxed{f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Satz

$$\boxed{f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n\,x^{n-1}} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}^* \tag{5.37}$$

Beweis:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)\left(x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + \ldots + x_0^{n-1}\right)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{n-1}\right) = n\,x_0^{n-1}$$

Bemerkung zur Schreibweise: Zur Kennzeichnung der Ableitung einer Funktion f existieren in der Literatur unterschiedliche Darstellungen. So schreibt man z.B. für die Ableitung von

$$f(x) = x^n : f'(x) = (x^n)'$$
$$f(x) = \sqrt{x} : f'(x) = (\sqrt{x})'$$
$$f(x) = \sin x : f'(x) = \sin' x = (\sin x)'$$

5.2.2 Bedeutung der Tangente

Aufgrund der vorhergehenden Betrachtungen berechnet man die Steigung des Graphen einer differenzierbaren Funktion f mit $y = f(x)$ im Punkt $P_0(x_0; f(x_0))$ mit Hilfe der Ableitung $f'(x_0)$ an der Stelle x_0.

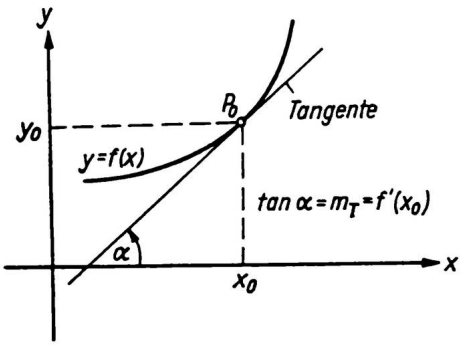


Bild 5.33

Das Ergebnis führt zusammengefaßt zu folgender

Definition

Die Gerade durch den Punkt $P_0(x_0; f(x_0))$ des Graphen einer differenzierbaren Funktion f mit $x_0 \in X_f$ heißt Tangente an die Kurve im Punkt P_0, falls für die Steigung m_T dieser Geraden gilt:

$$m_T = f'(x_0) \tag{5.38}$$

Als **Gleichung der Tangente durch den Punkt** P_0 erhalten wir mit Hilfe der Punkt-Steigungsform der Geradengleichung

$$y = m_T (x - x_0) + y_0 = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \tag{5.39}$$

Unter einer Geraden, die die Kurve in einem Punkt senkrecht schneidet, versteht man die Gerade, die senkrecht zur Tangente durch diesen Punkt verläuft. Sie wird als **Normale** bezeichnet. Zwischen den Steigungen m_T der Tangente und m_N der Normale besteht der Zusammenhang

$$m_N = -\frac{1}{m_T} \quad \text{für} \quad m_T = f'(x_0) \neq 0 \tag{5.40}$$

Als **Normalengleichung** ergibt sich damit

$$y = m_N (x - x_0) + y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + y_0 \tag{5.41}$$

Beispiel 5.44

Geben Sie die Gleichungen von Tangente und Normale durch den Punkt $P(2;4)$ der quadratischen Parabel mit der Gleichung $y = f(x) = x^2$ an.

Lösung:

Wegen $f'(x) = 2x$ folgt als Steigung $m_T = f'(2) = 4$.
Die Gleichung der Tangente lautet dann:

$y = 4(x - 2) + 4 = 4x - 4$

Wegen $m_N = -\frac{1}{m_T}$ ergibt sich als Normalengleichung

$y = -\frac{1}{4}(x - 2) + 4 = -\frac{1}{4}x + 4{,}5$

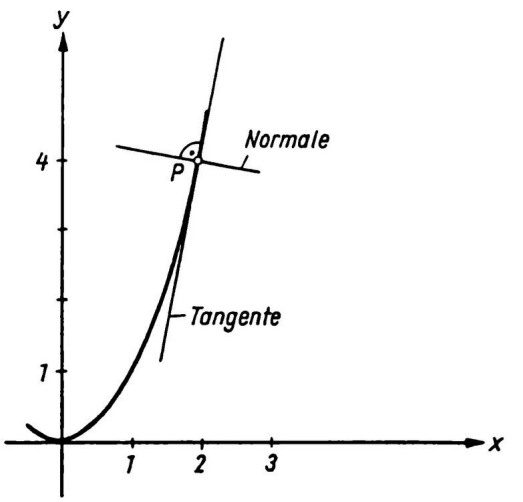


Bild 5.34

Beispiel 5.45

Aus einer Schar von Geraden durch den Punkt $P_0(1;3/2)$ sind diejenigen zu bestimmen, die die Kurve mit der Gleichung $y = f(x) = \sqrt{x}$ berühren. Geben Sie die Berührpunkte und Gleichungen der Tangenten von P_0 an den Parabelbogen an.

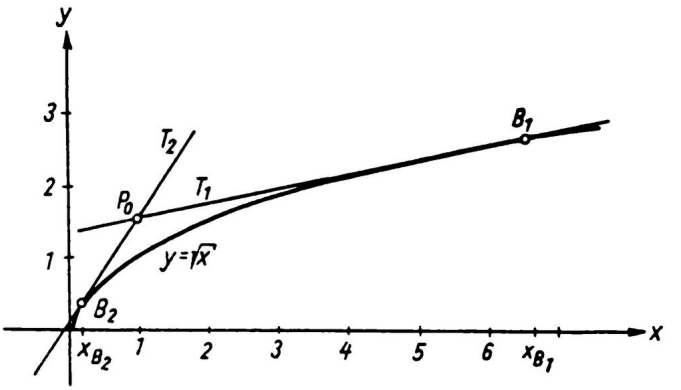


Bild 5.35

Gleichung der Geradenschar: $y = g(x) = m(x-1) + 1,5$ mit $m \in \mathbb{R}$

In einem Berührpunkt $B(x_B; y_B)$ stimmen die Steigungen überein $(x > 0)$:

$m = f'(x_B) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_B}}$. Ferner gilt für die Berührstelle x_B:

$$\sqrt{x_B} = \frac{1}{2\sqrt{x_B}}(x_B - 1) + 1,5$$

Daraus folgt $x_B + 1 = 3\sqrt{x_B}$ bzw. $x_B^2 - 7x_B + 1 = 0$ mit den Lösungen

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(7 + 3\sqrt{5}\right) = 6,85 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{1}{2}\left(7 - 3\sqrt{5}\right) = 0,15$$

$$y_1 = \sqrt{x_1} = 2,62 \qquad y_2 = \sqrt{x_2} = 0,38$$

so daß $B_1(6,85\,;2,62)$ und $B_2(0,15\,;0,38)$ die **Berührpunkte** sind. Die Steigungen der Tangenten ergeben sich als

$$m_1 = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} = 0,19\,, \qquad m_2 = \frac{1}{2\sqrt{x_2}} = 1,31$$

Tangentengleichungen

T_1 : $y = 0,19(x-1) + 1,5 = 0,19x + 1,31$ und

T_2 : $y = 1,31(x-1) + 1,5 = 1,31x + 0,19$

5.2.3 Differential und Differentialquotient

Neben der Ableitung $f'(x)$ einer Funktion an der Stelle x in der Darstellung nach NEWTON verwendet man auch den Begriff des Differentialquotienten nach LEIBNIZ.

f sei eine differenzierbare Funktion über einer Umgebung der Stelle x.

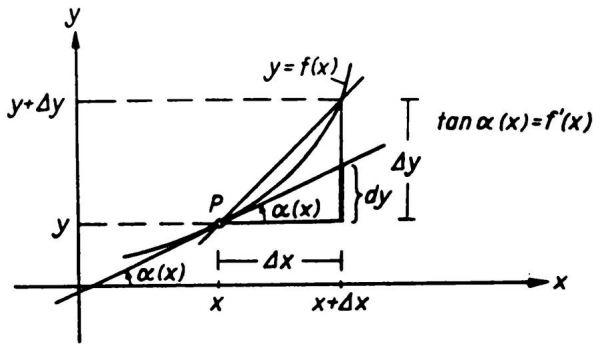


Bild 5.36

Eine Änderung der Variablen x um Δx bewirkt eine Änderung der Funktion um $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Legt man nun statt der Kurve die Tangente T durch den Punkt P zugrunde, so erhält man für die Ordinaten der Punkte auf der Tangente eine lineare Änderung, die man mit dy oder $df(x)$ bezeichnet und die gegeben ist durch

$$\boxed{dy = df(x) = \tan\alpha(x) \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x} \tag{5.42}$$

Man bezeichnet $dy = df(x)$ als das **Differential der Variablen y oder der Funktion f.**
Das Differential dy bedeutet also die Änderung von $y = f(x)$ bei einer Änderung des Arguments um Δx, wenn f von der Stelle x an linear fortgesetzt wird. Δy hingegen liefert die tatsächliche Änderung der Funktion f.

Beispiel 5.46

Für $f(x) = x^n$ erhält man wegen $f'(x) = n\,x^{n-1}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$
$dy = df(x) = dx^n = n\,x^{n-1} \cdot \Delta x$
Sonderfall für $n = 1$: $df(x) = dx = 1 \cdot \Delta x$, d.h. $\Delta x = dx$

$dx = \Delta x$ ist das Differential der Variablen x. Man kann daher setzen

$$dy = df(x) = f'(x)\,dx$$

Division durch dx ergibt den Quotienten der Differentiale

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f'(x)},$$

den man als **Differentialquotienten der Funktion f** bezeichnet. Da anderer-

seits $f'(x)$ als Grenzwert des Differenzenquotienten

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

definiert ist, folgt der Zusammenhang

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} \tag{5.43}$$

Der Differentialquotient ist also Grenzwert des Differenzenquotienten.
Für die Ableitung an einer Stelle x_0 schreibt man

$$\boxed{f'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}} \tag{5.44}$$

5.2.4 Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Am Beispiel einer stetigen Funktion f mit $f(x) = |x - 1|$ wird die Frage erörtert, ob eine stetige Funktion auch differenzierbar ist. Dazu wird an der Stelle $x_0 = 1$ die Differenzierbarkeit geklärt.

Wegen

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x - 1 & \text{für } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{für } x < 1 \end{array} \right\}$$

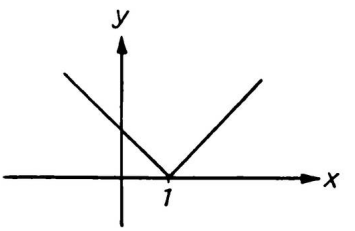


Bild 5.37

wird man links- bzw. rechtsseitige Grenzwerte untersuchen.

Definition

Eine Funktion heißt an der Stelle x_0 ihres Definitionsbereiches links- bzw. rechtsseitig differenzierbar, falls die Grenzwerte der Differenzenquotienten

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{bzw.} \quad f'(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existieren. Man nennt $f'(x_0 - 0)$ bzw. $f'(x_0 + 0)$ die **links-** bzw. **rechtsseitige Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0.** (5.45)

Im obigen Fall ergibt sich

$$f'(1 - 0) = \lim_{x \to 1 - 0} \frac{-(x-1) - 0}{x - 1} = -1$$

$$f'(1 + 0) = \lim_{x \to 1 + 0} \frac{x - 1 - 0}{x - 1} = 1$$

Da rechts- und linksseitige Ableitungen verschieden sind, ist die Funktion an dieser Stelle nicht differenzierbar, obwohl sie stetig ist. Bei Annäherung an die Stelle

$x_0 = 1$ erhält man hier zwei verschiedene Tangenten! Im Falle der Differenzierbarkeit existiert eine eindeutig definierte Tangente. Dies gilt nur für **glatte Kurven**, d.h. falls es keine Spitzen gibt. Konsequenz:

Eine stetige Funktion ist nicht notwendig auch differenzierbar.

Andererseits gilt der

Satz

Ist eine Funktion an der Stelle x_0 ihres Definitionsbereiches differenzierbar, so ist sie an dieser Stelle auch stetig. (5.46)

Beweis:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0) + f(x_0)) \\ &= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right) + \lim_{x\to x_0} f(x_0) \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} (x - x_0) + f(x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0)\,,\end{aligned}$$

d.h. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, also ist f an der Stelle x_0 stetig.

5.2.5 Differentiationsregeln

Mit Hilfe der Differentiationsregeln können Ableitungen komplizierter Funktionen auf Ableitungen von Grundfunktionen zurückgeführt werden.

Im folgenden setzen wir voraus, daß die vorkommenden Funktionen f und g über einem gemeinsamen Bereich differenzierbar sind, der eine Umgebung der Stelle x_0 enthält. Die Beweise der Ableitungsregeln beruhen im wesentlichen auf einer Anwendung der Grenzwertsätze für Funktionen.

5.2.5.1 Faktorregel

Für eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\boxed{(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{(\lambda f)' = \lambda f'} \tag{5.47}$$

Beweis:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\lambda f(x) - \lambda f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \left(\lambda \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = \lambda \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda f'(x_0)$$

5.2.5.2 Summenregel

$$\boxed{(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{(f+g)' = f' + g'} \tag{5.48}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)\end{aligned}$$

Beispiel 5.47

$$P_5(x) = 3x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 1 \Rightarrow P_5'(x) = 3 \cdot 5x^4 - 4 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x = 15x^4 - 12x^2 + 4x$$

5.2.5.3 Produktregel

$$\boxed{(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

bzw.

$$\boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'} \tag{5.49}$$

Beweis:

Eine angepaßte Umformung des Differenzenquotienten ergibt:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{(f(x) - f(x_0))\,g(x) + f(x_0)\,(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}&\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0} \\ &\quad = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) + f(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &\quad = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\end{aligned}$$

Beispiel 5.48

$$f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}\,, \quad f'(x) = 2x\sqrt{x} + (x^2 - 1)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}x\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{für} \quad x > 0$$

5.2.5.4 Quotientenregel

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}}$$

bzw.

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}} \quad \text{für } g(x) \neq 0 \tag{5.50}$$

Der *Beweis* wird mit Hilfe der Produktformel geführt:
Setzt man $\frac{f}{g} = h$ und bildet die Ableitung von $f = g\,h$, so folgt:

$$f' = g'h + gh' = g' \cdot \frac{f}{g} + g\left(\frac{f}{g}\right)', \text{ so daß}$$

$$g\left(\frac{f}{g}\right)' = f' - \frac{g'f}{g} \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{g'f}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Beispiel 5.49

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 5}\,;$$

$$f'(x) = \frac{(2x - 2)(x + 5) - (x^2 - 2x + 3) \cdot 1}{(x + 5)^2} = \frac{x^2 + 10x - 13}{(x + 5)^2}$$

Beispiel 5.50

$$f(x) = \frac{1}{g(x)}\,; \; f'(x) = \frac{0 \cdot g(x) - 1 \cdot g'(x)}{g^2(x)} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \quad \text{mit } g(x) \neq 0$$

Beispiel 5.51

$$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -n\,x^{-n-1}$$

Beweis:

Anwendung der Quotientenregel ergibt:

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -n\frac{x^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1} \cdot x^{-2n} = -nx^{-n-1}$$

Damit gilt die **Potenzregel**

$$\boxed{f(x) = x^m \quad \Rightarrow \quad f'(x) = m\,x^{m-1}} \quad \text{für } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \tag{5.51}$$

5.2.5.5 Ableitung der Umkehrfunktion

Eine Funktion f sei durch die Gleichung

$$y = f(x)$$

definiert. Ist diese eindeutig nach der Variablen x als Funktion f^{-1} von y in der Form

$$x = f^{-1}(y)$$

auflösbar, so bezeichnet man f^{-1} als die **Umkehrfunktion** von f. Beispiele hierfür bilden bei geeigneter Wahl der Bereiche Potenz- und Wurzelfunktionen, Winkelfunktionen und zyklometrische Funktionen sowie Exponential- und Logarithmusfunktionen. Die Eigenschaften von Funktionen und Umkehrfunktionen hängen sehr eng zusammen. Dies betrifft auch deren Ableitungen, die beispielhaft an zwei Fällen untersucht werden.

Die **lineare** Funktion

$$f: \quad y = f(x) = mx + n \qquad \text{mit} \quad m \neq 0$$

führt nach Auflösung der Gleichung zur Umkehrfunktion

$$f^{-1}: \quad x = f^{-1}(y) = \frac{1}{m}y - \frac{n}{m}$$

Beide Funktionen sind differenzierbar:

$$f'(x) = m \quad \text{und} \quad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{m}$$

Die Steigungen sind zueinander reziprok:

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Bei Verwendung der Differentialquotienten

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{dx}{dy}$$

folgt

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Für die **quadratische** Funktion

$$f: \; y = f(x) = x^2 \;\text{ mit }\; x > 0 \;\text{ erhält man}$$
$$f^{-1}: \quad x = \sqrt{y} = f^{-1}(y)$$

Wegen

$$\frac{dy}{dx} = 2x\,, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \;\text{ gilt }\; \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Satz

Die Funktion

$$f: \quad y = f(x)$$

sei differenzierbar in dem Intervall (a, b) mit $f'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b)$. Dann ist auch die Umkehrfunktion

$$f^{-1}: \quad x = f^{-1}(y)$$

differenzierbar in (a, b), und zwar gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \tag{5.52}$$

Beweis:

Man kann zeigen: Aus der Stetigkeit der Funktion f folgt die Stetigkeit der Umkehrfunktion f^{-1}. Daher ergibt sich aus $\Delta x \to 0$ auch $\Delta y \to 0$ und umgekehrt. Mit $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ erhält man

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$$

bzw. mit

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{dx}{dy}$$

schließlich

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

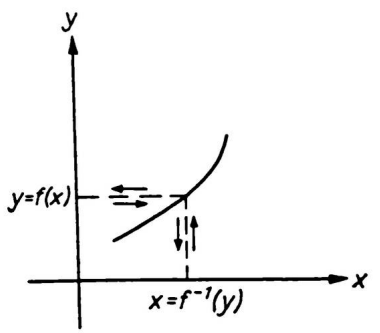


Bild 5.38

Für Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten der Form $\frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ *gilt:*

Die Funktion

$f: \quad y = f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad$ für $\quad x > 0$

ist differenzierbar mit $\quad f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$ (5.53)

Beweis:

$$y = x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow x = y^n$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

5.2.5.6 Kettenregel: Ableitung zusammengesetzter Funktionen

Funktionen setzen sich in der Regel aus mehreren elementaren Funktionen zusammen. Untersucht wird die Frage, ob und wie Ableitungen solcher Funktionen auf Ableitungen einfacher Grundfunktionen zurückgeführt werden können.

Sind $\quad h: \quad z = h(x) \quad$ und $\quad g: \quad y = g(z)$

differenzierbare Funktionen, so entsteht eine **zusammengesetzte, verkettete** oder **mittelbare Funktion** f durch

$$f: \quad y = g(z) = g\,(h(x)) = f(x)$$

Man nennt h **innere** und g **äußere Funktion**.

Wählt man z.B.

$$z = h(x) = 3x + 4 \quad \text{und} \quad y = g(z) = z^5\,,$$

so erhält man

$$f: \quad y = z^5 = (3x + 4)^5 = f(x)$$

Ist umgekehrt

$$y = f(x) = \sqrt{2x^2 - 8}$$

gegeben, so kann f unterschiedlich verkettet sein, z.B. in der Form

$$y = \sqrt{z} \quad \text{mit} \quad z = h(x) = 2x^2 - 8 \quad \text{und} \quad y = g(z) = \sqrt{z}$$

Die inneren und äußeren Funktionen sind differenzierbar. Den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Ableitungen liefert die

Kettenregel

Gegeben sei die **zusammengesetzte** Funktion

$$f: \quad y = f(x) = g\,(h(x)).$$

Sind

$$h: \quad z = h(x) \quad \text{und} \quad g: \quad y = g(z)$$

differenzierbar, so ist auch f differenzierbar, und zwar gilt

$$f'(x) = g'\,(h(x)) \cdot h'(x) = g'(z) \cdot h'(x)$$

oder in der Form der Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \tag{5.54}$$

Die Ableitung einer zusammengesetzten Funktion ist gleich dem Produkt der Ableitungen der äußeren und inneren Funktionen.

Beweis:

Mit Hilfe der Differenzenquotienten der Funktionen g und h

$$\frac{\Delta y}{\Delta z} = \frac{g(z+\Delta z) - g(z)}{\Delta z}, \qquad \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

erhält man

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{g(z+\Delta z) - g(z)}{\Delta z} \cdot \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

als Differenzenquotienten der Funktion f. Die inneren und äußeren Funktionen sind nach Voraussetzung differenzierbar und damit auch stetig, so daß mit $\Delta x \to 0$ auch $\Delta z \to 0$ strebt.

Mit Hilfe des Grenzwertsatzes für Produkte ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{g(z+\Delta z) - g(z)}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x},$$

d.h.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \quad \text{oder} \quad f'(x) = g'(z) \cdot h'(x) = g'\,(h(x)) \cdot h'(x)$$

Die Kettenregel kann auch auf Funktionen angewendet werden, die sich aus mehreren differenzierbaren inneren Funktionen zusammensetzen. Beispielsweise für

$$f: y = f(x) = g\,(h(k(x)))$$

mit $u = k(x)$ und $z = h(u)$ gilt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{oder} \quad f'(x) = g'(z) \cdot h'(u) \cdot k'(x).$$

Beispiel 5.52

$y = (3x^2 + 4)^5$

Mit $z = (3x^2 + 4)$ folgt $y = z^5$.

Wegen $\frac{dz}{dx} = 6x$ und $\frac{dy}{dz} = 5z^4$ ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 5z^4 \cdot 6x = 30(3x^2 + 4)^4 \cdot x$$

Beispiel 5.53

$y = \sqrt{2x^2 - 8}$ sei gegeben. Bilden Sie die Ableitung und geben Sie den Differentiationsbereich an.

Lösung:

a) Für die Ableitung muß $2x^2 - 8 > 0$ sein, d.h. $x^2 > 4$. Der Bereich ist charakterisiert durch $x > 2$ oder $x < -2$.

b) $z = 2x^2 - 8 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{z}$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}}, \quad \frac{dz}{dx} = 4x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{4x}{2\sqrt{z}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 - 8}}$$

Für Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten gilt

$$\boxed{y = f(x) = x^{\frac{n}{m}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m} - 1}} \qquad n, m \in \mathbb{N}^* \tag{5.55}$$

Mit $z = x^{\frac{1}{m}}$ folgt $y = z^n$.

Wegen $\frac{dy}{dz} = nz^{n-1}$ und $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m} - 1}$ ergibt sich

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = nz^{n-1} \cdot \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m} - 1} = \frac{n}{m} \left(x^{\frac{1}{m}} \right)^{n-1} \cdot x^{\frac{1}{m} - 1}$$

$$= \frac{n}{m} x^{\frac{n-1}{m}} x^{\frac{1}{m} - 1} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m} - \frac{1}{m} + \frac{1}{m} - 1} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m} - 1}$$

Aufgaben 5.22 bis 5.28

5.2.6 Ableitungen von Grundfunktionen

Im folgenden werden für die wichtigsten Grundfunktionen die Ableitungen hergeleitet. Dabei werden auch höhere Ableitungen behandelt, die am Beispiel von Polynomen n-ten Grades

$$P_n: \quad y = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{mit } a_n \neq 0$$

erläutert werden. Als erste Ableitung erhält man

$$P_n': \quad P_n'(x) = n a_n x^{n-1} + \ldots + a_1$$

Differenziert man erneut, so spricht man von der zweiten Ableitung, geschrieben

$$P_n'': \quad P_n''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + \ldots + 2a_2$$

Die dritte Ableitung wird durch f''' gekennzeichnet. Für die n-te Ableitung mit $n \geq 4$ schreibt man $f^{(n)}$. In unserem Falle gilt

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots\cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n = n! \cdot a_n$$

Alle höheren Ableitungen sind gleich null. Verwendet man Differentiale, so schreibt man:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \; f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \; f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}, \; \ldots, \; f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

Beispiel 5.54

Die höheren Ableitungen der Funktion $f: f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ lauten:

$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, $f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}$, $f'''(x) = -\frac{3}{8}x^{-\frac{3}{2}}$, ...

5.2.6.1 Trigonometrische Funktionen

Zu den trigonometrischen Funktionen zählen die Funktionen sin, cos, tan und cot, die in Abschn. 1.4.2 definiert wurden.

Satz

Die Funktionen sin und cos sind differenzierbar, und zwar gilt

$$\sin' x = \cos x \quad \text{und} \quad \cos' x = -\sin x \tag{5.56}$$

Beweis:

Ableitung der Sinusfunktion

Mit $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$ wird der Differenzenquotient von sin unter Verwendung eines Additionstheorems für trigonometrische Funktionen umgeformt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\frac{2x+\Delta x}{2}$$

Setzt man $u = \frac{\Delta x}{2}$, so folgt mit $\Delta x \to 0$ auch $\Delta u \to 0$, so daß sich wegen

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

nach (5.28) ergibt

$$\sin' x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\frac{2x+\Delta x}{2} \right)$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\frac{2x+\Delta x}{2} = 1 \cdot \cos x = \cos x$$

Ableitung der Cosinusfunktion

Die Ableitung kann analog zu oben durchgeführt werden, folgt aber unmittelbar auch unter Verwendung der Beziehungen

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{und} \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

mit Hilfe der Kettenregel

$$\cos' x = \sin'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

Satz

Die Funktionen tan und cot sind in ihrem jeweiligen Definitionsbereich differenzierbar, und zwar gilt

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \tag{5.57}$$

$$\cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\left(1 + \cot^2 x\right) \tag{5.58}$$

Beweis:

Ableitung der Tangensfunktion

Wegen $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ und $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ergibt die Anwendung der Quotientenregel

$$\tan' x = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Ableitung der Cotangensfunktion

Wegen $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ folgt z.B. mit Hilfe der Quotientenregel

$$\cot' x = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\left(1 + \cot^2 x\right)$$

5.2.6.2 Zyklometrische Funktionen oder Arcusfunktionen

Die trigonometrischen Funktionen liefern bei Vorgabe eines Winkels x, beispielsweise im Bogenmaß gemessen, die entsprechenden Funktionswerte $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ oder $\cot x$. Oft stellt sich das umgekehrte Problem, bei Vorgabe eines Funktionswertes einen zugehörigen Winkel zu bestimmen. Wegen der periodischen und aufgrund geometrischer Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen ist hier die Lösung in der Regel nicht eindeutig. So hat z.B. die Gleichung

$$\sin x = 0,5$$

die Lösungen

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

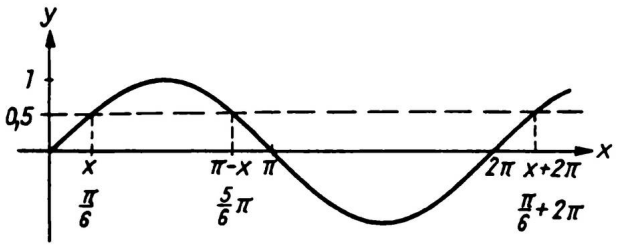


Bild 5.39

Die Eindeutigkeit kann jedoch erreicht werden, indem man die trigonometrischen Funktionen auf Bereiche einschränkt, in denen sie monoton sind. In diesem Falle existieren die Umkehrfunktionen, die man als **zyklometrische Funktionen** oder **Arcusfunktionen** bezeichnet.

Definition und graphische Darstellung dieser Funktionen wurden in Abschn. 1.4.2 behandelt. Die Umkehrfunktion zur Sinusfunktion

$$\sin : y = \sin x,\ X = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ Y = [-1, 1]$$

ist die **Arcussinusfunktion**

$$\arcsin : y = \arcsin x \text{ mit } x = \sin y,\ X = [-1, 1],\ Y = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Im obigen Beispiel folgt aus $\sin x = 0,5$ über die Umkehrfunktion

$$x = \arcsin 0,5 = \frac{\pi}{6}.$$

Satz

Die Funktion arcsin ist über dem Intervall $(-1, 1)$ differenzierbar, und zwar gilt

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{5.59}$$

Beweis:

Mit $y = \arcsin x$ und $x = \sin y$ folgt mit Hilfe der Ableitung der Umkehrfunktion wegen $\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ nach dem Satz (5.52)

$$\arcsin' x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Der Cosinusfunktion in dem Bereich $[0, \pi]$ entspricht als Umkehrfunktion die **Arcuscosinusfunktion**

$$\arccos : \quad y = \arccos x \quad \text{mit} \quad \cos y = x,\ X = [-1, 1],\ Y = [0, \pi].$$

Satz

Die Funktion arccos ist über $(-1,1)$ differenzierbar, und zwar gilt

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{5.60}$$

Beweis:

Mit $y = \arccos x$ und $x = \cos y$ folgt

$$\arccos' x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Die Tangensfunktion

$$\tan: \quad y = \tan x,\ X = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ Y = \mathbb{R}$$

hat als Umkehrfunktion die **Arcustangensfunktion**

$$\arctan: \quad y = \arctan x \quad \text{mit} \quad \tan y = x,\ X = \mathbb{R},\ Y = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Der Cotangensfunktion

$$\cot: \quad y = \cot x,\ X = (0,\pi),\ Y = \mathbb{R}$$

entspricht als Umkehrfunktion die **Arcuscotangensfunktion**

$$\operatorname{arccot}: \quad y = \operatorname{arccot} x \quad \text{mit} \quad \cot y = x,\ X = \mathbb{R},\ Y = (0,\pi)$$

Satz

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \operatorname{arccot}' x = -\frac{1}{1+x^2} \tag{5.61}$$

Beweis:

Mit Hilfe der Ableitung der jeweiligen Umkehrfunktion gilt:

$$\arctan' x = \frac{1}{\tan' y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\operatorname{arccot}' x = \frac{1}{\cot' y} = \frac{1}{-(1+\cot^2 y)} = -\frac{1}{1+x^2}$$

Beispiel 5.55

$$y = \arcsin(3x-4), \quad z = 3x-4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\cdot 3 = \frac{3}{\sqrt{1-(3x-4)^2}}$$

Beispiel 5.56

$$y = \operatorname{arccot} x^2, \quad z = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{1+z^2}\cdot 2x = \frac{-2x}{1+x^4}$$

Beispiel 5.57

$$y = \arctan\left(f'(x)\right)\ ,\quad z = f'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+z^2}\cdot f''(x) = \frac{f''(x)}{1+(f'(x))^2}$$

Aufgaben 5.29 bis 5.31

5.2.6.3 Logarithmusfunktionen

Zunächst wird die Ableitung der **Logarithmusfunktion** ln zur Basis e diskutiert. Anschließend wird das Problem für eine beliebige Basis erörtert.

Satz

Die Funktion $\ln:\quad y = \ln x \quad$ für $\quad x > 0 \quad$ ist differenzierbar, und zwar gilt

$$\ln' x = \frac{1}{x} \tag{5.62}$$

Beweis:

Bei den Umformungen werden Regeln der Logarithmenrechnung verwendet. Ferner wird der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

zugrunde gelegt.

Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left(\ln(x+\Delta x) - \ln x\right) = \frac{1}{\Delta x}\ln\frac{x+\Delta x}{x} = \frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

Setzt man $\dfrac{\Delta x}{x} = \dfrac{1}{n^*}$, so folgt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{n^*}\right)^{n^*}$$

Beachtet man $n^* \to \infty$ für $\Delta x \to 0$ und die Stetigkeit der ln-Funktion, so ergibt sich

$$\ln' x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{n^*\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n^*}\right)^{n^*}$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{n^*\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^*}\right)^{n^*}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(\lim_{n^*\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^*}\right)^{n^*}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\ln\mathrm{e} = \frac{1}{x}$$

wegen $\lim\limits_{n^* \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n^*}\right)^{n^*} = e$ (vgl. (5.84))

Beispiel 5.58

$$y = \ln(ax) \quad \Rightarrow \quad \ln'(ax) = \frac{1}{x} \quad \text{für } ax > 0$$

Beweis:

Anwendung der Kettenregel mit $z = ax$ ergibt $(y = \ln z)$

$$\ln'(ax) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} \cdot a = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$$

Beispiel 5.59

$$\ln'|x| = \frac{1}{x} \quad \text{für} \quad x \neq 0$$

wegen $\ln' x = \frac{1}{x}$ für $x > 0$ und $\ln'(-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$ für $x < 0$

Beispiel 5.60

$$y = \ln(f(x)) \text{ für } f(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \ln'(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Anwendung der Kettenregel mit $z = f(x)$ ergibt

$$\ln'(f(x)) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Beispiel 5.61

Ableiten nach Logarithmieren

Differenzierbare Funktionen der Form

$f: \quad y = f(x) = (h(x))^{g(x)}$

können in der Regel am besten abgeleitet werden, indem man zuerst logarithmiert und dann differenziert:

$\ln y = \ln(f(x)) = g(x) \cdot \ln(h(x)) \quad$ für $\quad y > 0$ und $h(x) > 0$

Die Ableitung ergibt

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x) \cdot \ln(h(x)) + g(x) \cdot \frac{1}{h(x)} \cdot h'(x)$$

bzw.

$$f'(x) = f(x)\left(g'(x) \cdot \ln(h(x) + \frac{g(x)}{h(x)} \cdot h'(x)\right)$$

Setzt man beispielsweise $f(x) = x^{\cos x}$, so folgt $(x > 0)$

$\ln f(x) = \cos x \cdot \ln x$ mit der Ableitung

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\sin x \cdot \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x}, \text{ so daß}$$

$$f'(x) = x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \cdot \ln x\right)$$

Für die Logarithmusfunktion zur beliebigen Basis a

$$f: \quad f(x) = \log_a x \quad \text{mit} \quad a > 0,\ a \neq 1 \text{ und } x > 0$$

gilt

$$\boxed{\log_a' x = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x} \cdot \log_a \mathrm{e}} \tag{5.63}$$

Wegen der Beziehung (vgl. (1.25))

$$\ln x = \ln a \cdot \log_a x \quad \text{und speziell} \quad \ln \mathrm{e} = 1 = \ln a \cdot \log_a \mathrm{e}$$

folgt unmittelbar

$$\log_a' x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln' x = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x} \log_a \mathrm{e}$$

5.2.6.4 Exponentialfunktionen

Unter einer **Exponentialfunktion zur Basis** a verstehen wir eine Funktion

$$f: \quad y = f(x) = a^x \quad \text{mit} \quad a > 0 \text{ und } a \neq 1$$

Da f echt monoton ist, existiert die Umkehrfunktion, die **Logarithmusfunktion** $\log_a$ **zur Basis** a heißt (vgl. 1.3.3.4):

$$y = \log_a x \quad \text{mit} \quad a^y = x$$

Satz

$$\boxed{y = f(x) = \mathrm{e}^x \Rightarrow f'(x) = \mathrm{e}^x} \tag{5.64}$$

Beweis:

Mit $y = \mathrm{e}^x$ und $x = \ln y$ folgt unmittelbar die Ableitung der Umkehrfunktion

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = \mathrm{e}^x$$

Satz

$$\boxed{y = f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a} \quad \text{für } a > 0 \text{ und } a \neq 1 \tag{5.65}$$

Beweis:

Mit $a = \mathrm{e}^{\ln a}$ ergibt sich $y = \left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^x = \mathrm{e}^{x \cdot \ln a}$.

Mit Hilfe der Kettenregel erhält man

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \mathrm{e}^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

Die Formel kann auch ohne den Weg über die Umkehrfunktion hergeleitet werden, indem man logarithmiert und dann differenziert:

$$\ln y = x \cdot \ln a, \quad \frac{1}{y} \cdot y' = \ln a, \text{ so daß } y' = y \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

mit $y' = \frac{dy}{dx}$.

5.2.6.5 Potenzfunktionen mit beliebigen Exponenten

Die Regel für die Ableitung einer Potenz mit rationalem Exponenten kann sogar auf beliebige Exponenten erweitert werden.

Satz

$$\boxed{y = f(x) = x^\alpha \Rightarrow f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}} \quad \text{für } x > 0 \text{ und } \alpha \in \mathbb{R} \tag{5.66}$$

Beweis:

Man logarithmiert und differenziert: $\left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$

$$\ln y = \alpha \cdot \ln x\,, \quad \frac{1}{y} \cdot y' = \alpha \cdot \frac{1}{x}\,, \quad y' = \alpha \frac{1}{x} \cdot x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

Diese Regel umfaßt Ableitungen von Potenzen mit

natürlichem Exponenten: $y = x^n\,, \quad y' = nx^{n-1}$

echt gebrochenrationalem Exponenten: $y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}\,, \quad y' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

rationalem Exponenten: $y = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[n]{x^n}\,, \quad y' = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$

beliebigem Exponenten: $y = x^\alpha\,, \quad y' = \alpha x^{\alpha-1}$

Mit $\alpha = \pi$ folgt: $y = x^\pi\,, \quad y' = \pi x^{\pi-1}$

Beispiel 5.62

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{(2x+3)^5}} = \frac{1}{(2x+3)^{\frac{5}{4}}} = (2x+3)^{-\frac{5}{4}}$$

$$f'(x) = -\frac{5}{4}(2x+3)^{-\frac{9}{4}} \cdot 2 = -\frac{5}{2 \cdot \sqrt[4]{(2x+3)^9}} = \frac{-5}{2(2x+3)^2\sqrt[4]{2x+3}}$$

Aufgaben 5.32 bis 5.40

5.2.6.6 Hyperbelfunktionen

Bei technischen und naturwissenschaftlichen Anwendungen verwendet man zum Teil bestimmte Linearkombinationen von Exponentialfunktionen, die in Analogie zu den trigonometrischen Funktionen gewisse ausgezeichnete Eigenschaften aufweisen. Da auch ein Zusammenhang mit der Einheitshyperbel besteht, spricht man von Hyperbelsinus, Hyperbeltangens usw., allgemein von Hyperbelfunktionen.

Definition

Hyperbelsinus oder Sinus hyperbolicus

$$y = \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und mit } y \in \mathbb{R}$$

Hyperbelcosinus oder Cosinus hyperbolicus (5.67)

$$y = \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und mit } y \in [1, \infty)$$

Hyperbeltangens oder Tangens hyperbolicus

$$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und mit } y \in (-1, 1)$$

Hyperbelcotangens oder Cotangens hyperbolicus

$$y = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus 0 \text{ und mit } y \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

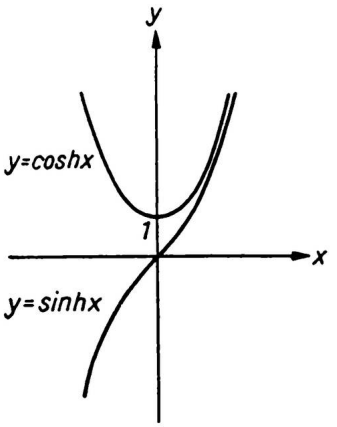


Bild 5.40

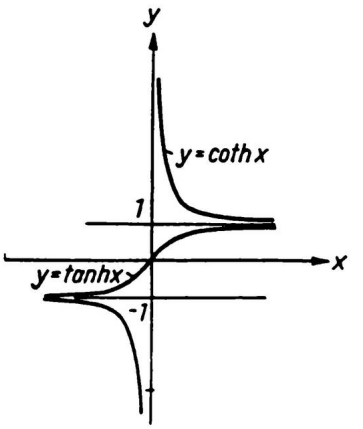


Bild 5.41

Die Hyperbelfunktionen erfüllen folgende Beziehungen:

a) Symmetrieeigenschaft

$$\sinh(-x) = -\sinh x \qquad \tanh(-x) = -\tanh x$$
$$\cosh(-x) = \cosh x \qquad \coth(-x) = -\coth x$$

b) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

c) Additionstheoreme

$$\sinh(u \pm v) = \sinh u \cosh v \pm \cosh u \sinh v$$
$$\cosh(u \pm v) = \cosh u \cosh v \pm \sinh u \sinh v \qquad (5.68)$$

Satz

Die Hyperbelfunktionen sind differenzierbar, und zwar gilt

$$\begin{aligned} \sinh' x &= \cosh x & \cosh' x &= \sinh x & &\text{für } x \in \mathbb{R} \\ \tanh' x &= \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x & & & &\text{für } x \in \mathbb{R} \\ \coth' x &= -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x & & & &\text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned} \tag{5.69}$$

Beweis:

Der Beweis wird nur für den Hyperbelsinus geführt:

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right): \quad \sinh' x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh x$$

Beispiel 5.63

$$f(x) = \sinh^2(2x): \quad f'(x) = 2 \cdot \sinh(2x) \cdot \cosh(2x) \cdot 2 = 2 \cdot \sinh(4x)$$

5.2.6.7 Areafunktionen

Die Hyperbelfunktionen sind bis auf den Hyperbelcosinus echt monoton steigend, so daß die jeweilige Umkehrfunktion existiert. Dies gilt auch für den Hyperbelcosinus, falls man den Bereich entsprechend auf $[0, \infty)$ einschränkt. Die so entstehenden Funktionen heißen **Areafunktionen**. Die Graphen erhält man durch Spiegeln der Graphen der Hyperbelfunktionen an der Winkelhalbierenden.

Definition

Die Umkehrfunktion vom Hyperbelsinus sinh heißt **Areasinus** arsinh:

$$y = \operatorname{arsinh} x \quad \text{mit} \quad x = \sinh y \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } y \in \mathbb{R}$$

Die Umkehrfunktion vom Hyperbelcosinus cosh heißt **Areacosinus** arcosh:

$$y = \operatorname{arcosh} x \quad \text{mit} \quad x = \cosh y \quad \text{für } x \in [1, \infty) \text{ und } y \in [0, \infty) \tag{5.70}$$

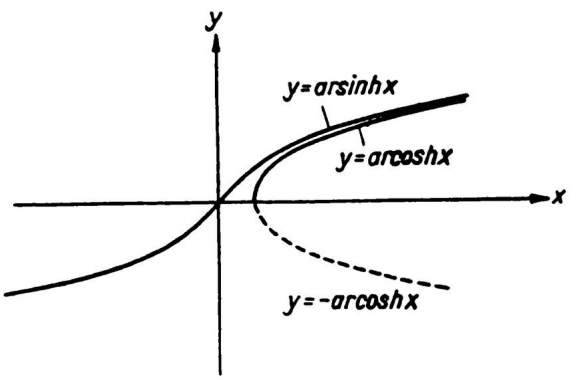


Bild 5.42

Definition

Dem Hyperbeltangens tanh entspricht als Umkehrfunktion der **Areatangens** artanh:

$y = \operatorname{artanh} x \quad \text{mit} \quad x = \tanh y \quad \text{für} \quad x \in (-1,1) \text{ und } y \in \mathbb{R}$

Dem Hyperbelcotangens coth entspricht als Umkehrfunktion der **Areacotangens** arcoth:

$y = \operatorname{arcoth} x \quad \text{mit} \quad x = \coth y \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1] \text{ und } y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad (5.71)$

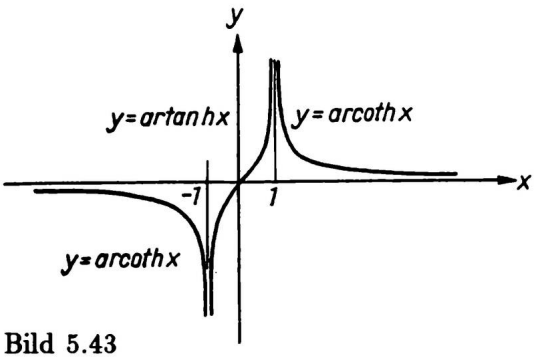


Bild 5.43

Die Charakterisierung der Areafunktionen erfordert einige Rechnungen, die beispielhaft für den Areasinus durchgeführt werden:

$$y = \operatorname{arsinh} x \quad \text{mit} \quad x = \sinh y$$

führt zu

$$x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}\right)$$

Multiplikation mit $2\mathrm{e}^{y}$ ergibt

$$2x\mathrm{e}^{y} = (\mathrm{e}^{y})^{2} - 1$$

bzw.

$$(\mathrm{e}^{y})^{2} - 2x\mathrm{e}^{y} - 1 = 0$$

mit der Lösung

$$\mathrm{e}^{y} = x + \sqrt{x^{2}+1}$$

Die zweite mögliche Lösung scheidet wegen $\mathrm{e}^{y} < 0$ aus.

Logarithmieren ergibt

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^{2}+1}\right)$$

Insgesamt gilt folgender

Satz

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arsinh} x &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) && \text{für } x \in \mathbb{R} \\
\operatorname{arcosh} x &= \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) && \text{für } x \in [1,\infty) \\
\operatorname{artanh} x &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} && \text{für } x \in (-1,1) \\
\operatorname{arcoth} x &= \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} && \text{für } x \in \mathbb{R}\setminus[-1,1]
\end{aligned}
\tag{5.72}
$$

Die Areafunktionen sind differenzierbar. Für die Ableitungen folgt der

Satz

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arsinh}' x &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} && \text{für } x \in \mathbb{R} \\
\operatorname{arcosh}' x &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} && \text{für } x \in (1,\infty) \\
\operatorname{artanh}' x &= \frac{1}{1-x^2} && \text{für } x \in (-1,1) \\
\operatorname{arcoth}' x &= \frac{1}{1-x^2} && \text{für } x \in \mathbb{R}\setminus[-1,1]
\end{aligned}
\tag{5.73}
$$

Beweis für arsinh:

$$y = \operatorname{arsinh} x: \quad x = \sinh y, \quad \frac{dx}{dy} = \cosh y$$

$$\operatorname{arsinh}' x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Aufgaben 5.41 bis 5.43

5.2.7 Extremwerte und Mittelwertsätze der Differentialrechnung

Bei Vorgabe differenzierbarer Funktionen kann mit Hilfe der Ableitung auf das Steigungsverhalten geschlossen werden. Nun sollen umgekehrt von der Ableitung Rückschlüsse auf das Funktionsverhalten gezogen werden. In diesem Zusammenhang werden Kriterien für die Existenz von Extrempunkten von Kurven und Regeln für die Berechnung uneigentlicher Grenzwerte von Funktionen entwickelt. Mathematische Grundlage hierfür bilden Mittelwertsätze, die Zusammenhänge zwischen Tangenten und Sekanten liefern und wesentlich in die Beweistechnik einfließen.

5.2.7.1 Extremwerte von Funktionen

Funktionsgraphen werden in der Regel durch ausgezeichnete Punkte charakterisiert, z.B. durch Extrempunkte, die Hoch- oder Tiefpunkte einschließen, deren anschauliche Bedeutung offensichtlich ist.

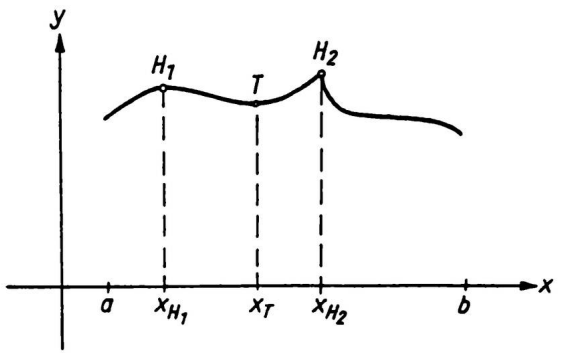


Bild 5.44

Definition

Die Funktion $f: y = f(x)$ mit Definitionsbereich X hat an der Stelle x_H ein **relatives oder lokales Maximum**, falls für alle $x \in U(x_H) \subset X$ einer Umgebung $U(x_H)$ gilt:

$$f(x) \leq f(x_H)$$

Die Funktion f hat an der Stelle x_T ein **relatives oder lokales Minimum**, falls für alle $x \in U(x_T) \subset X$ gilt:

$$f(x) \geq f(x_T) \tag{5.74}$$

Man nennt x_H bzw. x_T eine **relative Maximum- bzw. Minimumstelle**. $f(x_H)$ bzw. $f(x_T)$ heißt auch **relativer maximaler bzw. minimaler Funktionswert**, allgemein **relativer extremaler Funktionswert**.

Die Punkte $H(x_H; f(x_H))$ und $T(x_T; f(x_T))$ heißen **Hoch- bzw. Tiefpunkt** oder allgemein **Extrempunkte**.

Diese Begriffe sind nicht an die Differenzierbarkeit von Funktionen gebunden, gelten also auch für Funktionen, die an einzelnen Stellen nicht differenzierbar sind. Beispiele hierfür sind Spitzen von Graphen. Ein wichtiges Kriterium für die Existenz von Extremwerten liefert der

Satz (Notwendiges Kriterium für die Existenz von Extremwerten)

Hat die differenzierbare Funktion $f: y = f(x)$ mit dem Definitionsbereich (a, b) an der Stelle $x_E \in (a, b)$ ein lokales Extremum, also ein Maximum oder Minimum, so gilt:

$$f'(x_E) = 0 \tag{5.75}$$

Beweis:

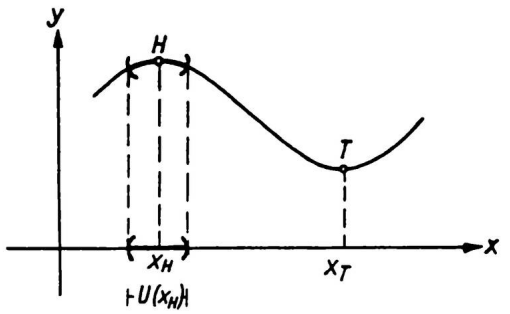


Bild 5.45

Der Beweis wird für ein lokales Maximum geführt.

In einer Umgebung $U(x_H)$ ist $f(x) \leq f(x_H)$ für alle $x \in U(x_H)$.

Als links- bzw. rechtsseitigen Differenzenquotienten erhält man

für $x < x_H$ mit $x - x_H < 0$ und $f(x) - f(x_H) < 0$

$$\frac{f(x) - f(x_H)}{x - x_H} > 0,$$

für $x > x_H$ mit $x - x_H > 0$ und $f(x) - f(x_H) < 0$

$$\frac{f(x) - f(x_H)}{x - x_H} < 0$$

Für die links- bzw. rechtsseitige Ableitung folgt

$$f'(x_H - 0) = \lim_{x \to x_H - 0} \frac{f(x) - f(x_H)}{x - x_H} \geq 0$$

$$f'(x_H + 0) = \lim_{x \to x_H + 0} \frac{f(x) - f(x_H)}{x - x_H} \leq 0$$

Wegen der vorausgesetzten Differenzierbarkeit müssen links- und rechtsseitige Ableitungen übereinstimmen und gleich der Ableitung an dieser Stelle sein, so daß folgt

$$f'(x_H - 0) = f'(x_H + 0) = f'(x_H) = 0$$

Beispiel 5.64

Die Funktion $f: \quad y = f(x) = x^2 + 2x + 4$ definiert eine quadratische Parabel mit Scheitelpunkt, der ein Extrempunkt ist. Die Koordinaten dieses Punktes erhält man aus der Bedingung

$f'(x_E) = 2x_E + 2 = 0: \quad x_E = -1$ und $y_E = f(-1) = 3$

Man beachte, daß die Bedingung $f'(x) = 0$ zwar notwendig für die Existenz eines Extremums ist, aber allein nicht ausreichend ist. So ist z.B. für die Funktion $f: \quad f(x) = x^3$ zwar auch $f'(0) = 0$, es liegt aber kein Extremum vor.

Die Frage nach der Existenz von Extremwerten stetiger Funktionen beantwortet der

Satz von Weierstraß

Ist eine Funktion f über dem **abgeschlossenen Intervall** $[a, b]$ **stetig**, so nimmt f über diesem Intervall mindestens einen maximalen und einen minimalen Wert an. (5.76)

Der analytische Beweis wird hier nicht geführt. Anschaulich erscheint die Aussage plausibel. Dabei kann ein Extremwert auch am Rande des Intervalls liegen.
Die Abgeschlossenheit des Intervalls ist unbedingt notwendig. So ist beispielsweise die Funktion $f : y = f(x) = \frac{1}{x}$ über dem halboffenen Intervall $(0, b]$ stetig, aber nach oben nicht beschränkt, so daß kein Maximum existiert.

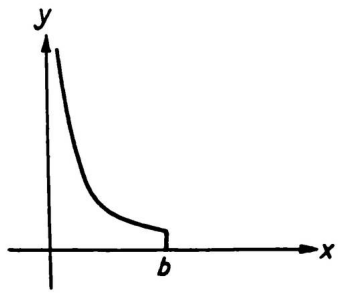


Bild 5.46

5.2.7.2 Mittelwertsätze der Differentialrechnung

Zwischen Tangenten und Sekanten sowie den entsprechenden Differential- und Differenzenquotienten besteht ein enger Zusammenhang, der in den Mittelwertsätzen der Analysis beschrieben wird.

Aus den Eigenschaften von Funktionen und Extremwerten folgt zunächst unmittelbar der

Satz von Rolle

Eine Funktion f sei
über dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig mit $f(a) = f(b)$ und
über dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar.
Dann existiert mindestens eine Stelle $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$ (5.77)

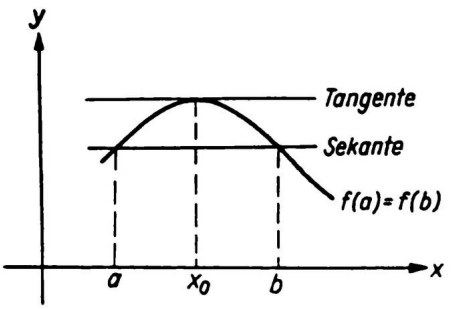


Bild 5.47

Beweis:

1.) Ist f konstant, so folgt offensichtlich $f'(x) = 0$.

2.) Ist f nicht konstant, so existieren nach dem Satz von Weierstraß mindestens ein größter und ein kleinster Funktionswert. Diese Werte sind verschieden, da f nicht konstant ist. Mindestens einer der beiden Extremwerte ist daher ungleich $f(a) = f(b)$. Folglich liegt eine Extremstelle x_0 im Innern des Intervalles. Aufgrund des notwendigen Kriteriums über die Existenz von Extremwerten differenzierbarer Funktionen folgt $f'(x_0) = 0$.

Bisher wurde gezeigt, daß unter geeigneten Voraussetzungen zu einer horizontalen Sekante auch eine horizontale Tangente existiert. Dieses geometrische Problem kann verallgemeinert werden. Es stellt sich die Frage, ob zu einer schrägen Sekante eine entsprechende Tangente mit derselben Steigung konstruiert werden kann.

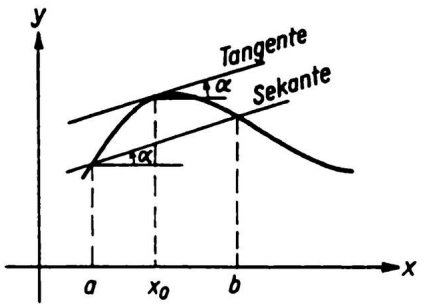


Bild 5.48

Die Antwort liefert der

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Ist die Funktion $f: y = f(x)$ über dem Intervall $[a, b]$ stetig und über (a, b) differenzierbar, so existiert eine Stelle $x_0 \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0) \tag{5.78}$$

Beweis:

Das Problem wird über eine Hilfsfunktion so definiert, daß der Satz von Rolle angewandt werden kann. Dazu leitet man zunächst die Gleichung der Sekante her:

$$y = g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Bildet man als Hilfsfunktion die Differenzfunktion

$$h: \quad h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a),$$

so gilt $h(a) = h(b) = 0$. Ferner ist h differenzierbar auf (a, b) und stetig auf $[a, b]$. Damit sind die Voraussetzungen des Satzes von Rolle gegeben, d.h., es existiert eine Stelle $x_0 \in (a, b)$ mit $h'(x_0) = 0$, so daß

$$h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0, \text{ also } f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Beispiel 5.65

Gegeben sei $f(x) = \sin x$. In welchem Punkt $B(x_B; y_B)$ berührt die Tangente die Kurve, die dieselbe Steigung hat wie die Sekante durch die Punkte $P_1(0;0)$ und $P_2(\frac{\pi}{2};1)$?

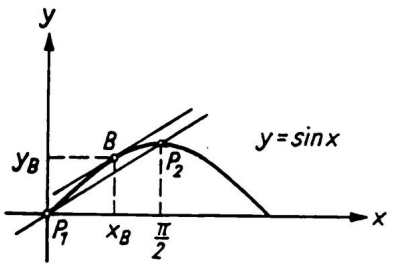


Bild 5.49

Lösung:

Steigung der Sekante: $m = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \dfrac{2}{\pi}$

Steigung der Kurve im Punkt $B(x_B; y_B)$: $f'(x_B) = \cos x_B = \dfrac{2}{\pi}$

Daraus folgt: $x_B = \arccos\dfrac{2}{\pi} = 0,88$ und $f(x_B) = f(0,88) = 0,77$

Berührpunkt: $B(0,88\ ;\ 0,77)$

Gleichung der Tangente: $y = \dfrac{2}{\pi}(x - 0,88) + 0,77$

Eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes liefert der

Erweiterte Mittelwertsatz

Sind die Funktionen $f:\ u = f(x)$ und $g:\ v = g(x)$ über dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetig und über dem offenen Intervall (a,b) differenzierbar und gilt $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$, so existiert mindestens eine Stelle $x_0 \in (a,b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \tag{5.79}$$

Beweis:

Wegen $g'(x) \neq 0$ ist g umkehrbar. Die Auflösung der Gleichung $v = g(x)$ nach x ergibt die Umkehrfunktion

$$g^{-1}:\quad x = g^{-1}(v)\,.$$

Führt man auch in f die neue Variable v ein, so erhält man eine zusammengesetzte Funktion

$$h:\quad u = f(x) = f(g^{-1}(v)) = h(v)$$

Als Ableitung ergibt sich mit Hilfe der Kettenregel

$$h'(v) = \frac{du}{dv} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} = f'(x) \cdot \frac{1}{\frac{dv}{dx}} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Wendet man auf die Funktion

$$h: \quad u = h(v) \quad \text{mit} \quad v_1 = g(a) \text{ und } v_2 = g(b)$$

den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an, so existiert eine Stelle $v_0 \in (v_1, v_2)$ mit

$$\frac{h(v_2) - h(v_1)}{v_2 - v_1} = h'(v_0)$$

Daraus folgt mit $x_0 = g^{-1}(v_0)$, $h(v) = f(x)$ und $v = g(x)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

5.2.8 Uneigentliche Grenzwerte: Regel von Bernoulli und de l'Hospital

Bei der Untersuchung von Grenzwerten von Funktionen spielen Quotienten der Form $\frac{f(x)}{g(x)}$ eine besondere Rolle. Dies gilt insbesondere für den Fall, daß Zähler- und Nennerterme dieselbe Nullstelle x_0 haben. Dann macht der unbestimmte Ausdruck $\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{0}{0}$ keinen Sinn. Man kann jedoch den Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ des Quotienten untersuchen, bei dem Zähler und Nenner gegen Null streben. Dabei sind im allgemeinen geeignete Termumformungen erforderlich. So hat z.B. die Funktion

$$f: \quad y = f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$$

im Zähler und Nenner dieselbe Nullstelle $x_0 = -2$.

Dennoch existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x + 2)^2}{x + 2} = \lim_{x \to -2} (x + 2) = 0$$

Solche Grenzwertberechnungen können auch mit Hilfe von Ableitungen der Zähler- und Nennerfunktionen durchgeführt werden. Die entsprechende Regel wird als Anwendung des erweiterten Mittelwertsatzes hergeleitet.

Regel von Bernoulli und de l'Hospital

Sind die Funktionen

$$f: \quad u = f(x) \quad \text{und} \quad g: \quad v = g(x)$$

auf einer Umgebung $U(x_0)$ der Stelle x_0 differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in U(x_0)$ und ist x_0 eine Nullstelle von f und g mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$, so gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

sofern der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.
Analog folgt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{5.80}$$

Beweis:

Die Funktionen erfüllen die Voraussetzungen des erweiterten Mittelwertsatzes. Für jedes $x \in U(x_0)$ existiert ein x_m mit $x_m \in (x_0, x)$, so daß

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(x_m)}{g'(x_m)}$$

Wegen $f(x_0) = 0$ und $g(x_0) = 0$ folgt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

da mit $x \to x_0$ auch $x_m \to x_0$ strebt.

Im Falle $x \to \infty$ setzt man $x = \dfrac{1}{z}$ und erhält mit Hilfe der Kettenregel

$$u = f\left(\frac{1}{z}\right) \text{ mit der Ableitung } \frac{du}{dz} = f'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right) \quad \text{und}$$

$$v = g\left(\frac{1}{z}\right) \text{ mit der Ableitung } \frac{dv}{dz} = g'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right),$$

so daß

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z \to 0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z \to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bemerkung

Ist im obigen Fall auch $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$, so wird die Regel erneut auf den Quotienten angewandt. Ist man nach n-maliger Anwendung erfolgreich, so ergibt sich als Regel

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}} \tag{5.81}$$

wobei $f^{(n)}$ und $g^{(n)}$ die n-ten Ableitungen der Funktionen bedeuten.

Typ $\frac{0}{0}$

Beispiel 5.66

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{2x - 4}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

Beispiel 5.67

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Beispiel 5.68

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

Typ $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha - 1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0 \quad \text{für } \alpha > 0.$$

Eine beliebige Potenz x^α für positiven reellen Exponenten α wächst für $x \to \infty$ stärker als die Logarithmusfunktion ln:

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0} \quad \text{für } \alpha > 0 \tag{5.82}$$

Für die Funktion f : $f(x) = \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x}$ erhält man nach mehrfacher Anwendung der Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{n x^{n-1}}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{\mathrm{e}^x} = \ldots = \lim_{x \to \infty} \frac{n!}{\mathrm{e}^x} = 0$$

Die Exponentialfunktion e^x wächst stärker als jede Potenz von x:

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}^* \tag{5.83}$$

Weitere Grenzwertfälle können auf den Typ $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ zurückgeführt werden.

Vom Typ $\infty - \infty$ zum Typ $\frac{0}{0}$

Ein Beispiel hierfür liefert die Funktion f : $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$ für $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

Da hier die Ableitung wieder vom Typ $\frac{0}{0}$ ist, muß nochmals die Regel von de l'Hospital angewandt werden.

Vom Typ $0\cdot(\pm\infty)$ zum Typ $\frac{\pm\infty}{\infty}$

Ein Verhalten vom Typ $0\cdot(-\infty)$ zeigt z.B. $f(x)=x\cdot\ln x$ für $x\to+0$. Indem man das Produkt als Quotienten darstellt, erhält man unter Verwendung der Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x\to+0}(x\cdot\ln x)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0$$

Vom Typ 0^0 zum Typ $e^{0\cdot(\pm\infty)}$

Hierzu wird als Beispiel das Verhalten von $f(x)=x^x$ für $x\to+0$ untersucht. Die Umformung erfolgt mit Hilfe einer Darstellung zur Basis e:

$$\lim_{x\to+0}x^x=\lim_{x\to+0}e^{\ln(x^x)}=\lim_{x\to+0}e^{x\cdot\ln x}=e^0=1$$

Vom Typ 1^∞ zum Typ $e^{0\cdot\infty}$

Zu bestimmen sei z.B. der Grenzwert von $f(x)=\left(1+\frac{\mu}{x}\right)^x$ für $\mu\in\mathbb{R}^+$ und $x\to\infty$ mit $x\in\mathbb{R}^+$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\mu}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{\mu}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\ln\left(1+\frac{\mu}{x}\right)\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\mu}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{\mu}{x}}\cdot\frac{-\mu}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mu}{1+\frac{\mu}{x}}}=e^\mu$$

Für $\mu=1$ folgt: $$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e} \tag{5.84}$$

Vom Typ ∞^0 zum Typ $e^{0\cdot(\pm\infty)}$

Das Verfahren wird an einem Beispiel erläutert:

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=\lim_{x\to+0}e^{\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\left(\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}\right)}$$

Wegen $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{x\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x-x\cdot\sin x}=0$

folgt $\lim\limits_{x \to +0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1$

Eine Übersicht über die Umformungen der verschiedenen Grenzwertfälle, die oben beispielhaft durchgeführt wurden, liefert die Tabelle:

Typ	$f(x) \to$	$g(x) \to$	Umformung
$\infty - \infty$	0	0	$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{g(x) - f(x)}{f(x) \cdot g(x)} \to \frac{0}{0}$
$0 \cdot \infty$	0	∞	$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \to \frac{0}{0}$ oder $f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \to \frac{\infty}{\infty}$
0^0	0	0	$(f(x))^{g(x)} = e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \to e^{0 \cdot \infty}$ mit $f(x) > 0$
1^∞	1	∞	
∞^0	∞	0	

Aufgaben 5.44 bis 5.46

5.2.9 Extrem- und Wendepunkte

5.2.9.1 Monotonie- und Krümmungsverhalten

Der Definitionsbereich einer Funktion setzt sich in der Regel aus Bereichen zusammen, über denen die Funktion jeweils **monoton steigt oder fällt** (vgl. 1.3.2.3). Die zugehörigen Kurvenbögen nennt man **Monotoniebögen**. Das Monotonieverhalten differenzierbarer Funktionen kann mit Hilfe der Ableitungen beschrieben werden.

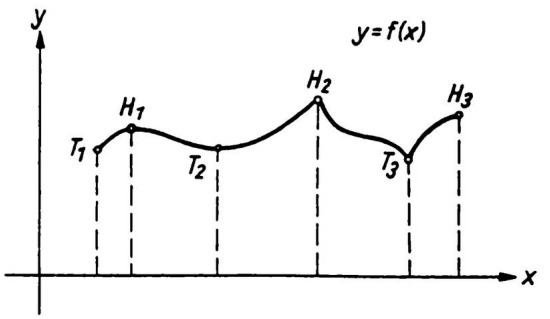


Bild 5.50

Für die streng monoton steigende Funktion

$$f: \quad f(x) = x^5 \quad \text{gilt} \quad f'(x) = 5x^4 \geq 0\,,$$

während für die über $(0, \infty)$ streng monoton fallende Funktion

$$g: \quad g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{die Ableitung} \quad g'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

ist.

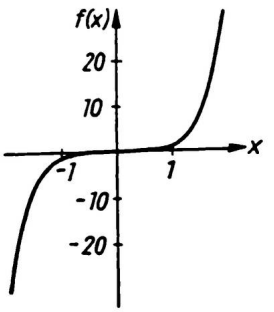


Bild 5.51

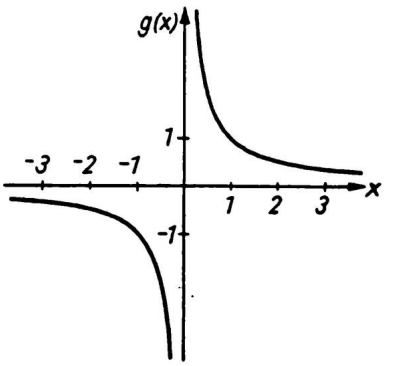


Bild 5.52

Ist eine Funktion f über einem Intervall J streng monoton steigend, so ist $f(x) > f(x_0)$ für alle x und $x_0 \in J$ mit $x > x_0$. Folglich ist der Differenzenquotient $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$.

Als Ableitung erhält man $f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$. Sie kann an einzelnen Stellen gleich null sein. Umgekehrt kann aus der Ableitung f' auf die Monotonie geschlossen werden.

Satz

Die Funktion f sei über dem Intervall $[a, b]$ stetig und über (a, b) differenzierbar.

a) Ist die Funktion f über $[a, b]$

streng monoton steigend bzw. **streng monoton fallend**,

so gilt für alle $x \in (a, b)$

$f'(x) \geq 0$ bzw. $f'(x) \leq 0$

b) Ist für alle $x \in (a, b)$ (5.85)

$f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$,

so ist die Funktion f über $[a, b]$

streng monoton steigend bzw. **streng monoton fallend**.

Beweis:

Der Beweis von a) wurde oben angedeutet. Von b) wird beispielhaft $f'(x) < 0$ behandelt.

Für zwei beliebige Werte x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$ aus $[a, b]$ existiert nach dem Mittelwertsatz (5.78) eine Stelle $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Wegen $f'(x_0) < 0$ folgt $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ und zusammen mit $x_2 - x_1 > 0$ schließlich $f(x_2) - f(x_1) < 0$, d.h. $f(x_2) < f(x_1)$ für $x_2 > x_1$, so daß f streng monoton fallend ist.

Beispiel 5.69

Steigungsverhalten der Funktion f: $f(x) = \cos x$ für $x \in [0, 2\pi]$

$f'(x) = -\sin x > 0$ für $x \in (\pi, 2\pi)$

$f'(x) = -\sin x < 0$ für $x \in (0, \pi)$

Die Funktion cos ist folglich über $[0, \pi]$ streng monoton fallend und über $[\pi, 2\pi]$ streng monoton steigend.

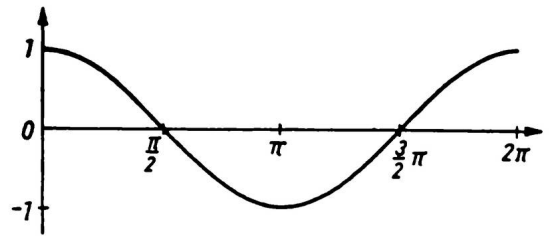


Bild 5.53

Die Art der Monotonie von Funktionen oder Kurven kann sehr unterschiedlich sein.

f: $f(x) = x^4$
mit $f'(x) = 4x^3 > 0$ für $x > 0$

Linkskrümmung
konvexer Bogen

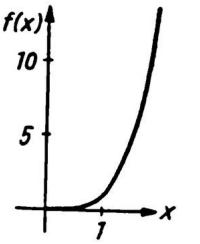


Bild 5.54

g: $g(x) = \sqrt{x}$
mit $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ für $x > 0$

Rechtskrümmung
konkaver Bogen

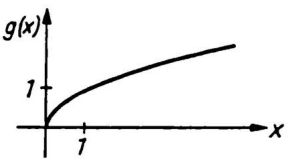


Bild 5.55

Im Falle der Funktion f nimmt die Steigung mit wachsenden Werten von x zu, d.h., die Ableitungsfunktion f' ist streng monoton steigend. Bei der Funktion g hingegen nehmen die Steigungen mit wachsendem x ab, d.h., die Ableitungsfunktion g' ist streng monoton fallend. Die zugehörige **Kurve** nennt man jeweils **linksgekrümmt** bzw. **rechtsgekrümmt**. Man spricht auch von **Links- oder Rechtskurve**.

Definition

Der Graph einer differenzierbaren Funktion $f\colon\ y = f(x)$ über einem Intervall J heißt **linksgekrümmt**, wenn die Steigung der Kurve für wachsende Werte von $x \in J$ streng monoton zunimmt, und **rechtsgekrümmt**, wenn die Steigung der Kurve für wachsende Werte von $x \in J$ streng monoton abnimmt. (5.86)

Eine linksgekrümmte Kurve (Linkskurve) ist dadurch gekennzeichnet, daß die Tangente in jedem Punkt der Kurve unterhalb dieser liegt. Bei einer rechtsgekrümmten Kurve (Rechtskurve) liegen die Tangenten jeweils oberhalb der Kurve.

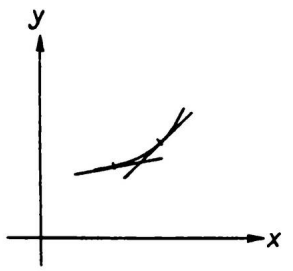


Bild 5.56

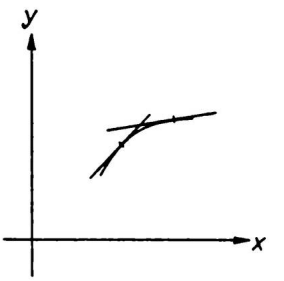


Bild 5.57

Diese geometrisch plausible Betrachtung kann auch analytisch mit Hilfe des Mittelwertsatzes untermauert werden. Hierauf wird jedoch nicht eingegangen. Als Folgerung ergibt sich die zu (5.86) äquivalente

Definition

Der Graph einer differenzierbaren Funktion über einem Intervall J ist

linksgekrümmt bzw. **rechtsgekrümmt**,

wenn die Tangente in jedem Punkt der Kurve

unterhalb bzw. oberhalb

der Kurve verläuft. Man nennt die Funktion dann

konvex bzw. **konkav**.

Entsprechend spricht man von einem

Konvexbogen bzw. **Konkavbogen**

(5.87)

Die Charakterisierung des Krümmungsverhaltens mit Hilfe der strengen Monotonie der Ableitungsfunktion führt aufgrund des Satzes (5.85) unmittelbar zum

Satz

Die Funktion f sei über dem Intervall J zweimal stetig differenzierbar.

Ist $f''(x) > 0$ bzw. $f''(x) < 0$ für alle $x \in J$,

so ist der zugehörige Graph

linksgekrümmt bzw. rechtsgekrümmt.

Aus der Linkskrümmung bzw. Rechtskrümmung folgt andererseits

$f''(x) \geq 0$ bzw. $f''(x) \leq 0$

(5.88)

Eine Kurzübersicht vermittelt folgende Tabelle

(LK = Linkskurve, RK = Rechtskurve, str.= streng, m.= monoton, st.= steigend, fa.= fallend)

$f'(x)$	> 0	> 0	< 0	< 0
$f''(x)$	> 0	< 0	> 0	< 0
Kurve				
Typ	str. m. st. LK	str. m. st. RK	str. m. fa. LK	str. m. fa. RK

Beispiel 5.70

$f(x) = x^4$, $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$

f' ist streng monoton steigend:

$f''(x) \geq 0$

(Bild 5.58)

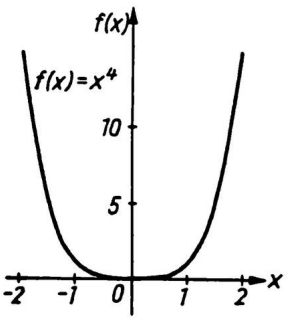


Bild 5.58

Beispiel 5.71

$f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

f' streng monoton fallend (Bild 5.59)

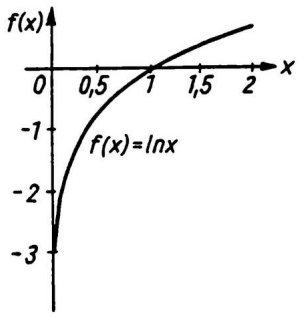


Bild 5.59

5.2.9.2 Extrempunkte

Von besonderer Bedeutung für Anwendungen sind Extremwerte von Funktionen. Bei praktischen Fragestellungen spielen Extremalprobleme eine entscheidende Rolle. Zur mathematischen Beschreibung werden Ableitungen der Funktionen verwendet.

Hat eine differenzierbare Funktion f an der Stelle x_E einen lokalen Extremwert (vgl. Definition (5.74)), d.h. ein lokales Maximum oder Minimum, so gilt nach Satz (5.75) die **notwendige Bedingung**

$$\boxed{f'(x_E) = 0}$$

Ist andererseits nicht bekannt, ob überhaupt ein Extremwert vorhanden ist, reicht die notwendige Bedingung allein nicht aus, um diese Frage zu klären. Sie besagt lediglich, daß die Steigung zu dieser Stelle gleich null ist, es existiert also eine waagerechte Tangente. Dies trifft auch auf andere Fälle zu.

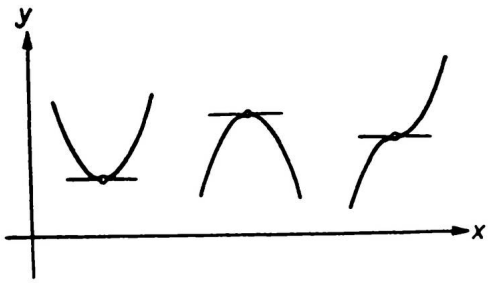


Bild 5.60

Man sucht daher nach weiteren Kriterien. Anhaltspunkt bildet das Krümmungsverhalten beispielsweise in der Umgebung eines Hochpunktes. Neben der Bedingung $f'(x_E) = 0$ gilt dort in einer Umgebung von x_E wegen der Rechtskrümmung $f''(x) \leq 0$.

Satz (Hinreichendes Kriterium für die Existenz von Extremwerten)

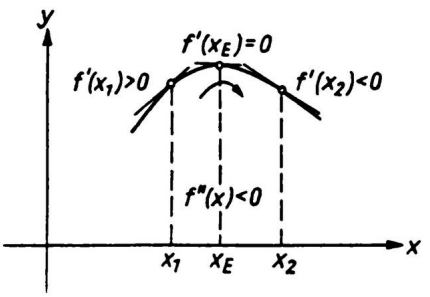
Die Funktion f sei in einem Intervall J zweimal stetig differenzierbar.
Sind die Bedingungen $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) \neq 0$
für eine Stelle $x_E \in J$ erfüllt,
so besitzt f an der Stelle x_E einen lokalen Extremwert.
Im Fall $f''(x_E) < 0$ bzw. $f''(x_E) > 0$
liegt ein lokales Maximum bzw. lokales Minimum
vor. (5.89)

Beweis:

Die Aussage wird für ein Maximum bewiesen.

Nach Voraussetzung ist $f''(x_E) < 0$. Wegen der Stetigkeit von f'' gilt die Ungleichung auch in einer Umgebung $U(x_E)$ der Stelle x_E. Die Funktion der ersten Ableitung f' ist daher streng monoton fallend, d.h. die Kurve ist rechtsgekrümmt. Für $x < x_E$ bzw. $x > x_E$ ist $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$, so daß der Graph links von x_E steigt und rechts von x_E fällt. Damit hat f an der Stelle x_E ein lokales Maximum. Der Punkt $H(x_E; f(x_E))$ ist ein Hochpunkt.

Tabellarische Darstellung: (5.90)



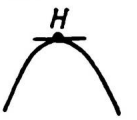
$f'(x_E)$	0	0
$f''(x_E)$	> 0	< 0
Graph		
Art	Tiefpunkt T Linkskurve	Hochpunkt H Rechtskurve

Bild 5.61

Beispiel 5.72

Der Graph der Funktion
$f: \quad f(x) = x^2 + x - 2$
ist mit Angabe des Extrempunktes zu skizzieren.
Wegen $f'(x) = 2x + 1$ und $f''(x) = 2$ folgt für die Bestimmung von Extremwerten:

$f'(x_E) = 0$:

$x_E = -\frac{1}{2}$, $y_E = f(x_E) = -2,25$

$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 > 0 \Longrightarrow$

Tiefpunkt $T\left(-\frac{1}{2}; -2,25\right)$

Die Kurve ist wegen $f''(x) > 0$ linksgekrümmt.

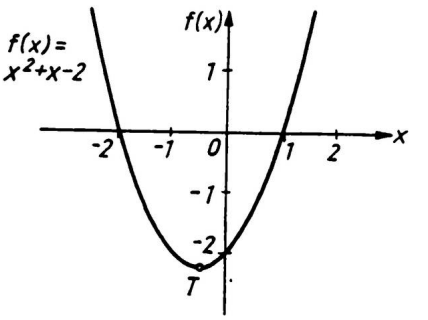


Bild 5.62

Die Verwendung der zweiten Ableitung einer entsprechend oft differenzierbaren Funktion zum Nachweis der Existenz von Extremwerten kann sehr aufwendig sein. In manchen Fällen ist die Funktion an der zu untersuchenden Stelle nicht einmal differenzierbar, obwohl ein Extremum vorliegt (vgl. Bild 5.50), so daß das obige hinreichende Kriterium nicht angewandt werden kann. Die Voraussetzungen hierfür sind z.B. auch dann nicht erfüllt, falls an der vermuteten Extremstelle x_E einer Funktion f neben $f'(x_E) = 0$ auch $f''(x_E) = 0$ oder sogar noch höhere Ableitungen an der Stelle x_E gleich null sind. So gilt beispielsweise für $f(x) = x^4$: $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0, f'''(0) = 0$. Dennoch liegt hier ein Extremwert vor.

In all diesen Fällen kann das Extremwertverhalten einer Funktion f geklärt werden, indem man in einer Umgebung $U(x_E)$ einer zu untersuchenden Stelle x_E nur die erste Ableitung f' untersucht und damit das Steigungsverhalten links und rechts von der Stelle x_E klärt. Im einzelnen gilt der

Satz

Die Funktion f sei in einer Umgebung $U(x_E)$ der Stelle $x_E \in X$ stetig und für $x \in U(x_E)$ oder $x \in U(x_E) \setminus \{x_E\}$ differenzierbar. Ist das Vorzeichen von $f'(x)$ für $x < x_E$ verschieden vom Vorzeichen von f' für $x > x_E$, so ist x_E eine Extremstelle:

x_E ist eine Maximumstelle,

falls $f'(x) > 0$ für $x < x_E$ und $f'(x) < 0$ für $x > x_E$,

x_E ist eine Minimumstelle,

falls $f'(x) < 0$ für $x < x_E$ und $f'(x) > 0$ für $x > x_E$. (5.91)

5.2.9.3 Wendepunkte

Ändert sich in einem Punkt $W(x_W; f(x_W))$ des Graphen einer Funktion f das Krümmungsverhalten, so spricht man von einem Wendepunkt W.

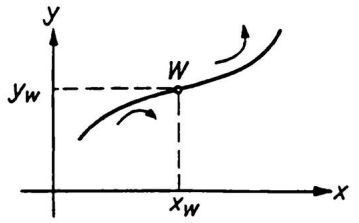


Bild 5.63

Beim Übergang von einer Rechts- in eine Linkskurve z.B. nimmt die Steigung bis zur Stelle x_W streng monoton ab und ab x_W wieder streng monoton zu. Die Ableitungsfunktion hat an der Stelle x_W ein lokales Minimum. Dies führt zu der

Definition

f sei eine differenzierbare Funktion über dem Intervall J.

Ein Punkt $W(x_W; f(x_W))$ mit der Stelle $x_W \in J$ heißt **Wendepunkt** des Graphen (der Kurve), falls die Ableitungsfunktion f' an der Stelle x_W einen lokalen Extremwert hat.

Die Stelle x_W heißt **Wendestelle**. Gilt zusätzlich $f'(x_W) = 0$, so heißt W ein **Sattelpunkt** S. (5.92)

Da hier Extremaleigenschaften der Ableitungsfunktion zugrunde gelegt werden, können unmittelbar auf die Ableitungsfunktion f' die Kriterien für Extremwerte angewandt werden.

Satz

Die Funktion f sei in dem Intervall J dreimal stetig differenzierbar.

a) *Notwendiges Kriterium für die Existenz eines Wendepunktes*
Hat der Graph der Funktion f einen Wendepunkt $W(x_W; f(x_W))$ für $x \in J$, so gilt $f''(x_W) = 0$.

b) *Hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Wendepunktes*
Gelten für die Stelle $x_W \in J$ die Bedingungen $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$, so ist x_W eine Wendestelle. (5.93)

Beispiel 5.73

Man untersuche die Funktion

$f: \quad f(x) = x^4 - x^2$

auf Extrem- und Wendepunkte und skizziere den Graphen.

Nullstellen: $f(x_N) = x_N^4 - x_N^2 = x_N^2\,(x_N^2 - 1) \Longrightarrow$

$$x_{N_0} = 0\,,\ x_{N_1} = 1\,,\ x_{N_2} = -1$$

Ableitungen: $f'(x) = 4x^3 - 2x\,,\ f''(x) = 12x^2 - 2\,,\ f'''(x) = 24x$

Extrempunkte:

$f'(x_E) = 0$: $\quad 4x_E^3 - 2x_E = 0\,,\ \ 2x_E\left(2x_E^2 - 1\right) = 0$

$$\Longrightarrow x_{E_1} = 0\,,\ x_{E_{2,3}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\,;\,,$$

$$y_{E1} = f(0) = 0\,,\ y_{E_2} = f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{4}\,,\ y_{E_3} = f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{4}$$

$f''(x_E)$: $\quad f''(0) = -2 < 0 \Longrightarrow H\,(0;0)$ **Hochpunkt**

$$f''\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 6 - 2 = 4 > 0 \Longrightarrow T_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}; -\frac{1}{4}\right) \quad \text{Tiefpunkt}$$

$$f''\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 4 > 0 \Longrightarrow T_2\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}; -\frac{1}{4}\right) \quad \text{Tiefpunkt}$$

Wendepunkte:

$f''(x_W) = 0$: $\quad 12x_W^2 - 2 = 0 \Longrightarrow x_{W_1} = \sqrt{\frac{1}{6}}\,,\ x_{W_2} = -\sqrt{\frac{1}{6}}$

$$y_{W_1} = f(x_{w_1}) = -\frac{5}{36}\,,\ y_{w_2} = f\,(x_{w_2}) = -\frac{5}{36}$$

$f'''\,(x_W)$: $\quad f'''\,(x_W) = 24x_W\,,\ f'''\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\right) = 24 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} > 0\,,$

$$f'''\left(-\sqrt{\frac{1}{6}}\right) = -24\sqrt{\frac{1}{6}} < 0$$

$$\Longrightarrow W_1\,(x_{W_1}; y_{W_1}) = W_1\left(\sqrt{\frac{1}{6}}; -\frac{5}{36}\right)\,,$$

$$W_2\,(x_{W_2}; y_{W_2}) = W_2\left(-\sqrt{\frac{1}{6}}; -\frac{5}{36}\right)$$

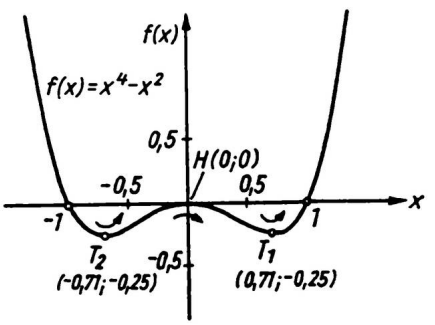


Bild 5.64

Aus den Werten der Ableitungen an einer Stelle x_W kann aufgrund der vorausgesetzten Stetigkeit der Funktionen auf Wendepunkte und die Art des Krümmungsverlaufes in deren Umgebung geschlossen werden. Beispielsweise haben die Bedingungen $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) > 0$ folgende Konsequenz: Da die Ungleichung in einer Umgebung von x_W gilt, ist die Ableitungsfunktion f'' in dieser Umgebung streng monoton steigend. Wegen $f''(x_W) = 0$ ist $f''(x) < 0$ für $x < x_W$ und $f''(x) > 0$ für $x > x_W$. Der Übergang an der Stelle x_W erfolgt also von einer Rechtskurve in eine Linkskurve. Die verschiedenen Möglichkeiten werden in der folgenden Tabelle zusammengestellt (W Wendepunkt, S Sattelpunkt).

Art des Krümmungsverhaltens in der Umgebung von Wendepunkten

$f''(x_W)$	0			0		
$f'''(x_W)$	> 0			< 0		
	Rechts-Links-Krümmung			Links-Rechts-Krümmung		
$f'(x_W)$	> 0	0	< 0	> 0	0	< 0
Graph von f						
	W	S	W	W	S	W

(5.94)

Die bisherigen Kriterien gelten, sofern sie Ableitungen betreffen, im Innern eines Intervalls. Am Rande sind weitere Untersuchungen erforderlich. Dies trifft insbesondere dann zu, wenn eine Funktion über verschiedenen Bereichen durch unterschiedliche Funktionen definiert wird. Dies soll an einem Beispiel verdeutlicht werden.

Beispiel 5.74

Gegeben sei die Funktion

$$f: \quad f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^2, & 0 \le x \le 1 \\ -(x-2)^2 + 2, & 1 < x \le 2 \end{array} \right\}$$

Man untersuche f auf Extrem- und Wendestellen und skizziere den Graphen.

Lösung:

Zunächst ist die Funktion f über $[0,2]$ stetig, da f wegen

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} f(x) = f(1) = 1$$

auch an der Übergangsstelle $x = 1$ stetig ist.

f ist an der Stelle $x = 1$ auch differenzierbar:

$$f'(1-0) = \lim_{x \to 1-0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1-0} (x + 1) = 2$$

$$f'(1+0) = \lim_{x \to 1+0} \frac{-(x-2)^2 + 2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1+0} \frac{-x^2 + 4x - 3}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1+0} \frac{-(x-1)(x-3)}{x - 1} = \lim_{x \to 1+0} (-(x-3)) = 2$$

$\Longrightarrow f'(1-0) = f'(1+0) = f'(1)$

Damit ist die Funktion über dem Intervall $[0, 2]$ stetig und über $(0, 2)$ differenzierbar. Man erhält eine stetige Ableitungsfunktion:

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ -2(x-2), & 1 < x \leq 2 \end{array} \right\}$$

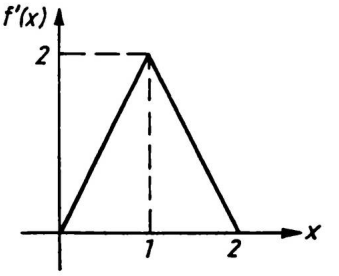


Bild 5.65

f' hat an der Stelle $x = 1$ einen maximalen Funktionswert, so daß gemäß der Definition eines Wendepunktes $W(1; 1)$ tatsächlich ein Wendepunkt der zu untersuchenden Kurve ist. In diesem Falle ist f' jedoch nicht weiter differenzierbar, so daß die obigen Kriterien für die Existenz von Wendestellen mehrfach differenzierbarer Funktionen ($f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$) hier *nicht* gelten.

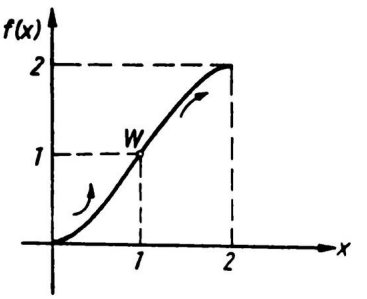


Bild 5.66

5.2.10 Kurvendiskussionen

Mit Hilfe der Methoden der Analysis werden im folgenden Funktionen und deren Graphen untersucht. Dabei werden insbesondere ganz- und gebrochenrationale und trigonometrische Funktionen sowie Exponentialfunktionen diskutiert. Von besonderer Bedeutung für praktische Probleme sind Extremalaufgaben.

5.2.10.1 Checkliste

Der Graph einer Funktion $f: \; y = f(x)$ wird mit Hilfe charakteristischer Eigenschaften der Funktion beschrieben, die die Struktur der Kurve im wesentlichen festlegen. Dabei wird folgender **Untersuchungskatalog (Checkliste)** zugrunde gelegt, der je nach Anforderung des Problems und Art des Funktionstyps erweitert oder eingeschränkt werden kann.

Checkliste

1.) *Definitionsbereich* und gegebenenfalls Wertebereich

2.) *Symmetrieeigenschaften*
Unter diesem Begriff wird zunächst nur die Achsensymmetrie bezüglich der y-Achse oder Punktsymmetrie bezüglich des Ursprungs verstanden. Weitere Symmetrieeigenschaften können durchaus vorhanden sein, werden in diesem Zusammenhang hier jedoch nicht untersucht.

3.) *Nullstellen*
Eine Nullstelle $x_N \in X$ aus dem Definitionsbereich X einer Funktion f ist eine Lösung der Gleichung $f(x_N) = 0$ und kann bei beliebigen Funktionen in der Regel nur mit Hilfe numerischer Methoden und Verfahren bestimmt werden. Bei den hier behandelten Beispielen können Nullstellen im Regelfall

exakt ermittelt werden.

4.) *Asymptotisches Verhalten für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$*
Untersucht wird das Grenzverhalten einer Funktion für $|x| \to \infty$. Dabei werden Ersatzfunktionen bestimmt, mit deren Hilfe für große Werte von $|x|$ die zu untersuchende Kurve näherungsweise beschrieben werden kann. Man spricht in diesem Zusammenhang von *Asymptotenkurven* und im Falle einer Geraden von einer *Asymptote.*

5.) *Definitionslücken und Unstetigkeitsstellen*
Das Verhalten einer Funktion in einer Umgebung einer Definitionslücke ist charakteristisch für den Kurvenverlauf. So kann z.B. eine Lücke, ein endlicher oder "unendlicher" Sprung der Kurve vorliegen. Von entsprechendem Interesse ist die Frage nach der Stetigkeit der Funktion. Dazu untersucht man jeweils die Existenz links- und rechtsseitiger Grenzwerte.

6.) *Extrempunkte*
Extrempunkte können im Innern und/oder am Rande des Definitionsbereiches auftreten und sind nicht an die Differenzierbarkeit gebunden. Ist die Funktion jedoch entsprechend oft differenzierbar im untersuchten Gebiet, so können zur Bestimmung der Extremwerte die notwendigen und hinreichenden Kriterien aus (5.2.9) angewendet werden.

7.) *Wendepunkte*
Wendepunkte hängen entscheidend mit einer Änderung des Krümmungsverhaltens einer Kurve zusammen. Im Falle differenzierbarer Funktionen werden die Kriterien gemäß (5.2.9) verwendet.

8.) *Graph*
Die Funktion wird mit Hilfe der erhaltenen Ergebnisse graphisch dargestellt. Dabei kann der Graph in vielen Fällen auch schon ohne genaue Kenntnis der Lage der vorhandenen Extrem- und Wendepunkte skizziert werden. Dies ist für einen ersten Überblick von Bedeutung.

5.2.10.2 Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)

Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades (Polynom n-ten Grades) f ist nach Abschn. 1.3.2.3 definiert durch

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{mit} \quad a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

Der Graph von f heißt **Parabel n-ten Grades.** Im folgenden werden exemplarisch die Fälle für $n = 2, 3$ und 4 behandelt, aus denen Polynome höheren Grades aufgebaut werden können.

Polynom 2.Grades (quadratische Funktion)

Eine quadratische Funktion f ist gegeben durch

$$f: \quad f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{mit} \quad a_2 \neq 0$$

Definitionsbereich: $X = \mathbb{R}$

Nullstellen: $f(x_N) = 0 \Longrightarrow \quad a_2x_N^2 + a_1x_N + a_0 = 0$

$$x_N^2 + \frac{a_1}{a_2}x_N + \frac{a_0}{a_2} = 0$$

Die Lösung der quadratischen Gleichung ergibt

$$x_{N_{1,2}} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_2^2} - \frac{a_0}{a_2}} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \frac{1}{2a_2}\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}$$

Je nach Wert des Radikanden gibt es *keine*, *eine* oder *zwei* Lösungen.

Asymptotisches Verhalten:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty \qquad \text{für} \quad a_2 > 0$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{für} \quad a_2 < 0$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 2a_2x + a_1\,, \quad f''(x) = 2a_2$$

$$f'(x_E) = 0: \; 2a_2x_E + a_1 = 0 \Longrightarrow$$

$$x_E = -\frac{a_1}{2a_2}; \quad y_E = f(x_E) = a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}$$

$$f''(x_E): \; f''(x_E) = 2a_2 > 0 \quad \text{für} \quad a_2 > 0 \quad \text{und}$$

$$f''(x_E) = 2a_2 < 0 \quad \text{für} \quad a_2 < 0$$

$$\Longrightarrow \textit{Hochpunkt} \quad H\left(-\frac{a_1}{2a_2}; a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}\right) \quad \text{für} \quad a_2 < 0$$

$$\Longrightarrow \textit{Tiefpunkt} \quad T\left(-\frac{a_1}{2a_2}; a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}\right) \quad \text{für} \quad a_2 > 0.$$

Wendepunkt existiert nicht.

Mögliche Lagen des Graphen (quadratische Parabel) für $a_2 > 0$:

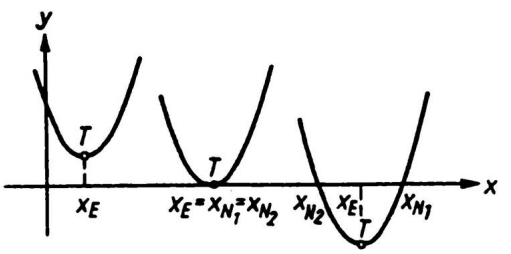


Bild 5.67

Wegen $f''(x) = 2a_2 > 0$ ist die Kurve linksgekrümmt.

Beispiel 5.75

Eine Schar von quadratischen Funktionen f_a sei gegeben durch die Gleichung

$f_a(x) = -x^2 + 2ax\,, \quad a \in \mathbb{R}$

Man skizziere die Schar der Parabeln. Wie lautet die Gleichung der Kurve, auf der die Extrempunkte (Scheitelpunkte) liegen?

Lösung:

Nullstellen:

$-x_N^2 + 2ax_N = x_N(-x_N + 2a) = 0$

$x_{N_1} = 0\,, \quad x_{N_2} = 2a$

Extrempunkte:

$f_a'(x) = -2x + 2a\,, \quad f_a''(x) = -2$

$f_a'(x_E) = 0: \quad -2x_E + 2a = 0\,, \quad x_E = a$

$f_a''(x_E): \quad f_a''(x_E) = -2 < 0$

$\Longrightarrow$ *Hochpunkt* $H\,(a; a^2)$

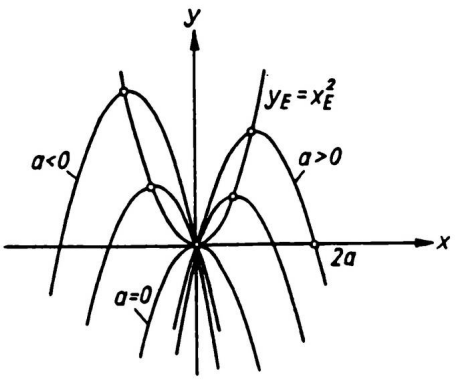


Bild 5.68

Kurve der Extrempunkte (Scheitelpunkte)

Für die Hochpunkte gilt:

$H(x_e; y_e) = H\,(a; a^2)$

mit $x_e = a$ und $y_e = a^2$. Daraus folgt nach Eliminierung des Parameters a:

$y_e = a^2 = x_e^2\,, \quad y_e = x_e^2$

Dies ist *zufällig* wieder die Gleichung einer quadratischen Parabel.

Polynome 3.Grades (kubische Parabeln)

Die Struktur der kubischen Parabeln kann mit Hilfe quadratischer Parabeln gezeigt werden. Dies ist sogar möglich, ohne die Koeffizienten der Gleichungen im einzelnen zu kennen.

Die definierende Gleichung lautet:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{mit } a_3 \neq 0$$

Die Funktion ist über $\mathbb{R}$ definiert und stetig. Der Graph ist also eine zusammenhängende Kurve. Setzen wir $a_3 > 0$ voraus, so folgt für das *asymptotische Verhalten:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\right) = \lim_{x\to\infty} x^3\left(a_3 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x^3}\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(a_3 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x^3}\right) = -\infty$$

Der Graph schneidet also mindestens einmal die x-Achse, d.h., es gibt mindestens eine Nullstelle x_N mit $f(x_N) = 0$.

Für eine Nullstelle x_N kann der lineare Faktor $x - x_N$ abgespalten werden:

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_N) \cdot \left(b_2x^2 + b_1x + b_0\right) \quad \text{mit } b_2 \neq 0.$

Damit erhält man für die weitere Diskussion der Nullstellen ein Polynom 2.Grades.

In der Praxis kann jedoch eine Nullstelle rechnerisch in der Regel nicht ohne weiteres gefunden werden. Hierzu verwendet man Näherungsverfahren, auf die in Abschn. 5.2.12 eingegangen wird.

Eine wichtige Hilfe zur Charakterisierung eines Polynoms 3.Grades bieten die Ableitungen:

$$f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1, \quad f''(x) = 6a_3x + 2a_2, \quad f'''(x) = 6a_3$$

Der Kurvenverlauf wird über das Steigungsverhalten bestimmt, das mit Hilfe der 1. Ableitung f' beschrieben wird. f' ist quadratisch, so daß die obigen Ergebnisse unmittelbar übertragen werden können:

f' ist quadratisch: f' hat höchstens zwei Nullstellen, d.h., es gibt höchstens 2 Extrempunkte einer kubischen Parabel. Es gibt auch kubische Parabeln ohne Extrempunkt.

f'' ist linear: f'' hat eine Nullstelle. Diese ist wegen $f'''(x) = 6a_3 \neq 0$ Wendestelle, d.h., jede kubische Parabel besitzt einen Wendepunkt.

Im Falle $a_3 > 0$ gilt für die möglichen Graphen von f' und damit auch für mögliche Graphen von f (s. Bild 5.69), daß u.a. die *Wendestelle* x_W von f = *Extremstelle von* f' ist.

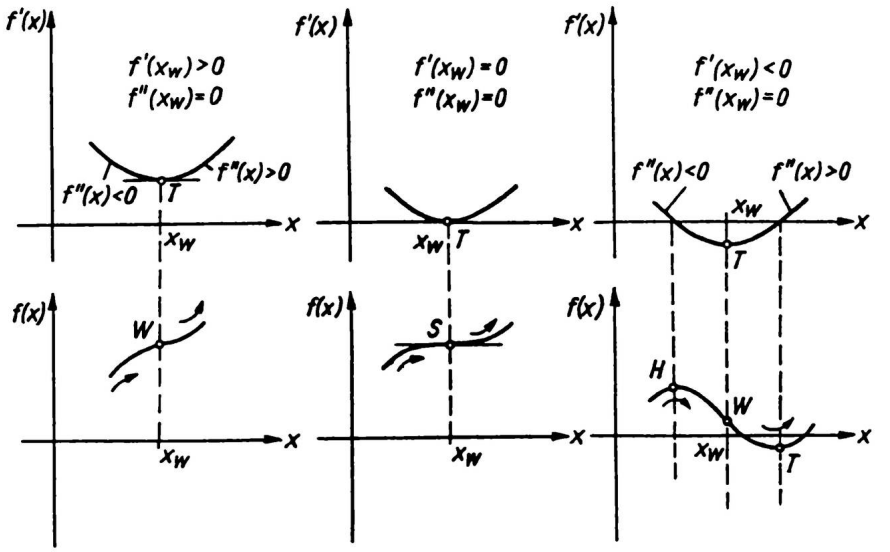


Bild 5.69

Beispiel 5.76

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

Skizze des Graphen mit analytischer Begründung

Lösung:

Nullstellen: $x_{N_1} = 1$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{rl} & (x^3 - x^2 - x + 1) : (x-1) = x^2 - 1 \\ - & \underline{(x^3 - x^2)} \\ & \qquad\quad - x + 1 \\ & \qquad - \underline{(- x + 1)} \\ & \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

$\Longrightarrow f(x) = (x-1)\left(x^2-1\right) = (x-1)^2\,(x+1)$

Die Nullstelle $x_{N_1} = 1$ tritt doppelt auf. Weitere Nullstelle ist $x_{N_2} = -1$

Asymptotisches Verhalten:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^3\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Extrempunkte:

$f'(x_E) = 0:$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

$$x_E^2 - \frac{2}{3}x_E - \frac{1}{3} = 0$$

$$x_{E_{1,2}} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}\,,\ x_{E_1} = 1\,,\ x_{E_2} = -\frac{1}{3}$$

$$y_{E_1} = f(x_{E_1}) = 0\,,\ y_{E_2} = f(x_{E_2}) = \frac{32}{27}$$

$f''(x_E):$

$$f''(x) = 6x - 2$$

$$f''(1) = 4 > 0 \Longrightarrow \textit{Tiefpunkt } T(1;0)$$

$$f''\left(-\frac{1}{3}\right) = -4 < 0 \Longrightarrow \textit{Hochpunkt } H\left(-\frac{1}{3};\frac{32}{27}\right)$$

Wendepunkt:

$f''(x_W) = 0:\ \ 6x_W - 2 = 0\,,$

$x_W = \frac{1}{3},\quad y_W = f(x_W) = \frac{16}{27},$

$f'''(x_W) = 6 \neq 0 \Longrightarrow$

Wendepunkt $W\left(\frac{1}{3};\frac{16}{27}\right)$

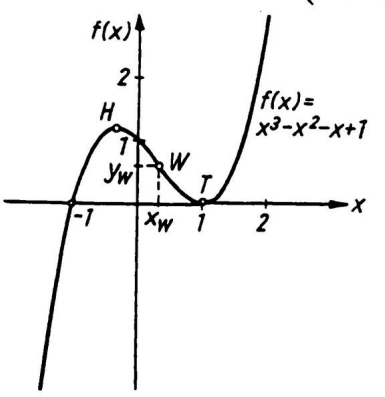


Bild 5.70

Bei der Kurvendiskussion von differenzierbaren Funktionen wird in der Regel von Eigenschaften der Ableitungsfunktionen auf Eigenschaften der zu untersuchenden Funktion geschlossen, z.B. zur Charakterisierung des Steigungs- und Krümmungsverhaltens und bei der Bestimmung von Extrem- und Wendestellen. Am Beispiel eines Polynoms 4. Ordnung sollen diese Zusammenhänge verdeutlicht werden. In

diesem Fall wird die Untersuchung durch die einfache Struktur der Ableitungsfunktionen begünstigt.

Beispiel 5.77

$$f'''(x) = 6x - 9$$

Nullstelle: $x_N = 1,5$

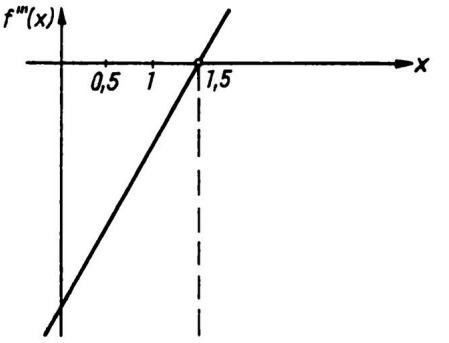


Bild 5.71

$$f''(x) = 3x^2 - 9x + 6$$

Tiefpunkt: $T(1,5; -0,75)$
Nullstellen: $x_{N_1} = 1,\ x_{N_2} = 2$

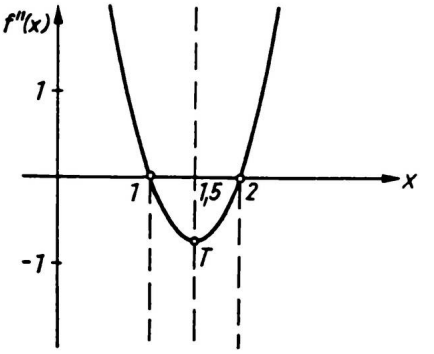


Bild 5.72

$$f'(x) = x^3 - 4,5x^2 + 6x - 2,5$$

Hochpunkt: $H(1;0)$
Tiefpunkt: $T(2;-0,5)$
Wendepunkt: $W(1,5;-0,25)$
Nullstellen: $x_{N_1} = 1,\ x_{N_2} = 2,5$

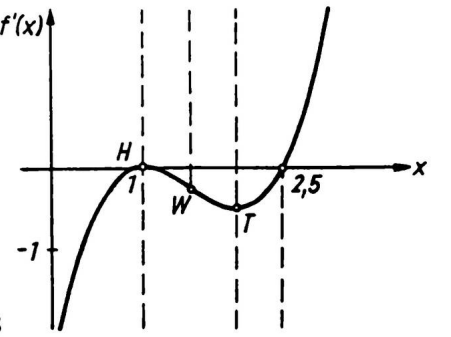


Bild 5.73

$$f(x) = 0,25x^4 - 1,5x^3 + 3x^2 - 2,5x$$

Tiefpunkt: $T(2,5; -1,172)$
Wendepunkte:
$W_1(1; -0,75)\ \ W_2(2; -1)$
Nullstellen: $x_{N_1} = 0,\ x_{N_2} = 3,26$

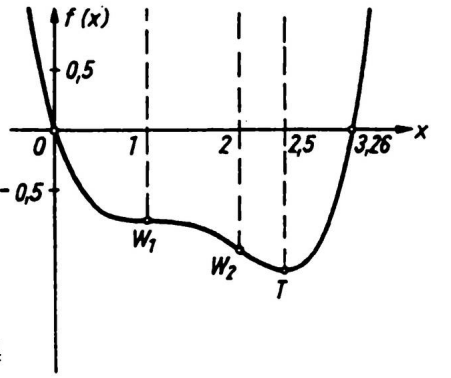


Bild 5.74

Aufgaben 5.47 bis 5.57

5.2.10.3 Gebrochenrationale Funktionen

Eine *gebrochenrationale* Funktion f ist definiert als Quotient von zwei ganzrationalen Funktionen Z und N mit $n, m \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} Z(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \\ &\text{und} \\ N(x) &= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

Im Falle $n \geq m$ bzw. $n < m$ spricht man von einer *unecht* bzw. *echt gebrochenrationalen* Funktion (vgl. Beispiel 5.78 bzw. Beispiel 5.80). Jede unecht gebrochenrationale Funktion mit $n > m$ kann zerlegt werden in der Form

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = P_{n-m}(x) + \frac{\widetilde{Z}(x)}{\widetilde{N}(x)}$$

Dabei bedeuten P_{n-m} eine Polynomfunktion vom Grade $n - m$ und $\dfrac{\widetilde{Z}(x)}{\widetilde{N}(x)}$ eine echt gebrochenrationale Funktion.
Für $n = m$ ist P_0 eine Konstante.
Die Zerlegung von f wird mit Hilfe der Polynomdivision durchgeführt.

Beispiel 5.78

$$f(x) = \frac{x^3}{x-1} = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

Nebenrechnung: Polynomdivision

$$\begin{array}{rl} x^3 & (x - 1) = x^2 + x + 1 + \dfrac{1}{x-1} \\ -\underline{(x^3 - x^2)} & \\ \quad x^2 & \\ \quad -\underline{(x^2 - x)} & \\ \qquad x & \\ \qquad -\underline{(x - 1)} & \\ \qquad\quad 1 & \end{array}$$

Beispiel 5.79

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 1} = 1 - \frac{4x + 1}{x^2 + 2x + 1}$$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (x^2 - 2x) : (x^2 + 2x + 1) = 1 - \dfrac{4x + 1}{x^2 + 2x + 1} \\ -\underline{(x^2 + 2x + 1)} \\ \quad -4x - 1 \end{array}$$

Untersucht man das Verhalten einer gebrochenrationalen Funktion für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$, so folgt für eine echt gebrochenrationale Funktion f stets

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \text{ z.B. } \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

Der Graph nähert sich unbegrenzt der x-Achse. Diese nennt man dann eine **Asymptote** der Kurve mit der Asymptotengleichung $y_A = 0$.

Im Falle $n = m$ folgt für $f(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)}$ nach Abschn. 5.1.2.2

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$$

Hier ist die Parallele zur x-Achse mit der Gleichung $y_A = \dfrac{a_n}{b_m}$ eine Asymptote der Kurve.

Für $n > m$ ist $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\widetilde{Z}(x)}{\widetilde{N}(x)} = 0$, so daß $f(x)$ für $|x| \to \infty$ gegen die Polynomfunktion P_{n-m} strebt.

Der Graph von P_{n-m} wird als eine *asymptotische Kurve* oder auch einfach als eine Asymptote der Kurve bezeichnet mit der Gleichung $y_A = P_{n-m}(x)$. Im Beispiel 5.82 ist $y_A = \dfrac{1}{2}(x^2 + x + 1)$ die Asymptotengleichung.

Zur weiteren Charakterisierung einer rationalen Funktion wird die Nullstellenmenge L_Z bzw. L_N des Zähler- bzw. Nennerpolynoms eingeführt:

$$L_Z = \{x \,|Z(x) = 0\} \text{ und } L_N = \{x \,|N(x) = 0\}$$

Der Definitionsbereich X ist gegeben durch $X = \mathbb{R} \setminus L_N$.

Für eine Nullstelle x_N mit $f(x_N) = 0$ gilt: $x \in L_Z \setminus L_N$.

Eine Stelle $x_L \in L_N$ ist eine **Definitionslücke**. Diese heißt **hebbare Lücke**, falls der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_L} f(x)$ existiert, z.B.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x = 2$$

Existieren die einseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{x\to x_L+0}$ und $\lim\limits_{x\to x_L-0}$ nicht, so nennt man die Lücke **nicht hebbar**. Die Stelle x_L heißt **Polstelle**. So gilt z.B. $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{1}{x} = \infty$ bzw. $\lim\limits_{x\to-0} \dfrac{1}{x} = -\infty$ (vgl. Beispiel 5.80). Bei Annäherung an die Stelle $x_L = 0$ streben die Hyperbeläste gegen die y-Achse. In diesem Fall spricht man von einer *senkrechten Asymptote* der Kurve.

Im folgenden werden exemplarisch Kurvendiskussionen für typische gebrochenrationale Funktionen durchgeführt.

Beispiel 5.80

$f(x) = \frac{1}{x}$

Definitionsbereich: $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Symmetrie:
$f(-x) = -f(x)$, Punktsymmetrie bezüglich $O(0;0)$. Daher bei Diskussion Beschränkung auf den Bereich für $x > 0$.

Nullstellen: keine

Asymptotisches Verhalten für $x \to \infty$:
$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, Gleichung der Asymptote:
$y_A = 0$

Polstellen, Lücken, ...
$\lim\limits_{x \to +0} \frac{1}{x} = \infty$, $x = 0$ Polstelle
Gleichung der senkrechten Asymptote: $x = 0$

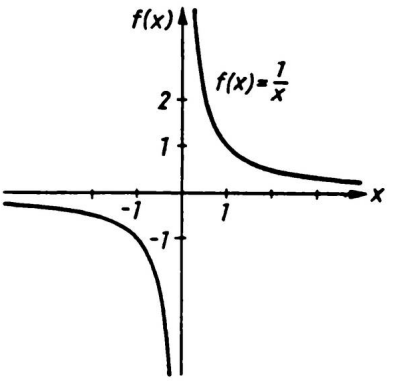


Bild 5.75

Ableitungen:
$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

Monotonie:
$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \implies f$ streng monoton fallend

Extrempunkte:
$f'(x) \neq 0$: kein Extremwert vorhanden

Wendepunkte:
$f''(x) = \frac{2}{x^3} \neq 0$: keine Wendestelle

Graph: Punktsymmetrie beachten

Beispiel 5.81

$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x+1)^2} = 1 - \frac{4x+1}{(x+1)^2}$

Definitionsbereich: $X = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Symmetrie: —

Nullstellen: $x_{N_1} = 0$, $x_{N_2} = 2$

Asymptotisches Verhalten:
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 - \frac{4x+1}{(x+1)^2}\right) = 1$
Gleichung der Asymptote: $y_A = 1$
Schnittstelle von Asymptote und Graph von f: $f(x_S) = y_A$: $x_S = -\frac{1}{4}$

Polstellen: $x = -1$ (doppelt)
$\lim\limits_{x \to -1+0} \frac{x^2 - 2x}{(x+1)^2} = \infty$, $\lim\limits_{x \to -1-0} \frac{x^2 - 2x}{(x+1)^2} = \infty$
Gleichung der senkrechten Asymptote: $x = -1$

Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{-2+4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{-8x+10}{(x+1)^4}$$

Extrempunkte:

$f'(x_E) = 0$:

$$x_E = \frac{1}{2}, \quad y_E = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}$$

$$f''(x_E) = f''\left(\frac{1}{2}\right) > 0$$

$\Longrightarrow$ *Tiefpunkt* $T\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$

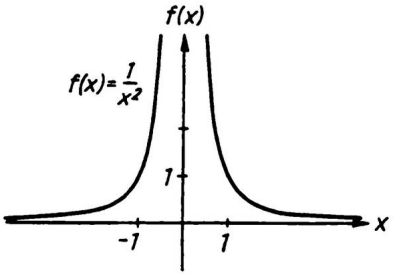


Bild 5.76

Wendepunkte:

$f''(x_W) = 0$:

$$-8x_W + 10 = 0, \quad x_W = \frac{5}{4}, \quad y_W = -\frac{5}{27}$$

f'' zeigt an der Stelle x_W einen Vorzeichenwechsel, d.h., es existiert eine Krümmungsänderung:

$\Longrightarrow$ *Wendepunkt* $W\left(\frac{5}{4}; -\frac{5}{27}\right)$

Beispiel 5.82

$$f(x) = \frac{x^3}{2(x-1)} = \frac{1}{2}(x^2+x+1) + \frac{1}{2(x-1)}$$

Definitionsbereich: $X = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Symmetrie: —

Nullstellen: $x_N = 0$

Asymptotisches Verhalten für $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{2}(x^2+x+1) + \frac{1}{2(x-1)}\right) = \infty$$

Gleichung der Asymptotenkurve:

$$y_A = \frac{1}{2}(x^2+x+1)$$

Polstellen: $x = 1$

Gleichung der senkrechten Asymptote: $x = 1$

Ableitungen:

$$f'(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2(x-1)^2},$$

$$f''(x) = 1 + \frac{1}{(x-1)^3},$$

$$f'''(x) = \frac{-3}{(x-1)^4}$$

Extrempunkte:

$f'(x_E) = 0$:

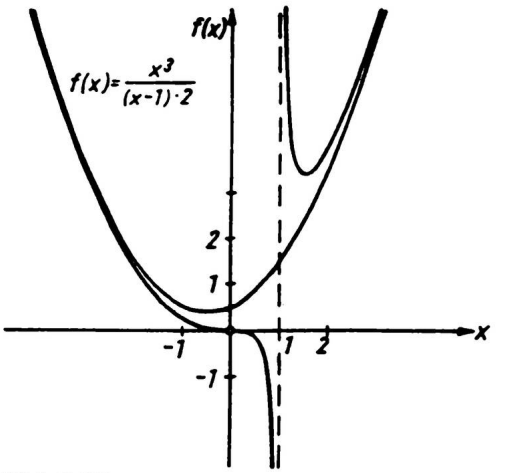


Bild 5.77

$$\frac{4x_E^3 - 6x_E^2}{2(x_E - 1)^2} = 0 \implies x_{E_1} = 0, \quad x_{E_2} = \frac{3}{2}$$

$$y_{E_1} = f(0) = 0, \quad y_{E_2} = f\left(\frac{3}{2}\right) = 3\frac{3}{8}$$

$f''(0) = 0$: weitere Untersuchung

$f''\left(\frac{3}{2}\right) > 0 \implies$ Tiefpunkt $T\left(\frac{3}{2}; 3\frac{3}{8}\right)$

Wendepunkte:

$$f''(x_W) = \frac{x_W\left(x_W^2 - 3x_W + 3\right)}{(x_W - 1)^3} = 0, \quad x_W = 0 \text{ einzige Lösung}$$

$f'''(0) = -3 \neq 0$ und $f'(0) = 0 \implies$ Sattelpunkt $S(0;0)$

Beispiel 5.83

Eine *Schar rationaler Funktionen* f_a sei gegeben durch

$$f_a: \quad f_a(x) = \frac{1}{x^2 + a} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$

Man diskutiere die Schar in Abhängigkeit des Parameters a und skizziere den Graphen.

Lösung:

Definitionsbereich:
$X_a = \mathbb{R} \setminus \{x \mid x^2 + a = 0\}$. Für $a > 0$ ist $X_a = \mathbb{R}$

Symmetrie:
$f(-x) = f(x) \implies$ Symmetrie bezüglich der y-Achse.
$\implies$ Die folgende Rechnung kann *auf* $x \geq 0$ *beschränkt* werden.

Nullstellen: keine

Asymptotisches Verhalten:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2 + a} = 0 \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}$$

Asymptotengleichung: $y_A = 0$

Definitionslücken:
Für $a \leq 0$ ist $x^2 + a = 0$ reell lösbar: $x^2 = -a$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{-a}$ *Polstellen*

Asymptotisches Verhalten (senkrechte Asymptoten):

$$\lim_{x \to \sqrt{-a}+0} \left(\frac{1}{x^2 + a}\right) = \infty, \qquad \lim_{x \to \sqrt{-a}-0} \left(\frac{1}{x^2 + a}\right) = -\infty$$

Gleichung der senkrechten Asymptote: $x = \sqrt{-a}$

Ableitungen:

$$f_a'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + a)^2}, \qquad f_a''(x) = \frac{6x^2 - 2a}{(x^2 + a)^3}$$

Extrempunkte:

$$f_a'(x) = 0 \implies x_E = 0, \quad y_E = f(0) = \frac{1}{a} \quad \text{für } a \neq 0$$

$$f_a''(0) = -\frac{2}{a^2} < 0 \implies \text{Hochpunkt} \quad H\left(0; \frac{1}{a}\right)$$

Wendepunkte:

$f_a''(x_W) = 0\,,\quad 6x_W^2 - 2a = 0 \implies x_{W_{1,2}} = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}\,,\quad y_{W_{1,2}} = \frac{3}{4a}$ für $a > 0$

$f_a''(x) < 0$ für $0 \le x < x_{W_1}$ und $f_a''(x) > 0$ für $x > x_{W_1}$,
d.h. Übergang von einer Rechts- in eine Linkskrümmung

$\implies$ Wendepunkt $W_1\left(\sqrt{\frac{a}{3}}; \frac{3}{4a}\right)$ für $a > 0$

Wegen Symmetrie ist auch $W_2\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}; \frac{3}{4a}\right)$ Wendepunkt.

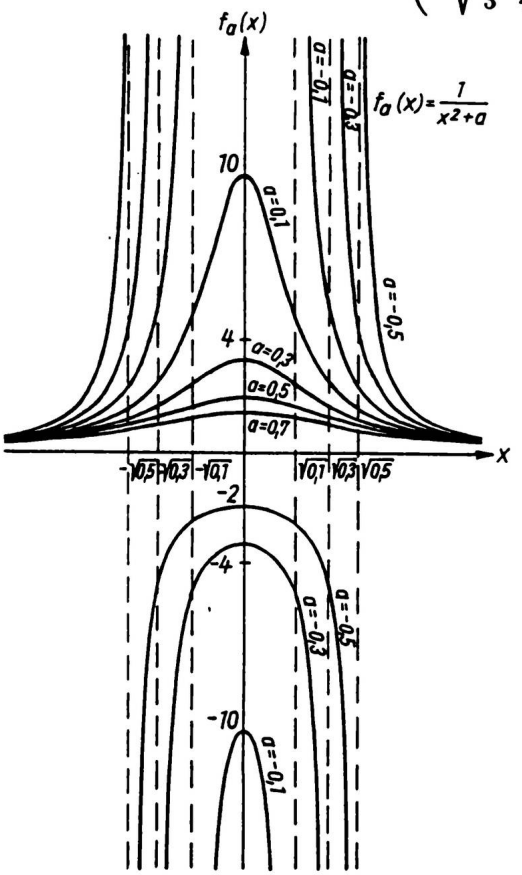


Bild 5.78

Aufgaben 5.58 bis 5.59

5.2.10.4 Exponentialfunktionen

Unter den Exponentialfunktionen spielt die Funktion f zur Basis e (e = Eulersche Zahl) eine bevorzugte Rolle:

$$f:\quad f(x) = \mathrm{e}^{ax} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Wegen $f'(x) = a\,\mathrm{e}^{ax} > 0$ für $a > 0$ und $f'(x) = a\,\mathrm{e}^{ax} < 0$ für $a < 0$ ist die Funktion für $a > 0$ bzw. $a < 0$ streng monoton steigend bzw. streng monoton fallend. Wegen der Anwendungen spricht man im Falle $a > 0$ bzw. $a < 0$ von einer **Wachstumsfunktion** bzw. **Zerfallsfunktion**.

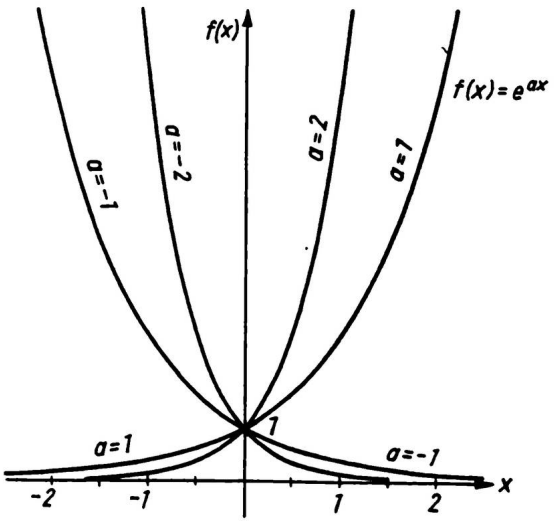


Bild 5.79

Beispiel 5.84

Zerfallsgesetz der radioaktiven Strahlung:
Für die Anzahl $N(t)$ der radioaktiven Kerne zur Zeit t gilt das experimentell beobachtbare Gesetz

$N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ für $t \geq 0$ und $\lambda > 0$.

Dabei ist N_0 die Anzahl zur Zeit $t = 0$. λ heißt **Zerfallskonstante**. N nimmt exponentiell ab. Von Bedeutung ist die **Halbwertszeit** T, nach der die Hälfte der Substanz zerfallen ist:

$$N(T) = \frac{1}{2}N_0 \quad \text{bzw.} \quad N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda T} = \frac{1}{2}N_0$$

Daraus folgt $\mathrm{e}^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$, $-\lambda T = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$,

so daß $\lambda T = \ln 2$ oder $T = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$

Beispiel 5.85

Man skizziere den Graphen der Funktion

$f:\quad f(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x} - 4\,\mathrm{e}^{-2x}$

Definitionsbereich: $X = \mathbb{R}$

Symmetrie: nicht erkennbar

Nullstellen:
$2\,\mathrm{e}^{-x_N} - 4\,\mathrm{e}^{-2x_N} = 0 \iff 2\,\mathrm{e}^{-x_N} = 4\,\mathrm{e}^{-2x_N} \iff \mathrm{e}^{x_N} = 2$

$\Longrightarrow$ Nullstelle $x_N = \ln 2$

Asymptotisches Verhalten:
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2\,\mathrm{e}^{-x} - 4\,\mathrm{e}^{-2x}\right) = 0$, Asymptotengleichung: $y_A = 0$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2\,\mathrm{e}^{-x}\left(1 - 2\,\mathrm{e}^{-x}\right) = -\infty$

Ableitungen:
$f'(x) = -2\,e^{-x} + 8\,e^{-2x}$, $f''(x) = 2\,e^{-x} - 16\,e^{-2x}$, $f'''(x) = -2\,e^{-x} + 32\,e^{-2x}$

Extrempunkte:
$f'(x_E) = 0: \quad -2\,e^{-x_E} + 8\,e^{-2x_E} = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad e^{x_E} = 4 \Longrightarrow x_E = \ln 4\,,\ y_E = f(\ln 4) = \frac{1}{4}$$

$f''(\ln 4) < 0 \Longrightarrow$ *Hochpunkt* $H\left(\ln 4; \frac{1}{4}\right)$

Wendepunkt:
$f''(x_W) = 0: \quad 2\,e^{-x_W} - 16\,e^{-2x_W} = 0 \Longrightarrow x_W = \ln 8\,,\ y_W = f(\ln 8) = \frac{3}{16}$

$f'''(\ln 8) = \frac{1}{4} \neq 0 \Longrightarrow$ Wendepunkt $W\left(\ln 8; \frac{3}{16}\right)$

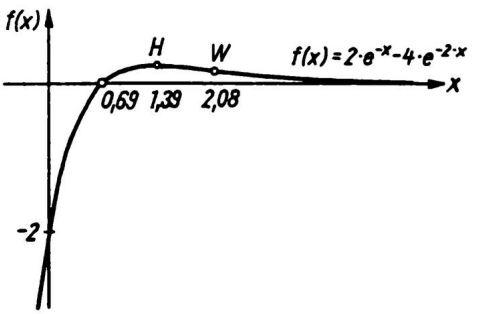


Bild 5.80

Beispiel 5.86

Kurvendiskussion der Schar von Funktionen

$$f_a: \quad f_a(x) = \frac{1}{1 + e^{-ax}} \qquad \text{für } a > 0$$

Definitionsbereich: $X = \mathbb{R}$

Symmetrie: Nicht unmittelbar erkennbar, obwohl vorhanden.

Nullstellen: keine

Asymptotisches Verhalten:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + e^{-ax}} = \frac{1}{1 + \lim\limits_{x \to \infty} e^{-ax}} = 1$$

Gleichung der Asymptote: $y_{A_1} = 1$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1 + e^{-ax}} = 0$$

Gleichung der Asymptote: $y_{A_2} = 0$

Ableitungen:

$$f_a'(x) = \frac{a\,e^{-ax}}{(1 + e^{-ax})^2}, \qquad f_a''(x) = \frac{a^2\,e^{-ax}\left(e^{-ax} - 1\right)}{(1 + e^{-ax})^3}$$

Extrempunkte:

$f_a'(x_E) = 0:$ Wegen $f_a'(x) > 0$ ist f_a streng monoton steigend. Es existiert kein Extrempunkt.

Wendepunkte:

$f_a''(x_W) = 0$: Mögliche Wendestelle muß Nullstelle des Zählerterms sein:

$a^2 \, e^{-ax_W} \left(e^{-ax_W} - 1\right) = 0$

Daraus folgt $e^{-ax_W} = 1$

bzw. $x_W = 0$

Da f_a'' an der Stelle $x_W = 0$ das Vorzeichen wechselt, ist $x_W = 0$ tatsächlich eine Wendestelle.

$\Longrightarrow$ Wendepunkt $W\left(0; \frac{1}{2}\right)$

unabhängig von a

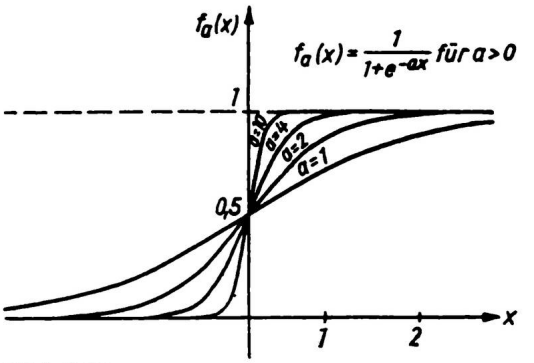


Bild 5.81

Die Kurven verlaufen durch den Punkt $W(0; 1/2)$. Die jeweilige Steigung in diesem Punkt $f_a'(0) = a$ ist vom Parameter a abhängig. Man kann zeigen, daß W Symmetriepunkt jeder Kurve ist.

Beispiel 5.87

Kurvendiskussion für die Funktion: $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Definitionsbereich: $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Symmetrie: keine

Asymptotisches Verhalten:

$\lim\limits_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

Gleichung der Asymptote: $y_A = 1$

Definitionslücke:

Mit $x = \frac{1}{n}$ folgt $\lim\limits_{x \to +0} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{n \to \infty} e^{\frac{1}{\frac{1}{n}}} = \lim\limits_{n \to \infty} e^n = \infty$

Mit $x = -\frac{1}{n}$ folgt $\lim\limits_{x \to -0} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{n \to \infty} e^{\frac{1}{-\frac{1}{n}}} = \lim\limits_{n \to \infty} e^{-n} = 0$

Während der rechtsseitige Grenzwert nicht existiert, ergibt der linksseitige den Wert 0. Die Lücke ist also nicht hebbar.

Ableitungen: $f'(x) = \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}, \quad f''(x) = \frac{2x+1}{x^4} e^{\frac{1}{x}}$

Extrempunkte:

$f'(x_E) = \frac{-1}{x_E^2} e^{\frac{1}{x_E}} < 0 \Longrightarrow$ Kein Extremum. Die Funktion ist über $(-\infty; 0)$ und $(0; \infty)$ jeweils streng monoton fallend.

Wendepunkte:

$f''(x_W) = \frac{2x_W + 1}{x_W^4} e^{\frac{1}{x_W}} = 0,$

$2x_W + 1 = 0, \quad x_W = -\frac{1}{2}$

$y_W = f(x_W) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{-\frac{1}{2}}} = e^{-2}$

Wegen $f''(x) < 0$ für $x < x_W$
und $f''(x) > 0$ für $x > x_W$
ändert die Kurve an der Stelle x_W das Krümmungsverhalten, d.h., es existiert der *Wendepunkt*

$$W\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{e^2}\right)$$

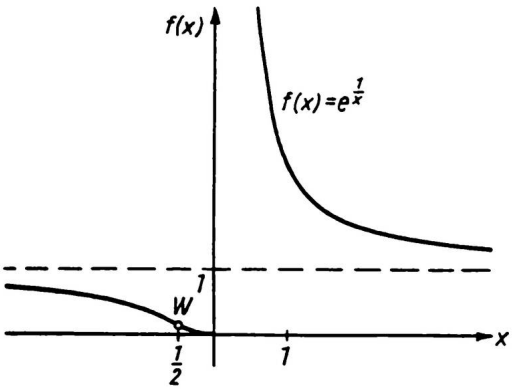


Bild 5.82

Beispiel 5.88

In der Statistik spielt die Gaußfunktion eine wichtige Rolle. In diesem Zusammenhang wird die Schar von Funktionen

$$f_\sigma: \quad f_\sigma(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{mit } \sigma > 0$$

diskutiert.

Nullstellen: keine

Symmetrie: $f_\sigma(-x) = f_\sigma(x)$ für alle σ :
Die Kurven sind achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.

Asymptotisches Verhalten:

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = 0, \quad y_A = 0$$

Ableitungen:

$$f'_\sigma(x) = -\frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$f''_\sigma(x) = -\frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\sigma^2}\right)$$

Extrempunkte:

$$f'_\sigma(x_E) = -\frac{x_E}{\sigma^2} e^{-\frac{x_E^2}{2\sigma^2}} = 0,$$
$$x_E = 0, \; y_E = 1$$

$$f''_\sigma(x_E) = f''_\sigma(0) = -\frac{1}{\sigma^2} < 0:$$

Hochpunkt: $H(0;1)$

Wendepunkte:

$$f''_\sigma(x_W) = -\frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{x_W^2}{2\sigma^2}} \left(1 - \frac{x_W^2}{\sigma^2}\right) = 0,$$

$$x_W^2 = \sigma^2, \; x_{W_{1,2}} = \pm\sigma, \quad y_{W_{1,2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

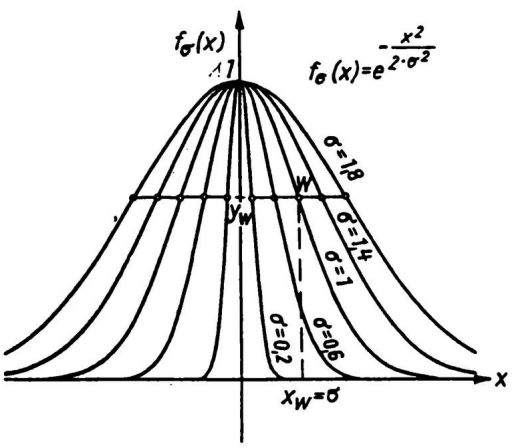


Bild 5.83

f'' wechselt an den Stellen x_{W_1} und x_{W_2} jeweils das Vorzeichen. Damit erhält man die Wendepunkte $W_1(\sigma; 0,61)$, $W_2(-\sigma; 0,61)$

Beispiel 5.89

In der Stochastik wird die Funktion f_σ aus Beispiel 5.88 durch einen Faktor ergänzt zur Funktion

$$\varphi_\sigma: \quad \varphi_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Wie später gezeigt wird, ist in diesem Falle für jeden Wert von σ der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse gleich eins. Die Kurvendiskussion erfolgt wie oben. Wegen des Faktors $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ ändern sich die Funktionswerte. Der Graph wird in Bild 5.84 dargestellt.

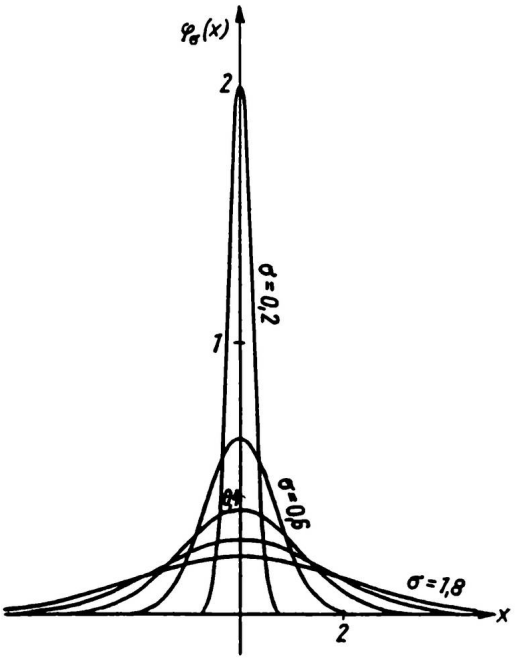


Bild 5.84

Aufgaben 5.60 bis 5.63

5.2.10.5 Trigonometrische Funktionen

Wesentliche Grundlage für die periodischen Funktionen bilden die trigonometrischen Funktionen, unter diesen insbesondere Sinus- und Cosinusfunktionen. Bei einer linearen Kombination, beispielsweise der Form $\sin(2x) + \cos(2x)$, kann die Diskussion ohne Verwendung der Analysis geführt werden, wenn gewisse Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen verwendet werden.

Die allgemeine Sinusfunktion

$$f: \quad y = f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

mit der maximalen Auslenkung A, der Kreisfrequenz ω und dem Nullphasenwinkel φ beschreibt eine harmonische Schwingung (vg. 1.4.2.5). Bei physikalischen Vorgängen in der Wellenlehre (Akustik, Optik, Elektrotechnik,...) wird beobachtet, daß die Superposition (Überlagerung) harmonischer Schwingungen derselben Frequenz wieder eine harmonische Schwingung derselben Frequenz liefert. Dies wird nun mathematisch ausgewertet.

Eine beliebige Sinusfunktion ist darstellbar in der Form

$$f: \quad y = f(x) = A\sin(ax + b) \quad \text{mit } A, a, b \in \mathbb{R} \text{ und } A > 0 \text{ und } a \neq 0.$$

Mit Hilfe des Additionstheorems

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2 + \sin x_2 \cdot \cos x_1$$

erhält man

$$A\sin(ax + b) = (A\cos b) \cdot \sin(ax) + (A\sin b) \cdot \cos(ax)$$

Führt man statt der Parameter A und b die Größen C_1 und C_2 ein mit

$$C_1 = A\cos b \quad \text{und} \quad C_2 = A\sin b,$$

so folgt

$$A\sin(ax + b) = C_1\sin(ax) + C_2\cos(ax) \tag{5.95}$$

Umgekehrt können bei Vorgabe von C_1 und C_2 die Größen A und b bestimmt werden:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{A\sin b}{A\cos b} = \tan b,$$

$$C_1^2 + C_2^2 = A^2\cos^2 b + A^2\sin^2 b = A^2\left(\cos^2 b + \sin^2 b\right) = A^2$$

Damit ergibt sich

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \text{und} \quad \tan b = \frac{C_2}{C_1}$$

Damit definiert jede lineare Kombination der Form $C_1\sin(ax) + C_2\cos(ax)$ wieder eine Sinusfunktion.

Beispiel 5.90

Skizze des Graphen mit Angabe von Nullstellen, Extrem- und Wendepunkten über dem Intervall $[0, 2\pi]$ für die Funktion f: $f(x) = \sin(2x) + \cos(2x)$

Lösung:

Die Gleichung ist von der Form $C_1\sin(ax) + C_2\cos(ax)$ mit $C_1 = 1$, $C_2 = 1$ und $a = 2$ und definiert daher eine allgemeine Sinusfunktion

f: $f(x) = A\sin(ax + b)$ mit $a = 2$.

Ferner ist

$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\tan b = \frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{1} = 1$, so daß $b = \frac{\pi}{4} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

wegen der periodischen Eigenschaft der Tangensfunktion.

Wählt man den kleinsten positiven Wert $b = \frac{\pi}{4}$, so folgt

$f(x) = \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

Mit dieser Wahl stimmen auch die Werte für

$C_1 = A\cos b$: $1 = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}$ und $C_2 = A\sin b$: $1 = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}$.

$b = \frac{\pi}{4} + \pi$ wäre hierzu im Widerspruch.

Nullstellen:

$f(x_N) = \sqrt{2}\sin\left(2x_N + \frac{\pi}{4}\right) = 0,$

$2x_N + \frac{\pi}{4} = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$, also

$2x_{N_1} + \frac{\pi}{4} = 0\,,\ 2x_{N_2} + \frac{\pi}{4} = \pi\,,\ 2x_{N_3} + \frac{\pi}{4} = 2\pi\,, \ldots$

Damit ergeben sich über $[0, 2\pi]$ die Nullstellen

$x_{N_2} = \frac{3}{8}\pi\,,\ x_{N_3} = \frac{7}{8}\pi\,,\ x_{N_4} = \frac{11}{8}\pi\,,\ x_{N_5} = \frac{15}{8}\pi$

Extrempunkte:

$\sin\left(2x_E + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \text{oder} \quad \sin\left(2x_E + \frac{\pi}{4}\right) = -1$

Andererseits liegen die Extremstellen mitten zwischen den Nullstellen:

$x_{E_1} = \frac{1}{8}\pi\,,\ x_{E_2} = \frac{5}{8}\pi\,,\ x_{E_3} = \frac{9}{8}\pi\,,\ x_{E_4} = \frac{13}{8}\pi$

$y_{E_1} = 1\,,\ y_{E_2} = -1\,,\ y_{E_3} = 1\,,\ y_{E_4} = -1$

Daraus folgt

$H_1\left(\frac{\pi}{8}; 1\right)\,,\ H_2\left(\frac{9}{8}\pi; 1\right)\,,\ T_1\left(\frac{5}{8}\pi; -1\right)\,,\ T_2\left(\frac{13}{8}\pi; -1\right)$

Wendepunkte:

Aufgrund der geometrischen Struktur der Sinuskurve:

$W_1\left(\frac{3}{8}\pi; 0\right)\,,\ W_2\left(\frac{7}{8}\pi; 0\right)\,,\ W_3\left(\frac{11}{8}\pi; 0\right)\,,\ W_4\left(\frac{15}{8}\pi; 0\right)$

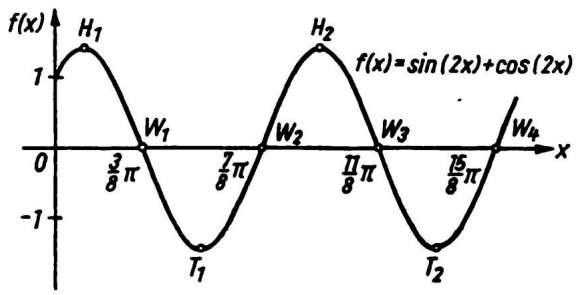


Bild 5.85

Beispiel 5.91

Diskussion des Graphen der Funktion f mit

$f(x) = 2 \cdot \sin x + \sin(2x) \quad \text{für} \quad x \in [0, 2\pi]$

Lösung:

Für Termumformungen werden folgende Additionstheoreme verwendet:

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1\,,\ \sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x\,,\ \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

Nullstellen:

$f(x_N) = 2 \cdot \sin x_N + \sin(2x_N) = 0$

$2\sin x_N + 2\sin x_N \cdot \cos x_N = 2\sin x_N\,(1 + \cos x_N) = 0$

$\sin x_N = 0: \quad x_{N_1} = 0\,,\ x_{N_2} = \pi\,,\ x_{N_3} = 2\pi$

$\cos x_N = -1: \quad x_{N_4} = \pi$

Ableitungen:

$f'(x) = 2\cos x + 2\cos(2x)$

$f''(x) = -2\sin x - 4\sin(2x)$

$f'''(x) = -2\cos x - 8\cos(2x)$

Extrempunkte:

$f'(x_E) = 2\cos x_E + 2\cos(2x_E) = 0$

$2\left(\cos x_E + 2\cos^2 x_E - 1\right) = 0$

$\cos^2 x_E + \frac{1}{2}\cos x_E - \frac{1}{2} = 0: \quad \cos x_{E_{1,2}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$

$\cos x_{E_1} = 0,5: \quad x_{E_{11}} = \frac{\pi}{3}, \quad x_{E_{12}} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$

$\cos x_{E_2} = -1: \quad x_{E_2} = \pi$

$y_{E_{11}} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2,60, \quad y_{E_{12}} = f\left(\frac{5}{3}\pi\right) = -2,60, \quad y_{E_2} = 0$

$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0:$ *Hochpunkt* $H\left(\frac{\pi}{3}; 2,60\right)$

$f''\left(\frac{5}{3}\pi\right) > 0:$ *Tiefpunkt* $T\left(\frac{5}{3}\pi; -2,60\right)$

$f''(\pi) = 0:$ weitere Untersuchung

Wendepunkte:

$f''(x_W) = -2\sin x_W - 4\sin(2x_W) = 0$

$\sin x_W + 4\sin x_W \cdot \cos x_W = \sin x_W\,(1 + 4\cos x_W) = 0$

$\sin x_W = 0: \quad x_{W_1} = 0, \quad x_{W_2} = \pi, \quad x_{W_3} = 2\pi$

$\cos x_W = -\frac{1}{4}: \quad x_{W_4} = 0,58\pi, \quad x_{W_5} = 2\pi - 0,58\pi = 1,42\pi$

$y_{W_1} = y_{W_2} = y_{W_3} = 0, \quad y_{W_4} = 1,45, \quad y_{W_5} = -1,45$

$f'''(0) \neq 0, \quad f'''(\pi) \neq 0, \quad f'''(2\pi) \neq 0$

$f'''(0,58\pi) = -2\cos(0,58\pi) - 8\cos(1,16\pi) > 0$

$f'''(1,42\pi) = -2\cos(1,42\pi) - 8\cos(2,84\pi) > 0$

Im *Innern* des Intervalls erhält man die *Wendepunkte*

$W_1\,(0,58\pi; 1,45), \quad W_2(\pi; 0),$
$W_3\,(1,42\pi; -1,45)$

Dabei ist W_2 ein Sattelpunkt. Der *Randpunkt* $P_1(0;0)$ bzw. $P_2(2\pi; 0)$ ist ein Tief- bzw. Hochpunkt. Wäre f nicht auf das Intervall $[0, 2\pi]$ beschränkt, sondern z.B. für $x \in \mathbb{R}$ gegeben, dann wären auch die jetzigen Randpunkte Wendepunkte.

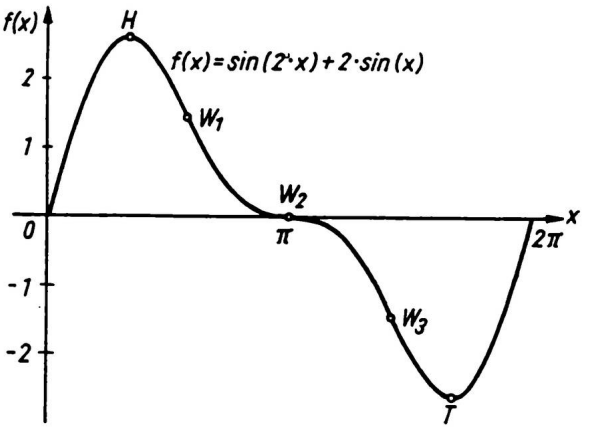


Bild 5.86

Beispiel 5.92

Kurvendiskussion für die Funktion f: $f(x) = x - \sin(2x)$ für $x \in [0, 2\pi]$

Lösung:

Nullstellen (näherungsweise): $x_{N_1} = 0$, $x_{N_2} = 0,95$
Die Frage nach der Existenz weiterer Nullstellen kann graphisch geklärt werden. Sie kann auch beantwortet werden, wenn die Lage der Extrempunkte bekannt ist.

Ableitungen:
$f'(x) = 1 - 2 \cdot \cos(2x)$, $f''(x) = 4\sin(2x)$, $f'''(x) = 8\cos(2x)$

Extrempunkte: $f'(x_E) = 1 - 2 \cdot \cos(2x_E) = 0$

$\cos(2x_E) = \frac{1}{2}$: $2x_{E_1} = \frac{\pi}{3}$, $2x_{E_2} = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7}{3}\pi$, d.h.

$x_{E_1} = \frac{\pi}{6}$, $x_{E_2} = \frac{7}{6}\pi$; $y_{E_1} = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -0,34$, $y_{E_2} = f\left(\frac{7}{6}\pi\right) = 2,80$

Wegen $\cos x = \cos(2\pi - x)$ folgt

$2x_{E_3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$, $2x_{E_4} = \frac{5}{3}\pi + 2\pi = \frac{11}{3}\pi$, d.h.

$x_{E_3} = \frac{5}{6}\pi$, $x_{E_4} = \frac{11}{6}\pi$; $y_{E_3} = 3,48$, $y_{E_4} = 6,63$

$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$, $f''\left(\frac{7}{6}\pi\right) > 0$, $f''\left(\frac{5}{6}\pi\right) < 0$, $f''\left(\frac{11}{6}\pi\right) < 0$

Damit erhält man

Tiefpunkt $T_1\left(\frac{\pi}{6}; -0,34\right)$, Tiefpunkt $T_2\left(\frac{7}{6}\pi; 2,80\right)$

Hochpunkt $H_1\left(\frac{5}{6}\pi; 3,48\right)$, Hochpunkt $H_2\left(\frac{11}{6}\pi; 6,63\right)$

Wendepunkte:
$f''(x_W) = 4\sin(2x_W) = 0$

$x_{W_1} = 0$, $x_{W_2} = \frac{\pi}{2}$, $x_{W_3} = \pi$,

$x_{W_4} = \frac{3}{2}\pi$, $x_{W_5} = 2\pi$

$f'''(x_W) = 8\cos(2x_W) \neq 0 \Longrightarrow$
Wendepunkte über $[0, 2\pi]$:

$W_2\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $W_3(\pi; \pi)$, $W_4\left(\frac{3}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$

Die Punkte $W_1(0; 0)$ und $W_5(2\pi; 2\pi)$ sind als Randpunkte Extrempunkte. Betrachtet man f für $x \in \mathbb{R}$, so sind W_1 und W_5 ebenfalls Wendepunkte.

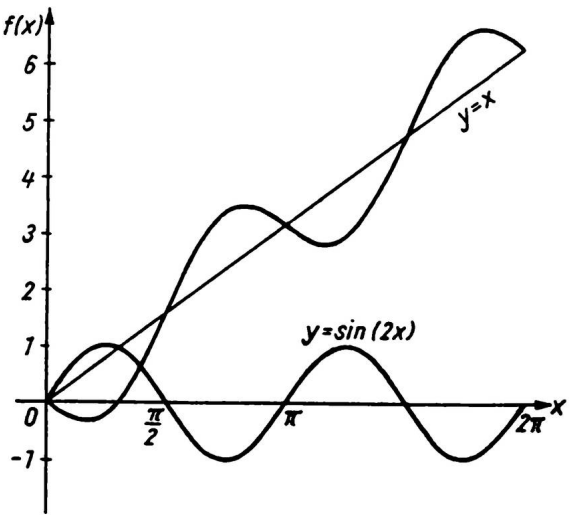


Bild 5.87

Beispiel 5.93

Kurvendiskussion für die Funktion f: $f(x) = e^{-0,1x} \cdot \sin x$ für $x \geq 0$

Lösung:

Nullstellen:

$f(x_N) = e^{-0,1 \cdot x_N} \cdot \sin x_N = 0$:

$x_{N_0} = 0$, $x_{N_1} = \pi$, $x_{N_2} = 2\pi$, $x_{N_3} = 3\pi$, ..., $x_{N_k} = k\pi$, ...

Berührpunkte zwischen Kurve und Hilfskurven zu
$g_1(x) = e^{-0,1x}$ und $g_2(x) = -e^{-0,1x}$:

$\sin x_B = 1$: $x_{B_1} = \frac{\pi}{2}$, $x_{B_3} = \frac{5}{2}\pi$, $x_{B_5} = \frac{9}{2}\pi$, ...

$\sin x_B = -1$: $x_{B_2} = \frac{3}{2}\pi$, $x_{B_4} = \frac{7}{2}\pi$, $x_{B_6} = \frac{11}{2}\pi$, ...

Ableitungen:

$f'(x) = e^{-0,1x}(\cos x - 0,1 \sin x)$ $f''(x) = -e^{-0,1x}(0,2 \cos x + 0,99 \sin x)$

Extrempunkte:

$f'(x_E) = e^{-0,1x_E}(\cos x_E - 0,1 \sin x_E) = 0$:

$\cos x_E - 0,1 \cdot \sin x_E = 0$, $\tan x_E = 10$

Die Tangensfunktion ist periodisch mit Periode π: $x_{E_k} = 0,47\pi + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$f''(x_{E_0}) = f''(0,47\pi) = -e^{-0,1 \cdot 0,47\pi}(0,2 \cos(0,47\pi) + 0,99 \sin(0,47\pi)) < 0$

$f''(x_{E_1}) = f''(0,47\pi + \pi) = f''(1,47\pi) > 0$

$f''(x_{E_2}) = f''(0,47\pi + 2\pi) = f''(2,47\pi) < 0$, ...

Die Vorzeichen wechseln alternierend. Damit erhält man abwechselnd Maxima und Minima für $x \geq 0$:

$H_1(0,47\pi; 0,86)$, $T_1(1,47\pi; -0,63)$, $H_2(2,47\pi; 0,46)$, $T_2(3,47\pi; -0,34)$, ...

Wendepunkte:

$f''(x_W) = -e^{-0,1x_W}(0,2 \cos x_W + 0,99 \sin x_W) = 0$,

$\tan x_W = -\frac{0,2}{0,99} = -0,202$

$x_{W_k} = -0,063\pi + k\pi$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$ wegen $x \geq 0$

f'' wechselt an den Stellen x_W das Vorzeichen, da
$0,2 \cos x + 0,99 \sin x$
eine Sinusfunktion definiert,
die an den Stellen x_W das Vorzeichen wechselt.

Damit erhält man die *Wendepunkte*

$W_1(0,937\pi; 0,15)$,

$W_2(1,937\pi; -0,11)$,

$W_3(2,937\pi; 0,078)$,

$W_4(3,937\pi; -0,06)$, ...

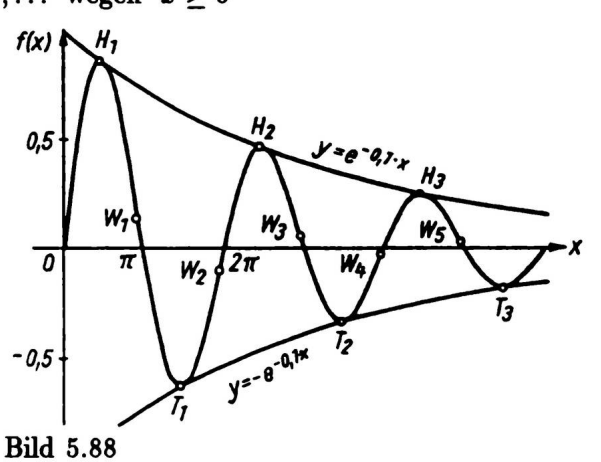


Bild 5.88

Bemerkung: Die Extrempunkte liegen minimal **vor** den Berührpunkten mit den Exponentialkurven.
Der diskutierten Kurve entspricht in der Praxis eine sogenannte *gedämpfte Schwingung.*

Aufgaben 5.64 und 5.65

5.2.11 Extremwertprobleme

In Naturwissenschaft und Technik stellt sich oft die Aufgabe, eine bestimmte Größe unter gewissen Bedingungen zu optimieren. Hier handelt es sich um die Bestimmung eines Extremwertes. Hierzu wertet man die möglichen Beziehungen zwischen Parametern aus, von denen die zu untersuchende Größe in der Regel abhängt, um möglichst eine Funktion einer Veränderlichen zu erhalten, auf die man dann Methoden der Analysis anwendet. Das Verfahren soll an einigen Beispielen erläutert werden.

Beispiel 5.94

Einem parabelförmigen Bogen soll ein Rechteck einbeschrieben werden, das unten offen ist und maximalen Umfang hat (vgl. Bild 5.89).
a) Der Umfang wird in Abhängigkeit der gegebenen Parameter formuliert:
$U = 2(b + h)$
b) Auswertung der Beziehungen zwischen den verschiedenen Größen:
Der Eckpunkt P liegt auf dem Parabelbogen, dessen Gleichung herzuleiten ist:

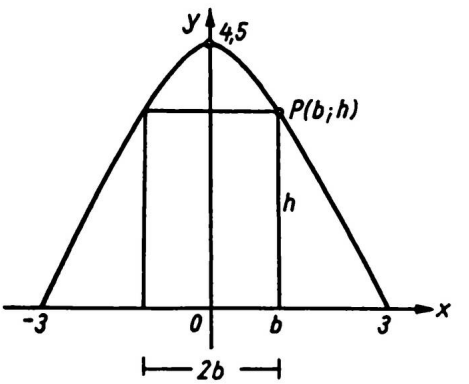


Bild 5.89

$y = a_2x^2 + y_0 = a_2x^2 + 4,5$

$a_2 3^2 + 4,5 = 0: \quad a_2 = -\frac{1}{2} \Longrightarrow y = -\frac{1}{2}x^2 + 4,5$

$\Longrightarrow U = 2\left(b + \left(-\frac{1}{2}b^2 + 4,5\right)\right) = -b^2 + 2b + 9 = f(b)$

Der Umfang ist damit eine Funktion f von b. Man spricht in diesem Zusammenhang von der **Zielfunktion** f.

c) Extremwertbestimmung der Zielfunktion

$f'(x) = -2b + 2 \quad f''(b) = -2 < 0$

$f'(b_E) = -2b_E + 2 = 0: \quad b_E = 1, \quad h_E = -\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 4,5 = 4$

Wegen $f''(b) < 0$ ist der Umfang für $b_E = 1$ und $h_E = 4$ maximal: $U_E = 10$.

Zur Lösung von Extremwertproblemen wird folgende Strategie empfohlen:

a) Angabe der zu optimierenden Größe

Im allgemeinen ist die Größe, für die ein Maximum oder Minimum gesucht wird, von mehreren Variablen abhängig. In vielen Fällen ist eine geometrische Darstellung hilfreich, um geeignete Parameter zur Beschreibung des Problems zu finden.

b) Auswertung von Beziehungen zwischen den Variablen

Die auftretenden Variablen sind in der Regel nicht unabhängig voneinander, sondern erfüllen gewisse Beziehungen. Mit deren Hilfe werden Parameter eliminiert, so daß die zu optimierende Größe eine Funktion von einer Variablen wird. Man nennt sie Zielfunktion.

c) Bestimmung der Extremwerte der Zielfunktion

Die Zielfunktion ist in der Regel über einem endlichen Intervall definiert. Die relativen Extremwerte im Innern dieses Intervalles können mit Mitteln der Analysis bestimmt werden. Zusätzlich ist das Randverhalten zu untersuchen. Das betrifft insbesondere Randextrema.

d) Relevanz der Lösung

Die erhaltenen Ergebnisse sind hinsichtlich der Aufgabenstellung zu überprüfen. Aufgrund besonderer Randbedingungen scheiden rein rechnerisch erhaltene Lösungen gegebenenfalls aus.

Beispiel 5.95

Ein offenes Gerinne mit trapezförmigem Querschnitt soll mit Platten derselben Breite a so ausgelegt werden, daß der Flächeninhalt A des Querschnittes maximal ist. Wie ist der Winkel α unter dieser Bedingung zu wählen?

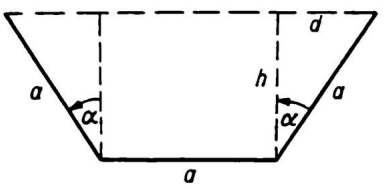


Bild 5.90

Lösung:

a) Der Flächeninhalt A wird in Abhängigkeit der gegebenen Größen formuliert, wobei die geometrisch naheliegenden Hilfsgrößen h und d verwendet werden:

$$A = a \cdot h + 2 \cdot \frac{h \cdot d}{2} = ah + hd$$

b) Die Beziehungen zwischen den Parametern werden ausgewertet:

$$d = a \cdot \sin\alpha\,, \quad h = a \cdot \cos\alpha \quad \Longrightarrow \quad A = a^2 \cos\alpha + a^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha = f(\alpha)$$

Damit erhält man A als Funktion f des Winkels α . f ist die *Zielfunktion.*

c) Zur Bestimmung des Extremwertes werden die Methoden der Analysis angewendet:

Extremwert: $f'(\alpha_E) = 0$

$$f'(\alpha) = a^2\left(-\sin\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = a^2\left(-\sin\alpha + 1 - 2\sin^2\alpha\right)$$

$$f'(\alpha_E) = a^2\left(-2\sin^2\alpha_E - \sin\alpha_E + 1\right) = 0$$

$$\sin^2\alpha_E + \frac{1}{2}\sin\alpha_E - \frac{1}{2} = 0 \Longrightarrow$$

$$\sin\alpha_{E_1} = \frac{1}{2}: \quad \alpha_{E_{11}} = \frac{\pi}{6}, \quad \alpha_{E_{12}} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

$$\sin\alpha_{E_2} = -1: \quad \alpha_{E_2} = \frac{3}{2}\pi$$

Aus technischen Gründen ist nur $\alpha = \frac{\pi}{6}$ sinnvoll.

Art des Extremums:

$f''(\alpha) = -a^2(\cos\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha)$

$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0 \Longrightarrow$ Der Flächeninhalt ist für $\alpha = \frac{\pi}{6}$ maximal.

Beispiel 5.96

Gegeben sei die Funktion

$f: \quad f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

Gemäß Bild 5.91 ist ein Rechteck im ersten Quadranten so zu bestimmen, daß der Flächeninhalt maximal ist. Wie ist in diesem Falle die Breite b zu wählen?

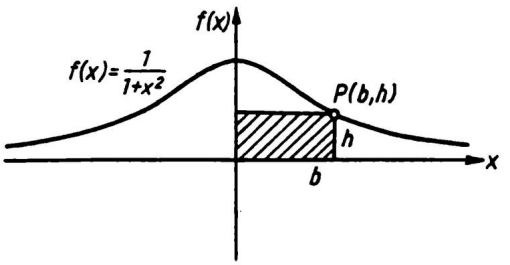


Bild 5.91

Lösung:

a) *Flächeninhalt:* $A = b \cdot h$

b) *Bestimmung der Zielfunktion:*

Da ein Eckpunkt des Rechtecks auf dem Graphen liegt, folgt

$$A = b \cdot h = b \cdot \frac{1}{b^2+1} = \frac{b}{b^2+1} = f(b)$$

mit der Zielfunktion f (Flächeninhaltsfunktion).

c) *Extremwerte*

Man erhält

$$f'(b) = \frac{1-b^2}{(b^2+1)^2}, \quad f''(b) = \frac{2b^3-6b}{(b^2+1)^3}$$

$$f'(b_E) = \frac{1-b_E^2}{(b_E^2+1)^2} = 0: \quad b_{E_{1,2}} = \pm 1$$

Wegen der Vorgaben scheidet $b_{E_2} = -1$ aus.

$f''(1) = -\frac{4}{8} < 0$: Für $b_{E_1} = 1$ liegt ein relatives Maximum von A vor mit

$$A = \frac{b_{E_1}}{b_{E_1}^2+1} = \frac{1}{2}.$$

An den Rändern ist

$$\lim_{b\to 0} \frac{b}{b^2+1} = 0$$

und

$$\lim_{b\to\infty} \frac{b}{b^2+1} = 0$$

Daher ist das erhaltene relative Maximum auch das absolute Maximum.

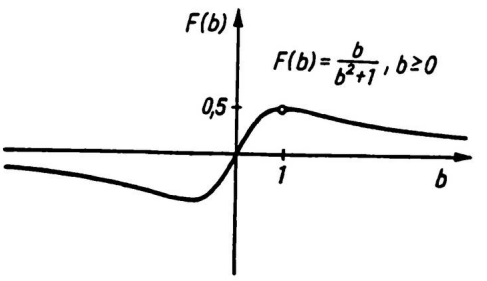


Bild 5.92

Aufgaben 5.66 bis 5.73

5.2.12 Bestimmung von Nullstellen: Iterationsverfahren nach Newton

Eine der grundlegenden Aufgaben in der Mathematik ist die Bestimmung der Lösungen einer Gleichung $f(x) = 0$. Auf dieses Problem kann auch die Ermittlung von Schnittstellen zweier Kurven zurückgeführt werden, die durch Funktionen f_1 und f_2 beschrieben werden: Die Bedingung $f_1(x) = f_2(x)$ ist gleichwertig mit der Gleichung $f(x) = f_1(x) - f_2(x) = 0$ der Differenzfunktion $f = f_1 - f_2$. Die Fragestellung umfaßt auch die Berechnung von Extrem- und Wendestellen differenzierbarer Funktionen über die notwendigen Bedingungen $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$. Im allgemeinen kann eine Nullstelle einer Funktion nicht direkt bestimmt werden. In der Regel werden Näherungsverfahren benutzt. Im folgenden wird ein **Iterationsverfahren von** NEWTON dargestellt, das wesentlich Tangenten verwendet und daher auch **Tangentenverfahren** heißt. Diesem liegt folgende Idee zugrunde:

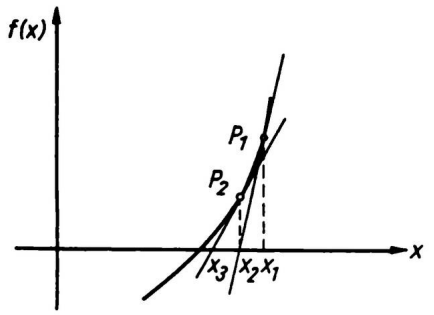


Bild 5.93

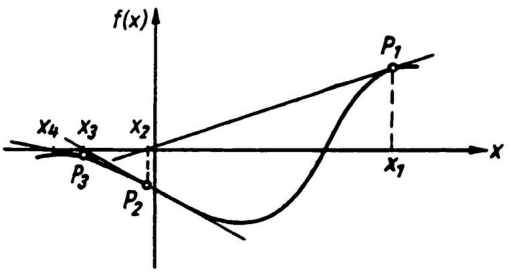


Bild 5.94

Man wählt eine Stelle x_1 in einer Umgebung der Nullstelle x_0, die berechnet werden soll (Bild 5.93). Die Tangente im Punkt $P_1(x_1; f(x_1))$ schneidet die x-Achse an der Stelle x_2. Diese wird nun gewählt, um im Punkt $P_2(x_2; f(x_2))$ die Tangente zu erhalten, die mit der x-Achse eine Schnittstelle x_3 erzeugt. Dieses Verfahren kann schrittweise fortgesetzt werden. Man erhält dann eine Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$, die unter geeigneten Voraussetzungen tatsächlich gegen die Nullstelle x_0 konvergiert. Bild 5.94 deutet an, daß das Verfahren bei ungünstigen Bedingungen nicht konvergieren muß.

Um die Näherungswerte $x_2, x_3 \ldots$ zu erhalten, wird die Gleichung der Tangente durch $P_1(x_1; f(x_1))$ angegeben:

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$$

Die Schnittstelle x_2 wird aus

$$f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1) = 0$$

ermittelt:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Hierbei muß $f'(x) \neq 0$ vorausgesetzt werden. Nun wird x_2 als neuer Startwert gewählt. Führt man dieses Verfahren schrittweise fort, so folgt allgemein

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.96}$$

Diese Iterationsvorschrift definiert das Newtonsche Tangentenverfahren.

Beispiel 5.97

Die Nullstellen der Funktion f mit

$f(x) = x^3 + 1,27x^2 - 3,19x - 3,46$ sind zu bestimmen.

Lösung:

Um die ungefähre Lage einer Nullstelle zu kennen, werden Funktionswerte mit unterschiedlichen Vorzeichen berechnet. So ist z.B. $f(0) < 0$ und $f(2) > 0$.
Als Startwert wird $x_1 = 2,0$ gewählt.
Mit

$f'(x) = 3x^2 + 2,54x - 3,19$

berechnet man nach

$x_{x+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

schrittweise $x_2, x_3, \ldots$.

n	x_n	$f(x_n)$
1	2	3,24
2	1,766739	0,382875
3	1,730827	0,008427
4	1,73	0,000004
5	1,73	$1,215028 \cdot 10^{-12}$
6	1,73	0

$x_0 = 1,73$ ist Nullstelle.

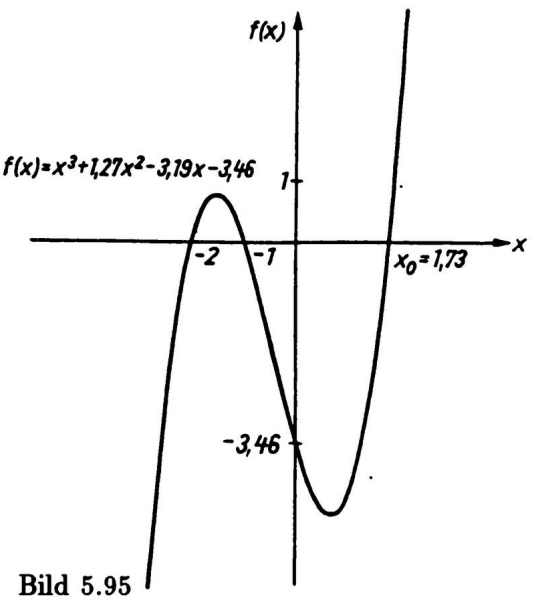


Bild 5.95

Weitere Nullstellen werden mit Hilfe der Polynomdivision untersucht:

$$\begin{array}{rl} (x^3 + 1,27x^2 - 3,19x - 3,46) : (x - 1,73) = x^2 + 3x + 2 \\ -(x^3 - 1,73x^2) \\ \hline 3x^2 - 3,19x \\ -(3x^2 - 5,19x) \\ \hline 2x - 3,46 \\ -(2x - 3,46) \\ \hline 0 \end{array}$$

Aus $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(x - 1,73) = 0$ ergeben sich die weiteren Lösungen $x_{N_1} = -1$ und $x_{N_2} = -2$, so daß $f(x) = (x - 1,73) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)$ ist. Bild 5.95 zeigt den Graphen.

Beispiel 5.98

Zu bestimmen sind die Nullstellen der Funktion f mit

$f(x) = x - \sin(2x)$ für $x \geq 0$

Lösung:

Nach Beispiel (5.92) ist die *ungefähre* Lage der Nullstelle $x_0 > 0$ bekannt. Als Startwert wird $x_1 = 0,9$ gewählt. Mit $f'(x) = 1 - 2\cos(2x)$ erhält man bei Verwendung der Newtonschen Iterationsformel:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
1	0,9	−0,073848	1,454404
2	0,950775	0,004977	1,649513
3	0,947758	0,000017	1,638085
4	0,947747	$2,098471 \cdot 10^{-10}$	1,638045
5	0,947747	0	1,638045
6	0,947747	0	1,638045

Die Nullstelle ergibt sich an $x_0 = 0,947747$ nach wenigen Iterationsschritten.

Beispiel 5.99

Man bestimme die kleinste positive Nullstelle der Funktion f mit

$f(x) = \tan x - x$.

Lösung:

Die Nullstelle ergibt sich als Lösung der Gleichung $f(x_0) = 0$ bzw. $\tan x_0 = x_0$. In diesem Fall kann die ungefähre Lage der Schnittstelle von $f_1(x) = \tan x$ und $f_2(x) = x$ geometrisch ermittelt werden:

Mit Hilfe der Ableitung $f'(x) = \tan^2 x$ ergibt die Newtonsche Methode bei dem Startwert $x_1 = 4,5$ die Nullstelle $x_0 = 4,493409$:

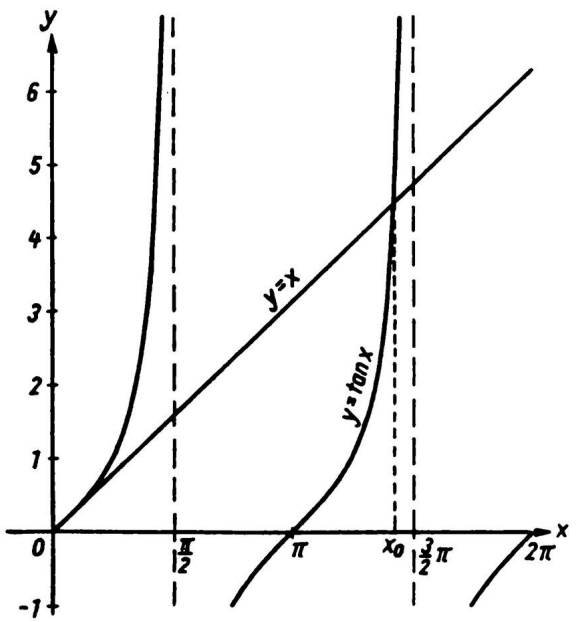


Bild 5.96

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
1	4,5	0,137332	21,504849
2	4,493614	0,004132	20,229717
3	4,49341	0,000004	20,190766
4	4,493409	$3,694822 \cdot 10^{-12}$	20,190729
5	4,493409	0	20,190729
6	4,493409	0	20,190729

Als Sonderfall der Newtonschen Näherungsmethode kann die Berechnung einer Wurzel $\sqrt[k]{a}$ für $k = 2, 3, \ldots$ und $a > 0$ gelten. Dann legt man die Gleichung

$$x^k = a$$

zugrunde und bestimmt die Nullstelle der Funktion f mit

$$\boxed{f(x) = x^k - a}\,.$$

Aus der Formel (5.96) folgt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - a}{k\, x_n^{k-1}} \quad \text{und nach Umformung (vgl. (5.22))}$$

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)\, x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right)}$$

Wie oben angedeutet wurde, ist beim Tangentenverfahren von NEWTON keine Konvergenz zu erwarten, wenn z.B. $f'(x)$ in der Umgebung der Nullstelle fast gleich null ist, so daß die Nachbartangenten nur schwach geneigt sind und die x-Achse erst in großen Abständen schneiden.
In diesem Zusammenhang gilt folgendes *Kriterium*, das hier jedoch nicht bewiesen wird:

Satz

Die Funktion f sei über einem Intervall $[a, b]$ zweimal stetig differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für alle x aus dem Intervall (a, b). Ferner werde $f(a) \cdot f(b) < 0$ angenommen. Dann existiert eine Nullstelle $x_0 \in (a, b)$. Ist $x_1 \in (a, b)$ eine Stelle, die der Bedingung

$$\left|\frac{f(x_1) \cdot f''(x_1)}{(f'(x_1))^2}\right| < 1$$

genügt, so konvergiert die Folge $\{x_n\}$ mit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots$$

gegen die Nullstelle x_0. (5.97)

5.3 Aufgaben

5.1 Von den folgenden Folgen sind die ersten fünf Glieder anzugeben ($n = 1, 2, 3, 4, 5$).

a) $\left\{3 + \frac{1}{n}\right\}$ b) $\left\{(-1)^n \frac{1}{2n-1}\right\}$ c) $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$

d) $\left\{\frac{1}{2}(1 - (-1)^n)\right\}$ e) $\left\{\frac{2n+1}{5^{2n-1}}\right\}$ f) $\left\{(-1)^n \frac{n!}{n^n}\right\}$

5.2 Das allgemeine Glied jeder Folge $\{x_n\}$ ist zu bestimmen.

a) $\{x_n\}$: $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$

b) $\{x_n\}$: $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \ldots$

c) $\{x_n\}$: $\frac{1}{6}, \frac{1}{20}, \frac{1}{42}, \frac{1}{72}, \ldots$

d) $\{x_n\}$: $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, \ldots$

5.3 Die Monotonie ist zu untersuchen ($n \in \mathbb{N}^*$)

a) $\left\{2 - \frac{1}{n^2}\right\}$ b) $\left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}$ c) $\left\{\frac{n}{4n-1}\right\}$

d) $\left\{\frac{3}{n^2+1}\right\}$ e) $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$

5.4 Für jede Folge $\{x_n\}$ sind das Glied x_{10} und der Summenwert s_{10} anzugeben.

a) $\{x_n\}$: $1, 5, 9, 13, \ldots$

b) $\{x_n\}$: $2, 4, 6, 8, \ldots$

c) $\{x_n\}$: $5, 20, 35, 50, \ldots$

d) $\{x_n\}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

e) $\{x_n\}$: $\frac{3}{4}, \left(\frac{3}{4}\right)^2, \left(\frac{3}{4}\right)^3, \ldots$

5.5 Von welchem Index n ab sind die Glieder der geometrischen Folge

a) $\{x_n\}$: $4, 8, 16, \ldots$ größer als 10^3

b) $\{x_n\}$: $600, 450, \ldots$ kleiner als 10^{-3}

5.6 Es ist zu beweisen:

Sind $\{u_n\}: \quad u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ und $\{v_n\}: \quad v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ geometrische Folgen, so gilt dies auch für die Folgen

a) $\{u_n^2\}: \quad u_1^2, u_2^2, \ldots, u_n^2, \ldots$

b) $\{u_n v_n\}: \quad u_1 v_1, u_2 v_2, \ldots, u_n v_n, \ldots$

c) $\left\{\frac{u_n}{v_n}\right\}: \quad \frac{u_1}{v_1}, \frac{u_2}{v_2}, \ldots, \frac{u_n}{v_n}, \ldots \quad$ für $v_n \neq 0$

5.7 Mit Hilfe vollständiger Induktion ist zu beweisen ($n \in \mathbb{N}^*$)

a) $2 + 4 + \ldots + 2n = n(n+1)$ b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$

c) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

5.8 Folgende Ungleichungen sind nachzuweisen

a) $2^n > n$ für $n \in \mathbb{N}^*$ b) $3^n > 3n$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

5.9 Es ist nachzuweisen, daß die angegebenen Folgen $\{x_n\}$ Nullfolgen sind. Der Index $N(\varepsilon)$ zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ist anzugeben, von dem ab $|x_n| < \varepsilon$ ist.
Dann ist $N(\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0{,}01$ zu berechnen.

a) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ b) $\left\{\left(\frac{1}{3}^n\right)\right\}$ c) $\left\{\frac{6}{4n-1}\right\}$

d) $\left\{\frac{16}{n^2}\right\}$ e) $\left\{\frac{4}{n^2+2}\right\}$ f) $\left\{\sqrt[n]{2} - 1\right\}$

5.10 Der Grenzwert g der Folge $\{x_n\}$ für $n \to \infty$ ist zu berechnen. Dabei ist der Index $N(\varepsilon)$ anzugeben, von dem an $|g - x_n| < \varepsilon$ ist.

a) $\left\{\frac{5n}{2n-1}\right\}$ b) $\left\{\frac{n^2}{n^2+1}\right\}$ c) $\left\{\frac{(n-5)^2}{n^2+1}\right\}$

5.11 Der Summenwert der unendlichen geometrischen Reihe ist auszurechnen.

a) $\frac{10}{2} + \frac{10}{2^2} + \frac{10}{2^3} + \ldots$ b) $3 - \frac{3}{3} + \frac{3}{9} - \frac{3}{27} + \ldots$

5.12 Nach welchem Glied kann die unendliche geometrische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

abgebrochen werden, wenn der Fehler höchstens 1% betragen darf?

5.13 Die periodischen Dezimalzahlen sind als Brüche darzustellen

a) $1{,}\overline{2} = 1{,}2222222\ldots$ b) $3{,}0\overline{4}$ c) $2{,}0\overline{245}$

5.14 Die folgenden Grenzwerte sind zu untersuchen

a) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2+1}$ b) $\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^2+3x+2}$ c) $\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x}{1-\sqrt{x+1}}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x \sin x}{x}$

5.15 An der Definitionslücke der gegebenen Funktion f ist die Existenz von links- und rechtsseitigen Grenzwerten zu klären.

a) $f(x)=\dfrac{x}{x}$ für $x\neq 0$ b) $f(x)=\dfrac{|x+1|}{x+1}$ für $x\neq -1$

c) $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ für $x\neq 0$ d) $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ für $x\neq 0$

e) $f(x)=\dfrac{1}{2+2^{\frac{1}{x}}}$ für $x\neq 0$ f) $f(x)=\dfrac{1}{(x+3)^2}$ für $x\neq -3$

5.16 Der Grenzwert ist zu überprüfen

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{x^2+x+5}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+4x}{3x^2-5}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+x^2+1}{2x^3+6}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^7}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^n \mathrm{e}^{-x^2}\right)$

Das Verhalten der Funktionen f in den Aufgaben 5.17 bis 5.21 ist in der Umgebung der Stelle x_0 zu untersuchen. Liegt Stetigkeit oder Unstetigkeit vor? Existiert gegebenenfalls eine hebbare oder nicht hebbare Lücke?

5.17 a) $f(x)=|x-2|\,,\quad x_0=2$ b) $f(x)=|x+2|^2\,,\quad x_0=-2$

c) $f(x)=1+\dfrac{|x|}{x}\,,\quad x_0=0$

5.18 $f(x)=\left\{\begin{array}{ll} x & \text{für } x<1 \\ 2x^2-8x+7 & \text{für } x\geq 1 \end{array}\right\},\quad x_0=1$

5.19 a) $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-2}\,,\quad x_0=2$ b) $f(x)=\dfrac{x^3-x}{x+1}\,,\quad x_0=-1$

c) $f(x)=\dfrac{2}{x+3}\,,\quad x_0=-3$ d) $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}\,,\quad x_0=2$

5.20 a) $f(x)=\sqrt{|x|}\,,\quad x_0=0$ b) $f(x)=\sqrt{|x+2|}\,,\quad x_0=-2$

c) $f(x)=\sqrt{(x-1)^2}\,,\quad x_0=1$

5.21 a) $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\,,\quad x_0=0$ b) $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}\,,\quad x_0=0$

5.22 Die jeweiligen Ableitungen sind zu bilden.

a) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x+4$ b) $f(x)=ax^4-bx^2+7\,,\quad a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

c) $f(x)=(x-2)^3\cdot(x^5-1)$ d) $f(x)=(x^2+4)\cdot(2x^2-8)$

e) $g(t)=3t^2+2t+4$

5.23 Gegeben sei die Funktionsgleichung $y=f(x)=x^3$

a) Die Gleichungen von Tangente und Normale im Punkt $P(1;1)$ sind anzugeben.

b) Wie lauten die Gleichungen der Tangenten an die Kurve mit der Steigung 12?

5.24 Das Polynom 3. Ordnung

$P_3: \quad y = P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

ist zu bestimmen, falls gilt:

$f(0) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f'(0) = 0 \quad \text{und} \quad f'(1) = 2$

5.25 Die Ableitung an der Stelle $x_0 = -2$ ist zu berechnen.

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2+x}{-x+2}$ c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

d) $f(x) = \dfrac{2x-2}{(4x+2)^2}$

5.26 Man differenziere

a) $f(x) = \dfrac{ax+b}{ax+d}$ b) $g(t) = \dfrac{3t^2-1}{1+t^2}$

c) $f(x) = \dfrac{ax^2+a^2x}{x+a}$ für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

5.27 Man bestimme die jeweilige Ableitung

a) $f(x) = \sqrt{x}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2x+2}}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{3x^2+x+1}}$ f) $f(x) = \dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$

g) $f(x) = \dfrac{a}{a-\sqrt{x}}$ für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

h) $f(x) = \sqrt[4]{(ax+b)^2}$ i) $f(x) = \sqrt{(ax+b)^4}$

j) $f(x) = \sqrt[3]{(4x^2+1)^2}$ k) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{a+x}}$

5.28 Man untersuche die stetigen Funktionen aus den Aufgaben 5.17 bis 5.20 an den dort angegebenen Stellen auf Differenzierbarkeit.

5.29 Man bilde jeweils die Ableitung

a) $f(x) = \sin x + \cos x + 1$ b) $f(x) = \tan x - \cot x$

c) $f(x) = \sin^2 x$ d) $f(x) = \cos(3x+1)$

e) $f(x) = \cos(3x+1)^2$ f) $f(x) = \cos^2(3x+1)$

g) $f(x) = \tan(\sin x)$ h) $f(x) = \cot\sqrt{x}$

5.30 Wie lauten die Ableitungen?

a) $f(x) = \sqrt{x + \sin(2x)}$ b) $f(x) = \sin\sqrt{x}$

c) $f(x) = \sqrt{\sin x}$ d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{\cos x}}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1+\tan x}$ f) $g(t) = \sin(\omega t + \varphi)$

5.31 Man differenziere

a) $f(x) = \arcsin(2x)$ b) $f(x) = \arcsin(x^2)$

c) $f(x) = \arcsin^2 x$ d) $f(x) = \arctan \frac{x}{b}$

e) $f(x) = \arctan \sqrt{1+x^2}$ f) $f(x) = x^2 \arccos \frac{1}{x}$

Von den Funktionen der Aufgaben 5.32 bis 5.40 sind jeweils die Ableitungen zu bilden:

5.32 a) $f(x) = \ln(x+2)$ b) $f(x) = \ln\left((x+2)^2\right)$

c) $f(x) = \ln^2(x+2)$

5.33 a) $f(x) = \log_a(4x+5)$ b) $f(x) = \log_a\left(\left(3x^2+1\right)^2\right)$

c) $f(x) = \log_a(x^n)$ für $a > 0$ und $a \neq 0$

5.34 a) $f(x) = \ln(\tan x)$ b) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

5.35 a) $f(x) = \ln|\sin x|$ b) $f(x) = \ln|\cos x|$

c) $f(x) = \ln|g(x)|$

5.36 Differentiation nach Logarithmieren

a) $f(x) = x^{\cos x}$ b) $f(x) = x^{x \sin x}$ c) $f(x) = x^{\ln x}$

5.37 a) $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$ b) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ c) $f(x) = x^{\cos 2x}$

5.38 a) $f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ b) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ c) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

5.39 a) $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x^2}$ b) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}$ c) $f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x^2}}$

5.40 a) $f(x) = 2^{-x^2}$ b) $f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ c) $f(x) = 2^{-\frac{1}{x^2}}$

5.41 Man beweise die Aussagen

a) $\sinh(u+v) = \sinh u \cdot \cosh v + \cosh u \cdot \sinh v$

b) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

c) $\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

5.42 Wie lautet die erste Ableitung?

a) $f(x) = \coth \frac{x}{2}$ b) $f(x) = \ln \sinh(2x)$

c) $f(x) = \ln \sqrt{\tanh(2x)}$ d) $f(x) = \mathrm{e}^{\cosh x}$

5.43 Man differenziere

a) $f(x) = \operatorname{arsinh} \frac{x}{2}$ b) $f(x) = \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{x}\right)$

c) $f(x) = \operatorname{artanh}(\sin x)$ d) $f(x) = \operatorname{artanh} \frac{x}{1+x^2}$

5.44 Die folgenden Grenzwerte sind zu berechnen.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+4x-5}{4x^3-2}$

5.45 Man berechne die Grenzwerte, sofern sie existieren.

a) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{1-\cos x}$ d) $\lim\limits_{x\to+0} \ln x \cdot \tan x$

5.46 a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 \cdot e^{-x}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} \cdot \ln x$

d) $\lim\limits_{x\to+0} x \ln x$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} x \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to+0} x^x$ (Tip: $x = e^{\ln x}$) h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

5.47 Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = 2x^2+2x-4$. Man bestimme die Nullstellen von f und die Koordinaten des Extrempunktes und skizziere den Graphen.

5.48 Man skizziere die Parabel zur Funktion f mit

$f(x) = x^2 - 2x + 3$

unter Angabe des Scheitelpunktes S.
Die Gleichungen der Tangente und Normale durch den Punkt $P_1\,(3; f\,(3))$ sind anzugeben. Wie lauten die Koordinaten des zweiten Schnittpunktes P_2 von Normale und Parabel? In welchem Punkt P_3 und unter welchem Schnittwinkel γ schneiden sich die Tangenten durch P_1 und P_2?

5.49 Zu bestimmen ist die Gleichung einer quadratischen Parabel, deren Achse parallel zur y-Achse verläuft, auf der der Kurvenpunkt $P_1(1;1)$ liegt und deren Steigung im Punkt $P_2(0;0)$ gleich -2 ist?

5.50 Geben Sie die Gleichung der quadratischen Parabel an, falls die Werte h und b gemäß Bild 5.97 vorgegeben sind.

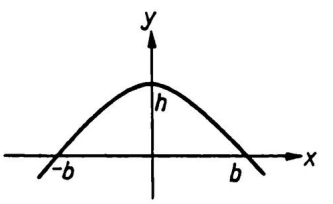


Bild 5.97

5.51 Die Funktion f mit $f(x) = (x-1)^2 + 2$ definiert eine quadratische Parabel. Die Gleichung $g(x) = mx$ mit $m \in \mathbb{R}$ beschreibt eine Schar von Geraden durch den Ursprung des Koordinatensystems.

a) Man skizziere die Graphen.
b) Für welche Werte von m berühren die Geraden die Parabel?
c) Wie lautet der Schnittwinkel γ zwischen den Tangenten aus b) ?
d) Für welchen Wertebereich von m haben die Geraden mit der Parabel keinen Schnittpunkt?

5.52 Die folgenden Funktionen sind auf Symmetrie, Nullstellen, asymptotisches Verhalten, Extrem- und Wendepunkte zu untersuchen. Der jeweilige Graph ist zu skizzieren. Bei den Aufgaben i) und j) ist zusätzlich die Differenzierbarkeit zu klären.

a) $f(x) = x^3 - 4x$ b) $f(x) = x^2(x-2)$

c) $f(x) = x(x-2)^2$ d) $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 4x$

e) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ f) $f(x) = -\frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 3x^2$

g) $f(x) = |x^2 + x| \cdot x$ h) $f(x) = |x^3| - x^2 - 4$

5.53 Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x$.

a) Skizziere den Graphen von f mit Angabe von Extrem- und Wendepunkten.
b) Wie lautet die Gleichung der Tangente im Punkt $P_1(3; f(3))$?
c) Durch den Punkt P_1 verläuft eine weitere Tangente an die kubische Parabel, die diese im Punkt P_2 berührt. Man bestimme die Koordinaten von P_2.
d) Welchen Winkel γ schließen die beiden Tangenten ein?
e) Die Gleichung der Winkelhalbierenden des Winkels γ ist anzugeben.

5.54 Die Gleichung einer kubischen Parabel ist gegeben durch

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (a_3 \neq 0)$

Man zeige:

a) Die kubische Parabel hat höchstens zwei Extrempunkte.
b) Es existiert ein Wendepunkt W.
c) Sind ein Hochpunkt $H(x_H; y_H)$ und ein Tiefpunkt $T(x_T; y_T)$ vorhanden, so gilt für die Koordinaten des Wendepunktes

$$W(x_W; y_W): \; x_W = \frac{1}{2}(x_H + x_T), \; y_W = \frac{1}{2}(y_H + y_T)$$

5.55 Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat im Punkt $E(1;9)$ einen Extrempunkt und im Punkt $W(3;1)$ einen Wendepunkt.
Zu bestimmen ist ein Polynom dritten Grades, dessen Gleichung in allgemeiner Form lautet:

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{mit} \quad a_3 \neq 0.$

Wie lauten die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3?
Der Kurvenverlauf ist zu skizzieren.

5.56 Eine Schar von kubischen Parabeln sei definiert durch die Schar von Gleichungen

$$f_a(x) = ax^3 + x^2 - \frac{1}{a}x \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

a) Man zeige
   α) Jede der kubischen Parabeln hat 3 Schnittpunkte mit der x-Achse.
   β) Jede Parabel hat einen Hochpunkt H und einen Tiefpunkt T. Wie lauten die Koordinaten dieser Punkte in Abhängigkeit von a?
b) Man bestimme die Gleichung der Kurve, auf der die Hochpunkte der Parabelschar liegen.

5.57 Zu bestimmen ist die Gleichung einer Parabel 4. Ordnung, die im Wendepunkt $W(0;0)$ und für $x = 6$ waagerechte Tangenten hat und die x-Achse ein zweites Mal mit der Steigung -8 schneidet. Die Kurve ist zu skizzieren.

5.58 Für die folgenden Funktionen f ist eine Kurvendiskussion durchzuführen. Man diskutiere dazu den Definitionsbereich, Symmetrieeigenschaften, Nullstellen, asymptotisches Verhalten für $|x| \to \infty$ (Gleichung der Asymptote), das Verhalten an Definitionslücken (Polstellen, hebbare Lücken), Extrem- und Wendepunkte und skizziere den jeweiligen Graphen.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2}$ e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$ f) $f(x) = \dfrac{1}{x^3-x}$

g) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ h) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3+x^2-6x}$ i) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{(x-2)^2}$

j) $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2-3x+4}{(x-2)^2}$

5.59 Eine Funktionenschar f_a für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei definiert durch die Schar von Gleichungen

$$f_a(x) = \frac{2x}{(x^2+a)^2}$$

Man führe eine Kurvendiskussion durch. Dabei sind Definitionsbereich, Nullstellen, Extrem- und Wendestellen in Abhängigkeit des Parameters a anzugeben. Wie verhält sich die Funktionenschar an den Grenzen des Definitionsbereiches? Man skizziere die Graphen für $a = 4$ und $a = -4$.

5.60 Für die folgenden Funktionen sind Kurvendiskussionen durchzuführen (Definitionsbereich, Symmetrie, Nullstellen, asymptotisches Verhalten für $|x| \to \infty$, Verhalten an Definitionslücken, Extrem- und Wendepunkte).

a) $f(x) = 2 - \mathrm{e}^{-2x}$ b) $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-3x}$ c) $f(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$

d) $f(x) = (x^2-1)\,\mathrm{e}^{-x}$ e) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x-1}$ f) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x+2}{\mathrm{e}^x+1}$

g) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$ h) $f(x) = (\ln x)^2$ i) $f(x) = 2\ln x$

j) $f(x) = \ln(x^2+1)$ k) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

5.61 Man diskutiere die Funktionenschar f_a mit

$f_a(x) = 2 - \mathrm{e}^{-ax}$ für $a \in \mathbb{R}$

5.62 Gegeben sei die Schar von Funktionen f_a mit

$$f_a(x) = \frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{-ax^2} \quad \text{für } a > 0$$

a) Diskussion der Kurvenschar und Angabe der Graphen für $a = 1$, $0,5$ und $0,25$

b) Kurvendiskussion für die Ableitungsfunktion f_a' und Skizze der Graphen für $a = 1$, $0,5$ und $0,25$.

c) Man bestimme die Koordinaten des Schnittpunktes S_a der Graphen von f_a und f_a' für allgemeines $a > 0$. Wie lautet die Gleichung der Kurve, auf der die Schnittpunkte S_a liegen, falls a die positiven Werte durchläuft?

5.63 Kurvendiskussion für die Funktion f mit Graph für

a) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ b) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

5.64 Die folgenden Funktionen sind für $x \in [0, 2\pi]$ zu diskutieren (Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte, Verhalten an Definitionslücken).

a) $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ b) $f(x) = \cos x + \sin x \cos x$

c) $f(x) = \cos x - \cos(2x)$ d) $f(x) = -\sin^2 x + 1{,}5\sin x - 0{,}5$

e) $f(x) = \frac{1}{\sin(2x)}$ f) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$

g) $f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$ h) $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

i) $f(x) = \sin^2 x$ j) $f(x) = \sin\left(x^2\right)$

5.65 Man führe eine Kurvendiskussion mit Skizze des Graphen durch:

a) $f(x) = x + \sin x$ b) $f(x) = e^{-0{,}1x}\cos x$

c) $f(x) = \frac{x}{\sin x}$

5.66 Einer Kugel mit Radius R ist ein gerader Kegel mit Höhe h und Grundkreisradius r so einzubeschreiben, daß sein Volumen maximal ist. Man bestimme h und das maximale Kegelvolumen.

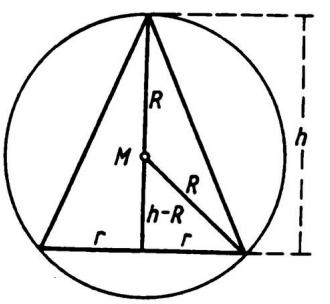


Bild 5.98

5.67 Aus einem zylindrischen Stamm mit Radius R soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt geschnitten werden. Wie sind Höhe h und Breite b zu wählen, damit

a) der Flächeninhalt $A = hb$

b) das Widerstandsmoment $W = \frac{1}{6}bh^2$

c) das Trägheitsmoment $I = \frac{1}{12}bh^3$

maximal ist.

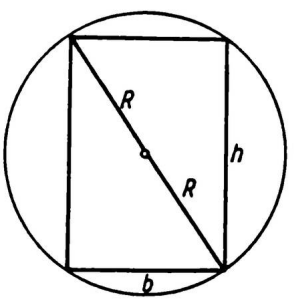


Bild 5.99

5.68 Gegeben sei eine quadratische Parabel mit der Gleichung

$y = ax^2 + b$ mit $a < 0$ und $b > 0$.

Eine Gerade durch den linken Schnittpunkt A mit der x-Achse schneidet die Parabel im Punkt B. Welche Gerade und welcher Punkt B sind zu wählen, damit der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC maximal wird?

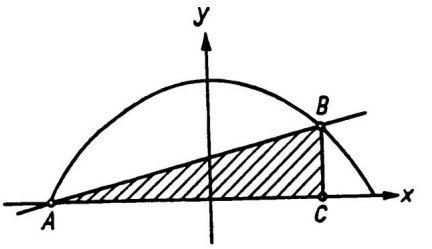


Bild 5.100

5.69 Ein Faß von der Form eines Kreiszylinders hat im Mittelpunkt einer Mantellinie eine Öffnung A. Der Abstand zwischen A und dem entferntesten Punkt B am Boden sei e. In welchem Verhältnis müssen Durchmesser d und Länge h des Fasses zueinander gewählt werden, damit der Rauminhalt maximal wird?

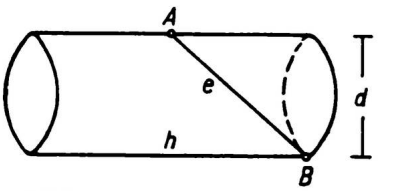


Bild 5.101

5.70 Von einem Elektrizitätswerk E, das am Ufer eines 400 m breiten und geradlinig verlaufenden Flusses liegt, soll eine Leitung zum Haus H gelegt werden, das 1800 m flußabwärts am jenseitigen Ufer steht. 3 m Leitung über Land kosten ebensoviel wie 1 m Leitung zu Wasser.
Welcher Weg ist am billigsten?

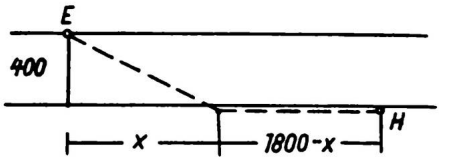


Bild 5.102

5.71 Zwei geradlinige Straßen kreuzen sich im Punkt S unter einem Winkel α. Auf der einen Straße ist im Punkt A ein Fahrzeug F_1 im Abstand a vom Kreuzungspunkt entfernt und fährt auf diesen mit konstanter Geschwindigkeit v_1 zu. Im Punkt B der anderen Straße befindet sich gleichzeitig im Abstand b von S ein Fahrzeug F_2, das mit konstanter Geschwindigkeit v_2 ebenfalls auf S zufährt.

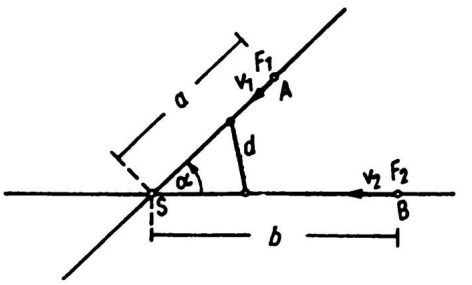


Bild 5.103

a) Nach welcher Zeit haben die Fahrzeuge minimalen Abstand d?

b) Man bestimme die Zeit für den minimalen Abstand für $a = 2\,\text{km}$, $v_1 = 50\,\text{kmh}^{-1}$ und $b = 3\,\text{km}$, $v_2 = 60\,\text{kmh}^{-1}$ und $\alpha = 90°$ bzw. $\alpha = 60°$.

5.72 Ein nach oben offenes Gerinne habe als Querschnitt ein gleichschenkliges Dreieck. Der Winkel α ist so zu wählen, daß bei gegebenem Flächeninhalt A zur Verringerung des Reibungswiderstandes und aus Kostengründen der benetzte Umfang U minimal ist.

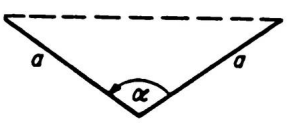


Bild 5.104

5.73 Ein geradliniger Weg der Breite b geht rechtwinklig in einen geradlinigen Weg der Breite a über. Wie lang darf ein Stab höchstens sein, damit er auf dem Weg um die Ecke C transportiert werden kann?
Hinweis: Man bestimme die extremale Länge l der Strecke $\overline{AB}$ in Abhängigkeit des Winkels α. Man werte das allgemeine Ergebnis aus für
$a = 2\,\mathrm{m}$ und $b = 1{,}5\,\mathrm{m}$.

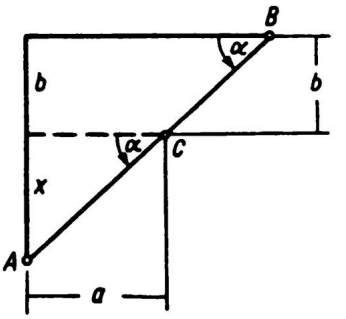


Bild 5.105

6 Integralrechnung für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

6.1 Integralbegriff und Integrierbarkeit

6.1.1 Unbestimmtes Integral

Grundaufgabe der bisher behandelten Differentialrechnung ist es, zu einer gegebenen Funktion f die Ableitung f' zu bestimmen. In vielen Problemen der Technik und der Wissenschaft ist jedoch die umgekehrte Aufgabe zu lösen, d.h., es ist eine Funktion zu suchen, deren Ableitung man bereits kennt. So sei daran erinnert, daß bei einem Bewegungsvorgang die Geschwindigkeit v sich als Ableitung des Weges s nach der Zeit t berechnen läßt: $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$. Oft ist aber die Geschwindigkeit v bekannt, und gesucht ist der zurückgelegte Weg s in Abhängigkeit von der Zeit t : $s = F(t)$. Die gleichen Zusammenhänge bestehen zwischen der Geschwindigkeit v und der Beschleunigung a : $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. Ist die Beschleunigung gegeben und die Geschwindigkeit gesucht, so hat man ebenfalls eine Funktion zu bestimmen, deren Ableitung bereits bekannt ist.
Diese Art der Fragestellung ist die **Grundaufgabe der Integralrechnung**:

> Zur gegebenen Funktion f wird eine Funktion F gesucht, die die Bedingung $F'(x) = f(x)$ erfüllt.

Offenbar ist dieses Problem die Umkehrung der Grundaufgabe der Differentialrechnung, weshalb auch die Integralrechnung als Umkehrung der Differentialrechnung anzusehen ist.
Jede Funktion F, für die in einem Intervall die Beziehung $F'(x) = f(x)$ gilt, soll in diesem Intervall **Stammfunktion** von f heißen. So ist z.B. die Funktion mit der Gleichung $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ eine Stammfunktion zu $f(x) = x^2$, denn es gilt

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2.$$

Es soll nun die Frage untersucht werden, ob sich die Grundaufgabe der Integralrechnung eindeutig lösen läßt, d.h., ob es zu einer gegebenen Funktion f immer nur eine Stammfunktion F gibt. Diese Frage muß verneint werden, denn im ebengenannten Beispiel erfüllen auch die Terme $\frac{1}{3}x^3+7$, $\frac{1}{3}x^3-25$, $\frac{1}{3}x^3-\sqrt{2}$ und beliebig viele andere die Bedingung, daß ihre Ableitungen gleich x^2 sind. Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt, daß sich zwei Funktionen mit gleicher Ableitung nur um eine Konstante unterscheiden. Ist demnach $F_1'(x)=f(x)$ und $F_2'(x)=f(x)$, so sind F_1 und F_2 beides Stammfunktionen zu f, und es gilt

$$F_2(x)=F_1(x)+C.$$

Man kann also zu einer Funktion f beliebig viele Stammfunktionen angeben, indem man zu irgendeiner Stammfunktion beliebige Konstanten addiert. Für die Menge aller Stammfunktionen zu einer Funktion f wird zur Vereinfachung der weiteren Darstellung ein neues Symbol eingeführt:

$$\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x=\{F(x)+C\,|\,F'(x)=f(x);\quad C\in\mathbb{R}\}} \tag{6.1}$$

Man nennt (6.1) das **unbestimmte Integral**[1] der Funktion f, $f(x)$ den **Integranden**, x die **Integrationsvariable** und C die **Integrationskonstante**. Da diese Darstellungsweise für die praktische Handhabung aber zuviel Aufwand erfordert, ist es üblich, nur mit Repräsentanten aus der Menge der Stammfunktionen zu arbeiten. Statt (6.1) soll also in Zukunft immer nur

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C \tag{6.2}$$

geschrieben werden. (6.2) ist zu lesen: Integral über $f(x)\,\mathrm{d}x$ gleich $F(x)+C$. Die historische Entstehung des Symbols $\int$ und der tiefere Sinn des $\mathrm{d}x$ in diesem Zusammenhang werden in 6.1.2 behandelt. Es ist jedoch stets zu beachten, daß nach dem Zeichen $\int$ nicht die Ableitung, sondern das *Differential* der gesuchten Stammfunktion steht, denn nach der Definition des Differentials gilt wegen $F'(x)=f(x)$:

$$\mathrm{d}F(x)=F'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die Beziehung (6.2) könnte also auch in der Form

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C \tag{6.3}$$

geschrieben werden.
Andererseits gilt unter Verwendung von (6.3)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[F(x)+C\right]=F'(x)+0=f(x),$$

[1] integer (lat.) unversehrt; functio integra, die unversehrte, d.h. nicht abgeleitete Funktion

d.h., Integration und Differentiation einer Funktion f nacheinander heben sich auf. Dagegen bedeutet der rechte Teil der Formel (6.3), daß die Reihenfolge Differentiation und Integration einer Funktion F sich nur bis auf eine beliebige Konstante C aufhebt. Wegen dieses Zusammenhangs läßt sich die zu einer Funktion f gehörige Menge der Stammfunktionen, d.h. das unbestimmte Integral, durch Umkehrung aus den Differentiationsregeln gewinnen.
Jede Formel der Differentialrechnung in der Art

$$F'(x) = f(x) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

ist gleichbedeutend mit der Beziehung

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

aus der Integralrechnung. Beispielsweise gilt[1]:

aus $(\sin x)' = \cos x$ folgt $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$,

aus $(x^5)' = 5x^4$ bzw. aus $\left(\frac{1}{5}x^5\right)' = x^4$ folgt $\int x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5 + C$

aus $(x)' = 1$ folgt $\int 1\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C$.

Die letzte Beziehung ergibt sich nach der Gleichung (6.3), wenn in $\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$ speziell $F(x) = x$ gesetzt wird.
Die nach diesem Verfahren herleitbaren Formeln zur Bestimmung von Stammfunktionen werden **Grundintegrale** genannt. Sie sind in der folgenden Übersicht zusammengestellt:

$(C)' = 0$	$\int 0\,\mathrm{d}x = C$
$(x)' = 1$	$\int 1\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C$
$(x^{n+1})' = (n+1)\,x^n$	$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ für $n \neq -1$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ für $x > 0$ $(\ln(-x))' = \frac{1}{x}$ für $x < 0$	$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$ für $x \neq 0$[2]
$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$ für $a > 0,\ a \neq 1$

[1] Nach DIN 1302 ist statt $(\sin x)'$ auch die Schreibweise $\sin' x$ möglich. Dagegen ist x'^5 statt $(x^5)'$ nicht sinnvoll.

[2] Man beachte die Definition des Betrages $\lvert x\rvert = \begin{cases} x \text{ für } x > 0 \\ -x \text{ für } x < 0 \end{cases}$.
Das angegebene Grundintegral ist in jedem Intervall anwendbar, das nicht den Koordinatenursprung enthält, also entweder für nur positive x oder für nur negative x.

$$(\sin x)' = \cos x \qquad \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$x \neq \frac{2n+1}{2}\pi;\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\int \tan^2 x \, dx = \tan x - x + C^1$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$x \neq n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\int \cot^2 x \, dx = -\cot x - x + C\ ^1$$

$$\left.\begin{aligned}(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}\right\} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2{}^2$$

$$x \in (-1, 1)$$

$$\left.\begin{aligned}(\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} \\ (\operatorname{arccot} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}\right\} \qquad \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \arctan x + C_1 = -\operatorname{arccot} x + C_2{}^3$$

$$(\sinh x)' = \cosh x \qquad \int \cosh x \, dx = \sinh x + C$$

$$(\cosh x)' = \sinh x \qquad \int \sinh x \, dx = \cosh x + C$$

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x \qquad \int \frac{1}{\cosh^2 x} \, dx = \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$$

$$\int \tanh^2 x \, dx = x - \tanh x + C$$

$$(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x \qquad \int \frac{1}{\sinh^2 x} \, dx = \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C$$

$$x \neq 0$$

[1] Um diese Beziehung einzusehen, benötigt man eine Rechenregel, die im Anschluß an diese Übersicht behandelt wird.

[2] Man beachte die Beziehung $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$, also ist $C_2 = C_1 + \frac{\pi}{2}$

[3] Man beachte die Beziehung $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x$, also ist $C_2 = C_1 + \frac{\pi}{2}$

$$\int \coth^2 x \, dx = x - \coth x + C$$

$$(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \operatorname{arsinh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$$

$$(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \operatorname{arcosh} x + C \quad \text{für } x > 1$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C \quad \text{für } |x| > 1^1$$

$$\left.\begin{aligned}(\operatorname{artanh} x)' &= \frac{1}{1-x^2} \quad \text{für } |x| < 1 \\ (\operatorname{arcoth} x)' &= \frac{1}{1-x^2} \quad \text{für } |x| > 1\end{aligned}\right\} \qquad \int \frac{1}{1-x^2} \, dx = \int \frac{dx}{1-x^2}$$

$$= \begin{cases} \operatorname{artanh} x + C = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x} + C \\ \qquad\qquad \text{für } |x| < 1 \\ \operatorname{arcoth} x + C = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x+1}{x-1} + C \\ \qquad\qquad \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \quad \text{für } |x| \neq 1^2$$

Obwohl sich mit diesen Grundintegralen verhältnismäßig wenig Aufgaben unmittelbar lösen lassen, ist ihre Kenntnis nützlich für die Berechnung komplizierterer Integrale.

In gleicher Weise wie die Grundintegrale lassen sich auch allgemeine Integrationsregeln aus den Differentiationsregeln gewinnen. Aus

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x)$$

folgen wegen (6.1) unmittelbar die Regeln zur *Integration einer Summe von Funktionen*

$$\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx \tag{6.4}$$

und für $a \neq 0$ zur *Integration einer Funktion mit einem konstanten Faktor*

---

[1] Man beachte: Für $x > 1$ ist $x + \sqrt{x^2-1} > 0$ und $\ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.
Dann ist $\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
Für $x < -1$ ist $x + \sqrt{x^2-1} < 0$ und $\ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| = \ln\left(-\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right)$.
Dann ist $\left(\ln\left(-\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

[2] Keine der beiden Stellen $x = 1$ und $x = -1$ darf im Integrationsintervall liegen.

$$\int (af(x))\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.5}$$

Da in (6.5) der Faktor a negativ sein darf, gilt (6.4) auch für die Differenz zweier Funktionen.

Beispiel 6.1

$$\begin{aligned}\int (x^3 - 6x^2 + 1)\,\mathrm{d}x &= \int x^3\,\mathrm{d}x - 6\int x^2\,\mathrm{d}x + \int \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^4}{4} - 2x^3 + x + C\end{aligned}$$

Anmerkung: Die Integrationskonstante C ist die Summe der Integrationskonstanten der Einzelintegrale: $C = C_1 + C_2 + C_3$

Beispiel 6.2

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{1+x^2}{x} + \frac{2}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int x\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \\ &= \ln|x| + \frac{1}{2}x^2 + 2\tan x + C\end{aligned}$$

Beispiel 6.3

$$\int (a\cosh t - b\sinh t)\,\mathrm{d}t = a\sinh t - b\cosh t + C$$

Beispiel 6.4

$$\int \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi} = \tan\varphi + C$$

Beispiel 6.5

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi}\int \mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2\varphi}x + C \qquad \left(\frac{1}{\cos^2\varphi} \text{ ist ein konstanter Faktor}\right)$$

Beispiel 6.6

$$\int \frac{x}{t}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2t} + C$$

$$\int \frac{x}{t}\,\mathrm{d}t = x\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = x\ln|t| + C$$

(Da im zweiten Integral die Integrationsvariable t heißt, ist x ein konstanter Faktor.)

Jetzt soll noch untersucht werden, in welcher Weise sich die Stammfunktionen graphisch darstellen lassen. Das unbestimmte Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ mit beliebig wählbarer Integrationskonstante C ist die Menge aller möglichen Stammfunktionen, die zur Funktion f gebildet werden können. Wird für C ein bestimmter Wert gewählt, so ist $y = F(x) + C$ die Gleichung einer Kurve, die in der üblichen Weise im cartesischen Koordinatensystem dargestellt werden kann. Da C beliebig vieler Werte fähig ist, erhält man aus $y = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ eine Schar von

unendlich vielen Kurven, die sich an jeder Stelle x_0 nur durch die Konstante C voneinander unterscheiden. Da die Ableitung einer Konstanten null ist, gilt für jedes C

$$(F(x)+C)' = F'(x).$$

Daraus folgt, daß alle Stammfunktionen an einer Stelle x_0 des betrachteten Intervalls den gleichen Anstieg haben (Bild 6.1). Die Kurven der aus ein und derselben Funktion f gewonnenen Stammfunktionen lassen sich also durch Parallelverschiebung in y-Richtung zur Deckung bringen.

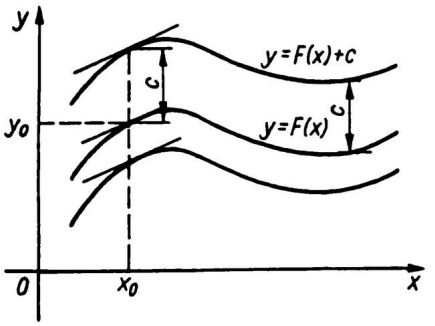


Bild 6.1

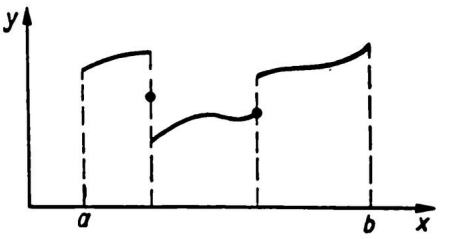


Bild 6.2

6.1.2 Bestimmtes Integral

In diesem Abschnitt soll der Integrationsbegriff völlig anders als im vorhergehenden Abschnitt und ohne Bezug zur Differentialrechnung eingeführt werden. Später wird sich zeigen, daß es zwischen beiden Begriffen einen Zusammenhang gibt.

Den Ausgang bildet das Problem der Flächeninhaltsberechnung ebener Flächen. Betrachtet werde eine Fläche (Bild 6.2), die im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ nach unten von der x-Achse und nach oben von der Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ begrenzt wird. Die linke und die rechte Begrenzung bilden die Geraden $x = a$ bzw. $x = b$.

Die Funktion f habe im Intervall $[a, b]$ keine negativen Funktionswerte und sei dort stückweise stetig, d.h., f muß an jeder Stelle $x \in [a, b]$ definiert sein und darf in $[a, b]$ höchstens endlich viele Sprungstellen oder hebbare Unstetigkeiten besitzen.

Aus der Begrenzung der Fläche durch eine gekrümmte Kurve ergibt sich eine Schwierigkeit, die dadurch überwunden werden kann, daß die Fläche näherungsweise aus Rechteckflächen zusammengesetzt wird (Bild 6.3).

Zunächst unterteilt man das Intervall $[a, b]$ in eine endliche Anzahl n beliebig breiter Teilintervalle mit den Unterteilungsstellen

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

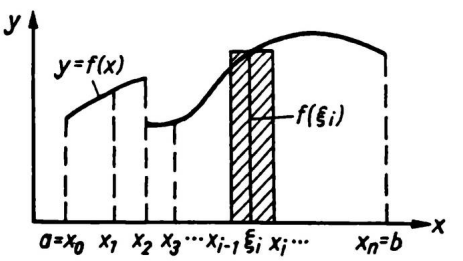


Bild 6.3

Ist $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, so bezeichnet man die Breite des größten Teilintervalls

$$\delta = \max_i \Delta x_i$$

als *Feinheitsmaß* dieser Zerlegung. Sodann wählt man in jedem Teilintervall eine beliebige Zwischenstelle aus, z.B. im i-ten Teilintervall die Stelle ξ_i, und ermittelt den zugehörigen Funktionswert $f(\xi_i)$. Dieser ist geometrisch die Höhe eines Rechtecks mit der Breite Δx_i und dem Flächeninhalt

$$\Delta A_i = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Bildet man die Summe aller Rechteckflächen, so erhält man einen Näherungswert für den gesuchten Flächeninhalt A

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i, \tag{6.6}$$

von dem man hofft, daß er um so genauer sein wird, je schmaler die Rechteckstreifen ausfallen. Auf Grund dieser anschaulichen Überlegung wird man die Zerlegung zunehmend verfeinern, d.h. man läßt $\delta \to 0$ streben. Das ist gleichbedeutend mit $\Delta x_i \to 0$ für alle i und $n \to \infty$. Damit erhält man eine Folge von Summen, und es drängen sich zwei Fragen auf, nämlich

- ob die Folge der Summen einen Grenzwert besitzt und
- ob dieser Grenzwert, sofern er existiert, mit dem gesuchten Flächeninhalt übereinstimmt.

Man vereinbart die folgende

Definition

Strebt bei zunehmend feiner werdenden Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$ jede Folge der Summen (6.6) gegen den gleichen endlichen Grenzwert I, so nennt man

$$I = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \tag{6.7}$$

das **bestimmte** (Riemannsche) **Integral**[1] der stückweise stetigen Funktion f im Intervall $[a, b]$. Die Funktion f heißt dann in $[a, b]$ **integrierbar**. Man schreibt

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

(gelesen: Integral von a bis b über $f(x)\,\mathrm{d}x$). a heißt **untere Grenze**, b heißt **obere Grenze** des bestimmten Integrals.

[1] Der deutsche Mathematiker BERNHARD RIEMANN (1826 – 1866) hat mit seinen Untersuchungen wesentlich zur Klärung des Integralbegriffes beigetragen. Da es auch noch andere Integralbegriffe gibt, die in diesem Buch jedoch nicht behandelt werden, spricht man bei den hier dargelegten Begriffen genauer von der RIEMANN-Integrierbarkeit und vom RIEMANN-Integral.

Das bestimmte Integral erweist sich also als Grenzwert einer Folge von Summen, in der wegen $n \to \infty$ die Anzahl der Summanden gegen unendlich strebt und wegen $\Delta x_i \to 0$ der Wert jedes einzelnen Summanden gegen null strebt. Dieser Sachverhalt gilt unabhängig von der anschaulichen Vorstellung der Berechnung des Flächeninhalts. Immer dann, wenn ein Anwendungsfall auf eine Summenfolge mit unbegrenzt wachsender Summandenzahl und gegen null strebendem Wert der Summanden führt, läßt sich das Problem durch ein bestimmtes Integral beschreiben. Das Zeichen $\int$ stellt ein stilisiertes S dar, durch das auf die Summenbildung hingewiesen werden soll.

Wegen der Definition des bestimmten Integrals als Grenzwert ist das Ergebnis stets eine *Zahl*; dagegen stellt das unbestimmte Integral immer eine *Menge von Funktionen* dar, nämlich die Menge der Stammfunktionen.

Bevor zwischen beiden ein Zusammenhang hergestellt wird, soll auf Eigenschaften integrierbarer Funktionen und auf einige Rechenregeln eingegangen werden. Dabei ist die anschauliche Vorstellung des Flächeninhalts hilfreich, aber nicht unbedingt notwendig, da die Definition des bestimmten Integrals nicht an den Flächeninhalt gebunden ist.

6.1.3 Eigenschaften integrierbarer Funktionen

Aus der Differentialrechnung ist bekannt, daß die Stetigkeit einer Funktion eine notwendige, aber keine hinreichende Voraussetzung für deren Differenzierbarkeit ist. Es stellt sich die Frage, ob es ähnliche Aussagen auch zur Integrierbarkeit gibt. Die folgenden Sätze geben darüber Auskunft. Allerdings sind vollständige Beweisführungen dazu im Rahmen dieses Buches nicht möglich.

Zuerst kann festgestellt werden, daß eine Funktion f in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ nur dann integrierbar sein kann, wenn sie dort beschränkt ist. Träfe das nicht zu, könnte in der Folge der Summen $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ für mindestens eine Stelle $\xi_i \in [a, b]$ der Wert $f(\xi_i)$ beliebig groß werden. Damit könnte der Grenzwert der Summenfolge keinen endlichen Wert annehmen. Demnach gilt der

Satz 6.1

> Eine Funktion f ist in $[a, b]$ nur dann integrierbar, wenn sie in $[a, b]$ beschränkt ist.

Das ist eine notwendige Bedingung für die Integrierbarkeit einer Funktion. Als hinreichende Bedingung erweist sich die Stetigkeit. Es genügt sogar die stückweise Stetigkeit.

Satz 6.2

> Ist die Funktion f in $[a, b]$ stetig oder stückweise stetig, so ist f in $[a, b]$ integrierbar.

Da jede in einem abgeschlossenen Intervall stetige oder stückweise stetige Funktion dort auch beschränkt ist, erfüllen diese Funktionen die notwendige Bedingung für die Integrierbarkeit. Der weitere Beweis stützt sich darauf, daß für beschränkte und stetige oder stückweise stetige Funktionen stets konvergente Summenfolgen entsprechend der Definition des bestimmten Integrals konstruierbar sind.

Bisher wurde davon ausgegangen, daß die Funktion f im Integrationsintervall $[a, b]$ keine negativen Funktionswerte hat. Diese Bedingung ist entbehrlich, da sie in der Definition des bestimmten Integrals nicht verwendet wird. Ist die Funktion f im ganzen Intervall $[a, b]$ negativ, so sind im Gegensatz zu Bild 6.3 in der Summe (6.6) sämtliche $f(\xi_i) < 0$. Da gleichzeitig alle $\Delta x_i > 0$ bleiben, wird der Grenzwert $I = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ ebenfalls negativ. Es gilt also der

Satz 6.3

Ist die Funktion f im ganzen Intervall $[a, b]$ negativ, d.h., $f(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$, so ist auch

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < 0.$$

Bei einer Flächenberechnung würde sich in diesem Falle für den Flächeninhalt ein negativer Wert ergeben. Nimmt die Funktion im betrachteten Intervall teils positive und teils negative Werte an, so läßt sich über das Vorzeichen von I nicht ohne weiteres eine Entscheidung fällen. Zur Berechnung des Flächeninhaltes sind dann besondere Maßnahmen notwendig, über die 6.6.1 Auskunft gibt.

Im folgenden werden einige wichtige Eigenschaften des bestimmten Integrals dargestellt. Die Beweise stützen sich im wesentlichen auf die Gesetze für das Rechnen mit Grenzwerten. Alle auftretenden Funktionen seien integrierbar.

Änderung der Integrationsvariablen

Die Bezeichnung der Integrationsvariablen hat keinen Einfluß auf den Wert des bestimmten Integrals. Es gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \tag{6.8}$$

Diese Regel folgt unmittelbar aus der Definition des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summenfolge.

Vertauschung der Integrationsgrenzen

Bei Vertauschung der Integrationsgrenzen kehrt sich das Vorzeichen des Integrals um. Es gilt

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x} \tag{6.9}$$

Die Vertauschung der Integrationsgrenzen bedeutet eine Umkehrung der Integrationsrichtung. In (6.6) errechnen sich die Intervallbreiten der Zerlegung aus $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$ statt bisher $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, wodurch sich der Vorzeichenwechsel erklären läßt. Aus (6.9) erhält man für $b = a$ die Folgerung

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0} \tag{6.10}$$

Zerlegung des Integrationsintervalls in Teilintervalle

Ist f auf $[a, b]$ stückweise stetig und $a < c < b$, so gilt

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x} \tag{6.11}$$

Diese Regel ergibt sich aus einer entsprechenden Regel für das Rechnen mit Grenzwerten. Berücksichtigt man zusätzlich (6.9), so kann in (6.11) die Bedingung $a < c < b$ entfallen, d.h., c darf auch außerhalb des Intervalls $[a, b]$ liegen, sofern f in dem erweiterten Intervall stückweise stetig ist.

Linearkombinationen mehrerer Funktionen

Sind f_1 und f_2 auf $[a, b]$ integrierbar und c_1, c_2 konstante Faktoren, so gilt

$$\boxed{\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))\,\mathrm{d}x = c_1 \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x} \tag{6.12}$$

Auch diese Regel läßt sich unmittelbar mit entsprechenden Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten erkären. (6.12) darf auf eine beliebige endliche Anzahl von Funktionen f_1, f_2, ..., f_n erweitert werden.

Majorisierung eines bestimmten Integrals

Wird eine Funktion f in einem Intervall $[a, b]$ von einer anderen Funktion g majorisiert, d.h. gilt

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{für alle} \quad x \in [a, b],$$

so ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.13}$$

Der Beweis stützt sich auf den Vergleich der zugehörigen Summen (6.6). Eine geometrische Veranschaulichung bietet Bild 6.4. In dieser Darstellung ist zusätzlich zu beachten, daß Flächeninhalte unterhalb der x–Achse einen negativen Beitrag zum Wert des bestimmten Integrals liefern.

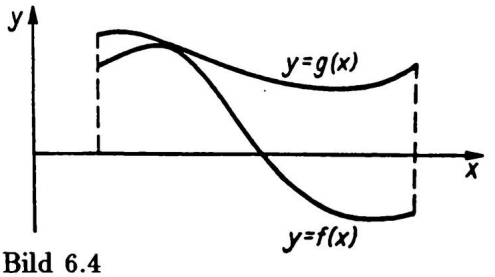


Bild 6.4

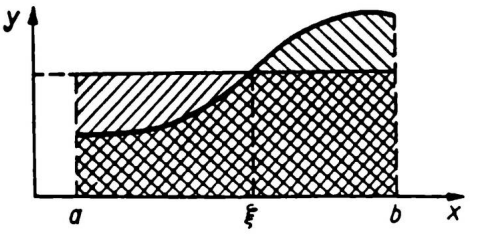


Bild 6.5

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Das geometrische Anliegen dieses Satzes ist die Verteilung des Flächeninhalts zwischen einer Kurve $y = f(x)$ und der x–Achse über dem Intervall $[a, b]$ auf ein flächengleiches Rechteck über $[a, b]$ mit einer noch zu bestimmenden Höhe $f(\xi)$ (siehe Bild 6.5).

Der **Mittelwertsatz der Integralrechnung** lautet:

Ist f auf $[a, b]$ stetig, so gibt es mindestens eine Stelle $\xi \in [a, b]$ mit der Eigenschaft

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\,f(\xi) \tag{6.14}$$

bzw. für $h = b - a$ mindestens eine Zahl $\vartheta \in [0, 1]$ mit der Eigenschaft

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = h \cdot f(a + \vartheta h) \tag{6.15}$$

Die Formeln (6.14) und (6.15) drücken denselben Sachverhalt aus. Auf der rechten Seite steht jeweils der Flächeninhalt eines Rechtecks, dessen Grundlinie die Länge $b - a = h$ hat, und dessen Höhe durch den Funktionswert an der Stelle $\xi = a + \vartheta h$ gegeben ist. Die Stetigkeit von f auf $[a, b]$ ist eine wesentliche Voraussetzung dieses Satzes, denn wäre die Kurve von $y = f(x)$ unterbrochen, so ließe sich die Höhe des Rechtecks nicht unbedingt als Funktionswert $f(\xi)$ einer Stelle $\xi \in [a, b]$ bestimmen.

Aus (6.14) erhält man den sogenannten *linearen Mittelwert (oder auch arithmetischen Mittelwert)* von f über $[a, b]$:

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.16}$$

Als *quadratischen Mittelwert* von f über $[a,b]$ bezeichnet man den Term

$$\sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x} \tag{6.17}$$

Nachdem einige wichtige Eigenschaften integrierbarer Funktionen und Regeln für den Umgang mit bestimmten Integralen dargelegt wurden, bleibt als Hauptfrage noch offen, wie man ein bestimmtes Integral zweckmäßigerweise berechnen kann. Dazu werden im nächsten Abschnitt die Voraussetzungen geschaffen.

6.1.4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ersetzt man im bestimmten Integral

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

die obere Grenze b durch die Variable x, so ist

$$I(x) = \int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{6.18}$$

eine Funktion der oberen Grenze x. Um eine Verwechslung der unabhängigen Variablen x dieser Funktion mit der Integrationsvariablen auszuschließen, wurde die Integrationsvariable von bisher x in ξ umbenannt. Das ist immer möglich, da wegen (6.8) die Bezeichnung der Integrationsvariablen ohne Einfluß auf den Wert des bestimmten Integrals bleibt.

Verbindet man das bestimmte Integral (6.18) mit der geometrischen Vorstellung des Flächeninhaltes einer ebenen Fläche, so wird aus Bild 6.6 deutlich, daß $I(x)$ der Inhalt einer Fläche mit variabler rechter Begrenzung ist. Wegen dieses Zusammenhangs wird $I(x)$ auch *Flächenfunktion* genannt. Für $x = a$ wird der Flächeninhalt null. Es gilt in Übereinstimmung mit (6.10) $I(a) = \int_a^a f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0$.

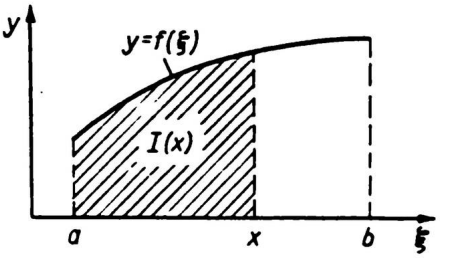


Bild 6.6

Für das bestimmte Integral (6.18) mit variabler oberer Grenze ist neben dem Begriff Flächenfunktion auch der Begriff *partikuläres Integral* gebräuchlich. Dieses Integral erweist sich als Stammfunktion des Integranden, womit ein Zusammenhang zwischen dem bestimmten Integral im Riemannschen Sinne und dem unbestimmten

Integral hergestellt ist. Der folgende Satz nennt Bedingung und Ergebnis dieser Überlegung.

Satz

Ist f in $[a, b]$ stetig, so gilt

$$I'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = f(x), \tag{6.19}$$

d.h. die Ableitung des partikulären Integrals ergibt den Integranden. Wegen $I'(x) = f(x)$ ist $I(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$.

Beweis:

Nach (6.18) gilt für jede beliebige Stelle $x \in [a, b]$

$$I(x) = \int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

und für eine benachbarte Stelle $x + h$ entsprechend

$$I(x+h) = \int_a^{x+h} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Daraus folgt unter Berücksichtigung von (6.9) und (6.11)

$$I(x+h) - I(x) = \int_x^{x+h} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = h \cdot f(x + \vartheta h),$$

worin der rechte Teil der Gleichung ein Ergebnis des Mittelwertsatzes der Integralrechnung (6.15) ist und für jede stetige Funktion f gilt. Nach Division durch h und Grenzübergang $h \to 0$ erhält man wegen der Stetigkeit von f

$$I'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{I(x+h) - I(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(x + \vartheta h) = f(x).$$

Damit ist gezeigt, daß $I(x) = \int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}x$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist, und zwar jene Stammfunktion, die bei $x = a$ eine Nullstelle hat (vgl. (6.10)). Da sich zwei Stammfunktionen nur um eine Konstante C unterscheiden, gilt für eine beliebige andere Stammfunktion $F(x)$:

$$I(x) = F(x) + C$$

Wegen $I(a) = 0$ folgt für $x = a$:

$$0 = F(a) + C \quad \text{und} \quad C = -F(a)$$

Damit ist

$$I(x) = \int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = F(x) - F(a)\,, \tag{6.20}$$

worin F eine beliebige Stammfunktion zu f ist.
Setzt man die obere Grenze $x = b$, so erhält man den Funktionswert

$$I(b) = \int_a^b f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = F(b) - F(a),$$

Dies ist ein Zusammenhang zwischen dem bestimmten Integral, dargestellt durch den Zahlenwert $I(b)$, und dem unbestimmten Integral, dargestellt mit Hilfe einer beliebigen Stammfunktion F. Diese wichtige Beziehung ist Inhalt des folgenden Satzes.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ist f in $[a, b]$ stetig und F eine beliebige Stammfunktion von f, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{6.21}$$

Üblicherweise schreibt man dafür

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

womit deutlich wird, daß zur Berechnung des bestimmten Integrals auf die Grenzwertberechnung gemäß (6.7) verzichtet werden kann, wenn eine Stammfunktion F bekannt ist. Diese kann aber über das unbestimmte Integral gefunden werden. Man erhält den Wert des bestimmten Integrals, indem man die obere und die untere Grenze in die Stammfunktion einsetzt und die Differenz gemäß (6.21) bildet.

Zusammenfassend sei hervorgehoben:

- Das *unbestimmte Integral* $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ (genauer $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + C\}$) stellt eine **Menge von Funktionen** dar, nämlich die Menge der Stammfunktionen mit der Eigenschaft $F'(x) = f(x)$. Geometrisch wird das unbestimmte Integral durch eine Schar von Kurven mit dem Scharparameter C repräsentiert.
- Das *partikuläre Integral* (oder bestimmte Integral mit variabler oberer Grenze) $I(x) = \int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = F(x) - F(a)$ stellt eine **einzige Funktion** aus der Menge der Stammfunktionen dar, nämlich diejenige, die bei $x = a$ eine Nullstelle hat.

Geometrisch wird das partikuläre Integral durch die Kurve der oben angegebenen Schar repräsentiert, die die Abszissenachse in $x = a$ schneidet.

- Das *bestimmte Integral* ist ein **Zahlenwert**, nämlich der Funktionswert $I(b) = F(b) - F(a)$ der Funktion $I(x)$ an der Stelle $x = b$. Diese Zahl erscheint geometrisch als Ordinate der Funktion $I(x)$ an der Stelle $x = b$.

Im Bild 6.7 ist dies geometrisch veranschaulicht.
Die in (6.21) gegebene Vorschrift ermöglicht die Berechnung bestimmter Integrale auf sehr praktikable Art.

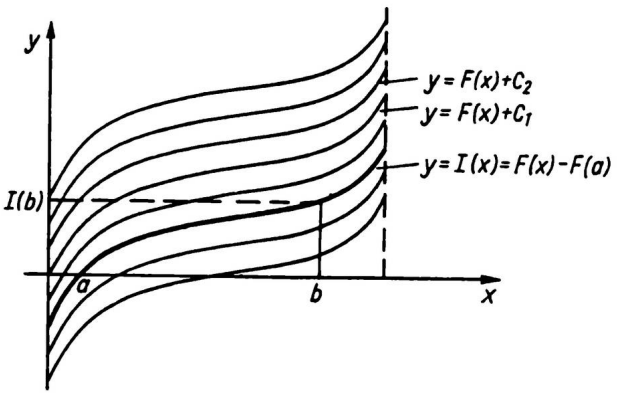


Bild 6.7

Beispiel 6.7

Gesucht ist diejenige Funktion, die bei $x = 2$ eine Nullstelle hat und deren Ableitung durch $f(x) = x^2$ dargestellt wird.

Lösung:

Das unbestimmte Integral $\int x^2 \, dx = \frac{1}{3}x^3 + C$ mit $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ gibt die Menge aller nur möglichen Stammfunktionen an. Daraus ist diejenige auszuwählen, die der vorgegebenen Anfangsbedingung genügt. Man erhält wegen $C = -F(2)$:

$$I(x) = \int_2^x \xi^2 \, d\xi = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{3}.$$

Man überprüfe das Ergebnis, indem man für $I(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{3}$ die reelle Nullstelle und die Ableitung berechne.

Beispiel 6.8

Es sei $I'(x) = \sinh x$. Gesucht ist die Funktion I, deren Kurve durch den Punkt $P(0;0)$ geht.

Lösung:

$$I(x) = \int_0^x \sinh \xi \, d\xi = \cosh x - \cosh 0 = \cosh x - 1.$$

Probe!

Beispiel 6.9

Wie heißt die Gleichung der Kurve, die durch $P(0,5;0)$ geht und deren Anstieg an jeder Stelle x durch $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ gegeben wird?

Lösung:

$$I(x) = \int_{0,5}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \arcsin x - \arcsin 0,5 = \arcsin x - \frac{\pi}{6}.$$

Beispiel 6.10

Gesucht ist der Funktionswert an der Stelle $x = 6$ für die Funktion, deren Kurve bei $x = 2$ die x-Achse schneidet und deren Ableitung durch $\tan\alpha = \frac{1}{x}$ gegeben ist (Bild 6.8).

$$I(6) = \int_{2}^{6} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|\Big|_2^6$$

$$= \ln 6 - \ln 2 = \ln 3 \approx 1,099.$$

Die Kurve der betreffenden Stammfunktion hat die Gleichung $y = \ln x - \ln 2$. In Bild 6.8 sind außer dieser Kurve noch einige weitere Kurven der gleichen Schar eingezeichnet.

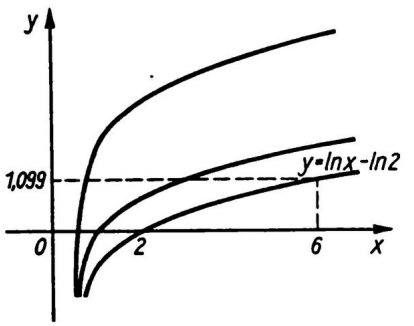


Bild 6.8

Beispiel 6.11

Gesucht ist $I(5)$, wenn $I(3) = 0$ und $I'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

$$I(5) = \int_{3}^{5} \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}\Big|_3^5 = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{2} - \ln 2\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{4} \approx -0,144.$$

Beispiel 6.12

$$\int_{4}^{-1} x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_4^{-1} = \frac{1}{2} - 8 = -\frac{15}{2}$$

Anmerkung: Ist die obere Grenze des Integrals kleiner als die untere, so ist der Funktionswert an einer Stelle gesucht, die links von der Nullstelle der betreffenden Stammfunktion liegt.

Beispiel 6.13

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \sin\frac{3\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0$$

Beispiel 6.14

$$\int_{a}^{b} \mathrm{d}x = x\Big|_a^b = b - a$$

Beispiel 6.15

$$\int_0^2 (1 - e^x)\,dx = (x - e^x)\Big|_0^2 = (2 - e^2) - (0 - e^0) = 2 - e^2 + 1 = 3 - e^2$$

Beispiel 6.16

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos 0) = 0 - (-1) = 1$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin x\,dx = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = (-\cos 0) - \left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 0 = -1$$

Die Vertauschung der Grenzen bewirkt im Ergebnis eine Vorzeichenänderung.

Beispiel 6.17

$$\int_2^4 (2 + u^3)\,du = \left(2u + \frac{u^4}{4}\right)\Big|_2^4 = (8 + 64) - (4 + 4) = 64$$

$$\int_2^3 (2 + u^3)\,du + \int_3^4 (2 + u^3)\,du = \left(2u + \frac{u^4}{4}\right)\Big|_2^3 + \left(2u + \frac{u^4}{4}\right)\Big|_3^4$$

$$= \left(6 + \frac{81}{4}\right) - (4 + 4) + (8 + 64) - \left(6 + \frac{81}{4}\right) = 64$$

$$\int_2^5 (2 + u^3)\,du + \int_5^4 (2 + u^3)\,du = \left(2u + \frac{u^4}{4}\right)\Big|_2^5 + \left(2u + \frac{u^4}{4}\right)\Big|_5^4$$

$$= \left(10 + \frac{625}{4}\right) - (4 + 4) + (8 + 64) - \left(10 + \frac{625}{4}\right) = 64$$

Das Resultat ändert sich nicht, wenn bei gleichem Integranden das Integrationsintervall zerlegt wird.

Beispiel 6.18

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos x\,dx + \int_0^{\pi} \cos x\,dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \sin\frac{3\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 - (-1) = 0$$

Mehrere Integrale mit gleichem Integranden lassen sich zu einem Integral zusammenfassen, wenn die Grenzen der Teilintervalle sich aneinander anschließen.

Beispiel 6.19

$$\int_{-2}^{-6} \frac{dy}{y} = -\int_{-6}^{-2} \frac{dy}{y} = -\ln|y|\Big|_{-6}^{-2} = (-\ln|-2|) - (-\ln|-6|)$$

$$= -\ln 2 + \ln 6 = \ln\frac{6}{2} = \ln 3$$

Beispiel 6.20

$$\int_0^{0,5} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{0,5} = \arcsin 0,5 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$$

$$\int_0^{0,5} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \arcsin \alpha \Big|_0^{0,5} = \arcsin 0,5 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$$

Der Wert eines bestimmten Integrals ist unabhängig von der Bezeichnung der Integrationsvariablen.

Beispiel 6.21

Für eine gleichförmig beschleunigte Bewegung mit der konstanten Beschleunigung $a = g$ soll eine Beziehung für die Geschwindigkeit angegeben werden, wobei zur Zeit $t = 0$ auch $v = 0$ sei.

Lösung:

Wegen $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ gilt $v = \int a\,\mathrm{d}t$ und speziell $v = \int_0^t g\,\mathrm{d}t$.

Zur Unterscheidung der variablen oberen Grenze von der Integrationsvariablen kann man unter Berücksichtigung von (6.8) schreiben:

$$v = \int_0^t g\,\mathrm{d}x = g\int_0^t \mathrm{d}x = gx\Big|_0^t = g(t-0) = gt.$$

Beispiel 6.22

Man berechne den Mittelwert von $f(x) = \sin x$ für das Intervall $[0, \pi]$ (Bild 6.9).

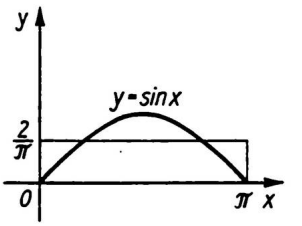


Bild 6.9

$$f(\xi) = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}(1+1) = \frac{2}{\pi} \approx \underline{\underline{0,636}}$$

Beispiel 6.23

Man berechne den Mittelwert von $f(x) = x^2$ für das Intervall $[1, 3]$ und die Stelle ξ, an der der Mittelwert angenommen wird.

$$f(\xi) = \frac{1}{3-1}\int_1^3 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{6}\Big|_1^3 = \frac{1}{6}(27-1) = \frac{13}{3} \approx \underline{\underline{4,33}}$$

Wegen $f(\xi) = \xi^2 = \frac{13}{3}$ ist $\xi = \sqrt{\frac{13}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{39} \approx \underline{\underline{2,08}}$.

6.1.5 Uneigentliche Integrale

Die Integrierbarkeit einer Funktion in einem Intervall $[a, b]$ und die Existenz des bestimmten Integrals sind an Voraussetzungen geknüpft, die nicht immer erfüllt sind. Im Gegensatz zu den bisherigen Betrachtungen können folgende Gründe die Integrierbarkeit verhindern:

1. Das Integrationsintervall ist unendlich.
2. Die Funktion f ist im endlichen Integrationsintervall $[a, b]$ nicht beschränkt, d.h., sie hat dort mindestens eine Unendlichkeitsstelle.

In beiden Fällen wird zur Lösung der Aufgabe ein zusätzlicher Grenzübergang durchgeführt. Man spricht dann von einem **uneigentlichen Integral** im Unterschied zu dem bisher behandelten eigentlichen Integral.
Dieses uneigentliche Integral kann unter gewissen Bedingungen als Ersatz für das nicht existierende bestimmte Integral dienen.
Ist das Integrationsintervall unendlich, z.B. $[a, \infty)$, so wird zunächst das Integral bis zu einer endlichen oberen Grenze b und anschließend der Grenzwert für $b \to \infty$ berechnet. Man schreibt

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{6.22}$$

Ist dieser Grenzwert endlich, so wird (6.22) als konvergentes uneigentliches Integral bezeichnet. Im anderen Falle nennt man das uneigentliche Integral divergent.
In gleicher Weise kann man vorgehen, wenn das Integrationsintervall linksseitig unbegrenzt ist:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{6.23}$$

Für ein beiderseitig unbegrenztes Intervall wird ein zunächst provisorisches Integrationsintervall $[a, b]$ an einer beliebigen Zwischenstelle c mit der Eigenschaft $a < c < b$ aufgeschnitten. Damit wird die Aufgabe auf die beiden oben genannten Fälle zurückgeführt. Man rechnet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.24}$$

Im zweiten Integral von (6.24) gehen a und b unabhängig voneinander gegen $-\infty$ bzw. $+\infty$. Der beliebig wählbare Zwischenwert c hat keinen Einfluß auf das Ergebnis. Setzt man $a = b$, so kann

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{+a} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.25}$$

konvergieren, selbst wenn die beiden in (6.24) rechtsstehenden Grenzwerte nicht

existieren. Man nennt (6.25) den *Cauchyschen Hauptwert* des uneigentlichen Integrals (6.24).

Die Integration einer Funktion f, die in $[a, b]$ eine Unendlichkeitsstelle x_p hat, läßt sich unter Berücksichtigung von (6.11) auf den Fall zurückführen, daß die Unendlichkeitsstelle entweder mit dem linken oder mit dem rechten Rand des Integrationsintervalls zusammenfällt.

Ist f in $[a, x_p)$ integrierbar und $\lim\limits_{x \to x_p - 0} f(x) = \infty$, so integriert man zunächst nur bis zu einer Stelle $x_p - \varepsilon$ und berechnet anschließend den Grenzwert für $\varepsilon \to 0$:

$$\int_a^{x_p} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{x_p - \varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6.26}$$

Ist dieser Grenzwert endlich, so heißt (6.26) ebenfalls konvergentes uneigentliches Integral. Bei unendlichem oder nicht existierendem Grenzwert spricht man von einem divergenten uneigentlichen Integral. Entsprechendes gilt, wenn die Unendlichkeitsstelle auf dem linken Rand des Integrationsintervalls liegt:

$$\int_{x_p}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{x_p + \varepsilon}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6.27}$$

Beispiel 6.24

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^b \right) = \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = \underline{1}$$

Beispiel 6.25

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{b \to \infty} \left(\ln|x| \Big|_1^b \right) = \lim_{b \to \infty} (\ln b - \ln 1) = \underline{\underline{\infty}}$$

Bei diesem Beispiel handelt es sich um ein divergentes uneigentliches Integral.

Beispiel 6.26

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x} = \lim_{a \to -\infty} \int_a^{c} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x} + \lim_{b \to +\infty} \int_c^{b} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x}$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left(\tanh x \Big|_a^c \right) + \lim_{b \to +\infty} \left(\tanh x \Big|_c^b \right)$$

$$= \tanh c - \lim_{a \to -\infty} \tanh a + \lim_{b \to +\infty} \tanh b - \tanh c = 1 + 1 = \underline{\underline{2}}$$

Beispiel 6.27

$$\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\ln|x| \Big|_\varepsilon^1 \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = \underline{\underline{+\infty}}$$

Beispiel 6.28

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{1-\epsilon} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\arcsin x \Big|_0^{1-\epsilon} \right)$$
$$= \lim_{\epsilon \to 0} (\arcsin(1-\epsilon) - \arcsin 0) = \arcsin 1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

Aufgaben 6.1 bis 6.31

6.2 Integrationsverfahren

6.2.1 Vorbemerkungen

Bisher konnten nur solche Aufgaben gelöst werden, bei denen sich die Integrale in einfacher Weise aus Grundintegralen zusammensetzten. Mit Hilfe der Integrationsverfahren sollen nun auch kompliziertere Integrale gelöst werden. Das Prinzip dieser Verfahren besteht darin, gegebene Integrale durch Umformungen auf Grundintegrale oder auf bereits bekannte Integrale zurückzuführen.
Trotzdem führen die im folgenden behandelten Integrationsverfahren häufig nicht zum Ziel. Es besteht nämlich in dieser Hinsicht ein wesentlicher Unterschied zur Differentialrechnung. Die Ableitungen aller elementaren Funktionen sind wieder elementare Funktionen oder setzen sich durch endlich viele arithmetische Operationen aus elementaren Funktionen zusammen. Dagegen gibt es Integrale über verhältnismäßig einfache elementare Funktionen, die sich *nicht* durch elementare Funktionen ausdrücken lassen. Man sagt dann, die betreffenden Funktionen seien nicht geschlossen integrierbar. Diese Integrale definieren neue Funktionen, die nicht zur Klasse der elementaren Funktionen gehören. Beispiele dafür sind

$$\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}\,, \quad \int \sin x^2\,\mathrm{d}x\,, \quad \int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}$$

In solchen Fällen wird als unterstützendes Hilfsmittel u.a. die Potenzreihenentwicklung herangezogen (vgl. Abschn. 7.2.5).
Die zunächst behandelten drei Verfahren

- Integration durch Substitution,
- partielle Integration und
- Integration nach Partialbruchzerlegung

dienen im wesentlichen der geschlossenen Integration. Führen sie nicht zum Ziel, kann man unter bestimmten Voraussetzungen die anschließend besprochenen numerischen Näherungsverfahren zur Integration benutzen, die im Wirkungsgrad einer geschlossenen Integration durchaus gleichwertig sind. Häufig wird man sogar eine näherungsweise Integration bevorzugen, obwohl eine geschlossene Integration möglich ist, da das Näherungsverfahren mitunter weniger Aufwand erfordert und praktisch hinreichend genaue Werte liefert.

Darüber hinaus gibt es zahlreiche Softwareangebote, die die Berechnung von Integralen mit Hilfe eines Computers ermöglichen. Zur Beurteilung der Ergebnisse ist trotzdem die Kenntnis der nachfolgenden Integrationsverfahren vorteilhaft.

6.2.2 Integration durch Substitution

6.2.2.1 Allgemeines Prinzip des Verfahrens

Das Substitutionsverfahren strebt eine Vereinfachung des zu lösenden Integrals an, indem für einen Teil $\varphi(x)$ des Integranden eine neue Variable eingeführt wird. Das trifft insbesondere zu, wenn der Integrand durch den Term $f(\varphi(x))$ einer mittelbaren Funktion gegeben ist. Aber nicht in jedem solchen Falle kann das Integral durch Substitution gelöst werden. Andererseits ist das Substitutionsverfahren nicht an Integranden der Form $f(\varphi(x))$ gebunden, wie die nachfolgenden Darlegungen noch zeigen.
Zunächst seien zwei Beispiele betrachtet.

Beispiel 6.29

$\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$ ist kein Grundintegral, obwohl der Integrand sehr einfach ist. Durch die Substitution $z = 2x + 1$ wird eine neue Variable eingeführt. Für $\sqrt{2x+1}$ kann man dann $\sqrt{z}$ schreiben. Da die Variable x außerdem noch im Differential $\mathrm{d}x$ erscheint, muß auch hier eine Umrechnung vorgenommen werden. Aus $z = 2x + 1$ erhält man durch Differentiation

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2 \quad \text{und} \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}z.$$

Damit ist folgende Weiterrechnung möglich:

$$\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{z}\,\frac{\mathrm{d}z}{2} = \frac{1}{2}\int z^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{3}z^{\frac{3}{2}} + C$$

und unter Beachtung von $z = 2x + 1$

$$\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C = \underline{\underline{\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.}}$$

Beispiel 6.30

$\int (2-3x)^7\,\mathrm{d}x$ ist ebenfalls kein Grundintegral. Durch Umformung des Integranden nach dem binomischen Satz läßt es sich aber in eine Summe von Grundintegralen zerlegen. Einfacher ist die Anwendung der Substitution $z = 2 - 3x$. Durch Differentiation ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -3 \quad \text{und} \quad \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}z}{3}.$$

Durch Einsetzen erhält man

$$\int (2-3x)^7\,\mathrm{d}x = \int z^7\left(-\frac{\mathrm{d}z}{3}\right) = -\frac{1}{3}\int z^7\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{24}z^8 + C = \underline{\underline{-\frac{1}{24}(2-3x)^8 + C.}}$$

Das diesen Beispielen zugrunde liegende Lösungsprinzip wird aus der folgenden Überlegung ersichtlich.

Es sei F eine in $[a,b]$ differenzierbare Funktion und $F' = f$. Für Argumente $z \in [a,b]$ gelte also $F(z) + C = \int f(z)\,\mathrm{d}z$.
Ferner sei $z = \varphi(x)$ Funktionswert einer Funktion φ für $x \in [\alpha,\beta]$. Dann ergibt sich unter gewissen Voraussetzungen, die weiter unten besprochen werden, nach der Kettenregel der Differentialrechnung

$$\frac{\mathrm{d}F(\varphi(x))}{\mathrm{d}x} = F'(\varphi(x))\,\varphi'(x).$$

Durch Umkehrung, also durch Integration, erhält man daraus

$$F(\varphi(x)) + C = \int F'(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wegen $\varphi(x) = z$ und $F' = f$ ist das gleichbedeutend mit

$$\int f(z)\,\mathrm{d}z = \int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beachtet man noch die Integrationsgrenzen, so ist für $\varphi(\alpha) = a$ und $\varphi(\beta) = b$

$$\boxed{\int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x} \tag{6.28}$$

Das ist die dem Substitutionsverfahren zugrunde liegende Formel. Sie entspricht etwa der Kettenregel der Differentialrechnung, obwohl sie mit dieser nicht gleichbedeutend ist.
In (6.28) sind beide Integrale sinnvoll, wenn folgendes vorausgesetzt wird:

1. f ist in $[a,b]$ stetig,
2. φ ist differenzierbar in $[\alpha,\beta]$,
3. φ' ist stetig in $[\alpha,\beta]$,
4. $\varphi'(x) \neq 0$ für alle $x \in [\alpha,\beta]$.

Die Bedingung 1 gewährleistet die Existenz des linken Integrals, die Bedingungen 2 und 3 sichern die Existenz des rechten Integrals. Die Bedingung 4 sagt aus, daß die Funktion φ in $[\alpha,\beta]$ streng monoton ist. Damit ist φ auch eindeutig umkehrbar, und die Grenzen α und β können unmittelbar durch

$$\alpha = \psi(a) \text{ und } \beta = \psi(b)$$

ausgedrückt werden, wenn ψ die Umkehrfunktion von φ ist.
Die Formel (6.28) kann von links nach rechts und auch von rechts nach links gelesen werden. Von links nach rechts bedeutet sie:

> Ein beliebiges Integral $\int f(z)\,\mathrm{d}z$ kann dadurch in einen anderen Integraltyp umgewandelt werden, daß man in geeigneter Weise $z = \varphi(x)$ setzt und dann das Integral $\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ betrachtet. Ist dieses ein Grundintegral oder läßt es sich durch mehrere Grundintegrale ausdrücken, so ist die Aufgabe geschlossen lösbar.

Von rechts nach links gelesen bedeutet (6.28)

> Das Integral eines Produktes läßt sich immer dann berechnen, wenn der eine Faktor Funktionswert $f(\varphi(x))$ einer mittelbaren Funktion und der andere Faktor die Ableitung $\varphi'(x)$ des inneren Terms ist, sofern für die Funktion f unter Beachtung der Substitution $z = \varphi(x)$ ein Integral $\int f(z)\,\mathrm{d}z$ angegeben werden kann.

Der Erfolg einer solchen Rechnung ist abhängig von der richtigen Wahl der Substitution $z = \varphi(x)$. Dies setzt gewisse Erfahrungen voraus, die sich nur durch gründliches Üben erwerben lassen. Vor der Festlegung der Substitution verschaffe man sich immer erst Klarheit über die Struktur des Integranden und berücksichtige auch den Einfluß des Differentials $\mathrm{d}x$.

6.2.2.2 Integrale der Form $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$

Zu beachten ist, daß neben dem Funktionswert $f(\varphi(x))$ einer mittelbaren Funktion immer die Ableitung $\varphi'(x)$ des inneren Terms als Faktor auftritt. Neben dem allgemeinen Fall ergeben sich einige wichtige Sonderfälle.

Allgemeiner Fall

Aus der Substitution $z = \varphi(x)$ erhält man $\mathrm{d}z = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ und somit

$$\boxed{\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(z)\,\mathrm{d}z} \tag{6.29}$$

φ ist eine lineare Funktion

$\varphi(x) = ax + b$

Substitution: $z = ax + b$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = a$, $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}z}{a}$

$$\boxed{\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(z)\,\mathrm{d}z} \tag{6.30}$$

f ist Potenzfunktion mit einem Exponenten $n \neq -1$

Der Integrand lautet $(\varphi(x))^n\,\varphi'(x)$. Für negative n muß $\varphi(x) \neq 0$ sein.
Substitution: $z = \varphi(x)$, $\mathrm{d}z = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$

$$\boxed{\int (\varphi(x))^n\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int z^n\,\mathrm{d}z = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C = \frac{(\varphi(x))^{n+1}}{n+1} + C} \tag{6.31}$$

f ist Potenzfunktion mit dem Exponenten $n = -1$

Der Integrand lautet $\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, wobei stets $\varphi(x) \neq 0$ sein muß. Der Zählerterm ist also die Ableitung des Nennerterms.

Substitution: $z = \varphi(x)\,, \quad \mathrm{d}z = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$

$$\boxed{\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}z}{z} = \ln|z| + C = \ln|\varphi(x)| + C} \tag{6.32}$$

Beispiele zu Gl. (6.29):

Man nutze die Möglichkeit der Probe durch Differentiation des Ergebnisses!

Beispiel 6.31

$$\int \sin^5 x \cos x\,\mathrm{d}x$$

Aus $z = \sin x$ erhält man durch Differenzieren $\mathrm{d}z = \cos x\,\mathrm{d}x$ und nach Einsetzen

$$\int \sin^5 x \cos x\,\mathrm{d}x = \int z^5\,\mathrm{d}z = \frac{1}{6}z^6 + C = \underline{\underline{\frac{1}{6}\sin^6 x + C}}$$

Beispiel 6.32

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos x\,\mathrm{d}x$$

Zur Berechnung des bestimmten Integrals ergeben sich zwei Möglichkeiten.

1. Möglichkeit: Es wird zunächst unbestimmt integriert ohne jegliche Berücksichtigung der Grenzen. Mit dem Ergebnis des unbestimmten Integrals wird in einer *neuen Gleichung* das bestimmte Integral berechnet.

Also erhält man unter Benutzung des Beispieles 6.31:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\sin^6 x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}\left(\sin^6\frac{\pi}{2} - \sin^6\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{64}\right) = \underline{\underline{\frac{21}{128}}}$$

2. Möglichkeit: Die Rechnung erfolgt durchgehend. Mit Hilfe der Substitutionsgleichung werden auch die Grenzen auf die neue Variable umgerechnet.

Häufig ist dieser Weg günstiger als der erste, da sich die Rückrechnung auf die ursprüngliche Variable erübrigt.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos x\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} z^5\,\mathrm{d}z = \frac{1}{6}z^6\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{64}\right) = \underline{\underline{\frac{21}{128}}}$$

Substitution:

$$z = \sin x \qquad x_1 = \frac{\pi}{6} \to z_1 = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{d}z = \cos x\,\mathrm{d}x \qquad x_2 = \frac{\pi}{2} \to z_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

Beispiel 6.33

$$\int \frac{\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{1+\sin^2\alpha}$$

Die Substitution $z=\sin\alpha$, $\mathrm{d}z=\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha$ führt auf

$$\int \frac{\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{1+\sin^2\alpha}=\int\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=\arctan z+C=\underline{\underline{\arctan(\sin\alpha)+C}}$$

Beispiel 6.34

$$\int_0^1 \frac{\arctan x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

Wegen $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ hat der Integrand die Form $\varphi(x)\varphi'(x)$.

Substitution:	Grenzen:
$z=\varphi(x)=\arctan x$	$x_1=0 \quad z_1=\arctan 0=0$
$\mathrm{d}z=\varphi'(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$	$x_2=1 \quad z_2=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$

$$\int_0^1 \frac{\arctan x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}z^2\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\underline{\underline{\frac{\pi^2}{32}}}$$

Beispiel 6.35

$$\int \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x}$$

Wegen $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ hat der Integrand die Form $\varphi(x)\varphi'(x)$.

Substitution: $z=\ln x$, $\mathrm{d}z=\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x}=\int z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}z^2+C=\underline{\underline{\frac{1}{2}(\ln x)^2+C}}$$

In vielen Fällen ist der Integrand nicht unmittelbar in der Form $f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$ gegeben, kann aber durch arithmetische Operationen, z.B. durch Erweitern mit einem konstanten Faktor, auf diese Form gebracht werden.

Beispiel 6.36

$$\int x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Es ist $f(\varphi(x))=\mathrm{e}^{-x^2}$, $\varphi(x)=-x^2$, $\varphi'(x)=-2x$. Im Integranden fehlt also der Faktor -2. Nach Erweitern mit diesem Faktor kann in der üblichen Weise substituiert werden:

$z=-x^2$, $\mathrm{d}z=-2x\,\mathrm{d}x$

$$\int x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{-2}\int\left(-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^z+C=\underline{\underline{-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}+C}}$$

Beispiel 6.37

$$\int \sin^3 x \, \mathrm{d}x$$

Damit die Ableitung des inneren Terms als Faktor auftritt, ist eine Umformung nötig. Danach substituiert man $z = \cos x$, $-\mathrm{d}z = \sin x \, \mathrm{d}x$.

$$\int \sin^3 x \, \mathrm{d}x = \int \sin^2 x \sin x \, \mathrm{d}x = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, \mathrm{d}x = -\int (1 - z^2) \, \mathrm{d}z$$
$$= -\left(z - \frac{z^3}{3}\right) + C = \underline{\underline{-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C}}$$

Beispiele zu Gl. (6.30):

Beispiel 6.38

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{3u - 2}$$

Substitution: $z = 3u - 2$, $\mathrm{d}z = 3\,\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}z}{3}$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{3u - 2} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{3}\ln|z| + C = \underline{\underline{\frac{1}{3}\ln|3u - 2| + C}}$$

Beispiel 6.39

$$\int \mathrm{e}^{2x+5} \, \mathrm{d}x$$

Substitution: $z = 2x + 5$, $\mathrm{d}z = 2\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{2}$

$$\int \mathrm{e}^{2x+5} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^z \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\mathrm{e}^z + C = \underline{\underline{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+5} + C}}$$

Beispiel 6.40

$$\int \sin(\omega t + \varphi) \, \mathrm{d}t$$

Substitution: $z = \omega t + \varphi$, $\mathrm{d}z = \omega\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}z}{\omega}$

$$\int \sin(\omega t + \varphi) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\int \sin z \, \mathrm{d}z = -\frac{1}{\omega}\cos z + C = \underline{\underline{-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) + C}}$$

Beispiel 6.41

$$\int x\sqrt{2x - 1}\,\mathrm{d}x$$

Substitution: $z = 2x - 1$, $x = \frac{z+1}{2}$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{2}$

$$\int x\sqrt{2x - 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{z+1}{2}\sqrt{z}\frac{\mathrm{d}z}{2} = \frac{1}{4}\int (z+1) z^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{4}\int \left(z^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{1}{2}}\right) \mathrm{d}z$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}z^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right) + C = \frac{1}{2}z\sqrt{z}\left(\frac{z}{5} + \frac{1}{3}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}(2x-1)\sqrt{2x-1}\left(\frac{1}{5}(2x-1)+\frac{1}{3}\right)+C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{5}\left(x+\frac{1}{3}\right)(2x-1)\sqrt{2x-1}+C}}$$

Durch Ausklammern konstanter Faktoren, Anwendung goniometrischer Beziehungen und andere Umformungen kann häufig erreicht werden, daß eine lineare Substitution auf ein Grundintegral führt.

Beispiel 6.42

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2-t^2}}$$

Nach Ausklammern des Faktors $\frac{1}{a}$ ist folgende Substitution möglich:

$$z = \frac{t}{a}, \quad \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}t}{a}, \quad \mathrm{d}t = a\mathrm{d}z$$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2-t^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{t^2}{a^2}\right)}} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{a}\right)^2}} = \int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$= \arcsin z + C = \underline{\underline{\arcsin \frac{t}{a} + C}}$$

Beispiel 6.43

$$\int \cos^2 x \mathrm{d}x$$

Aus $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ folgt $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ und somit

$$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos 2x \, \mathrm{d}x.$$

Im zweiten Integral ist $z = 2x$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{2}$ zu setzen.

$$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x + C_1 + \frac{1}{4}\int \cos z \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2}x + C_1 + \frac{1}{4}\sin z + C_2$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C = \underline{\underline{\frac{1}{2}(x+\sin x \cos x)+C}}$$

Beispiel 6.44

Wegen $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ erhält man aus Beispiel 6.43:

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \int (1-\cos^2 x)\, \mathrm{d}x = x - \frac{1}{2}(x+\sin x \cos x) + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}(x-\sin x \cos x)+C.}}$$

Beispiele zu Gl. (6.31)

Zu dieser Gruppe von Aufgaben gehören auch die Beispiele 6.31 und 6.32.

Beispiel 6.45

$$\int_1^2 x\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_1^2 (-2)\,x\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\int_3^0 z^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_0^3 z^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{3}z\sqrt{z}\Big|_0^3 = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$$

Substitution:	Grenzen:
$z = 4 - x^2$	$x_1 = 1 \rightarrow z_1 = 4 - 1 = 3$
$\mathrm{d}z = -2x\,\mathrm{d}x$	$x_2 = 2 \rightarrow z_2 = 4 - 4 = 0$

Beispiele zu Gl. (6.32)

Auch hier ist häufig eine Umformung nötig, bevor der Integrand die gewünschte Form hat.

Beispiel 6.46

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\ln|z| + C = \underline{\underline{-\ln|\cos x| + C}}$$

Substitution: $z = \cos x\,,\quad -\mathrm{d}z = \sin x\,\mathrm{d}x$

Beispiel 6.47

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{\sin x}{\cos x}\cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x}{\tan x} = \int \frac{\mathrm{d}z}{z} = \ln|z| + C$$

$$= \underline{\underline{\ln|\tan x| + C}}$$

Substitution: $z = \tan x\,,\quad \mathrm{d}z = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

Beispiel 6.48

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y \ln y} = \int \frac{\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y}{\ln y} = \int \frac{\mathrm{d}z}{z} = \ln|z| + C = \underline{\underline{\ln|\ln y| + C}}$$

Substitution: $z = \ln y\,,\quad \mathrm{d}z = \dfrac{1}{y}\,\mathrm{d}y$

Beispiel 6.49

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2 - 4x + 5}$$

Hier ist zunächst eine Umformung des Integranden in der folgenden Art erforderlich:

$$\frac{x}{x^2-4x+5}=\frac{\frac{1}{2}\cdot(2x-4)+2}{x^2-4x+5}=\frac{1}{2}\frac{2x-4}{x^2-4x+5}+\frac{2}{x^2-4x+5}$$

Demzufolge kann man das Integral zerlegen in

$$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2-4x+5}=\frac{1}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x+2\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+5}$$

oder $I=\frac{1}{2}I_1+2I_2$.

In I_1 ist der Zählerterm die Ableitung des Nennerterms. Also gilt

$$I_1=\int\frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}z}{z}=\ln|z|+C_1=\ln\left|x^2-4x+5\right|+C_1,$$

sofern $z=x^2-4x+5$ und $\mathrm{d}z=(2x-4)\,\mathrm{d}x$.

In I_2 ist eine weitere Umformung mit Anwendung der quadratischen Ergänzung notwendig:

$$I_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+5}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-4x+4)+1}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2+1}=\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}$$

$=\arctan u+C_2=\arctan(x-2)+C_2$, sofern $u=x-2$, $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$.

Insgesamt erhält man dann

$$I=\frac{1}{2}I_1+2I_2=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+5\right|+\frac{C_1}{2}+2\arctan(x-2)+2C_2$$

$$=\underline{\underline{\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+5\right|+2\arctan(x-2)+C,}}$$

$$\text{wobei } C=\frac{C_1}{2}+2C_2$$

6.2.2.3 Substitution trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen

Im folgenden werden Integrale der Form

a) $\int f\left(x;\sqrt{a^2-x^2}\right)\,\mathrm{d}x$

b) $\int f\left(x;\sqrt{x^2+a^2}\right)\,\mathrm{d}x$

c) $\int f\left(x;\sqrt{x^2-a^2}\right)\,\mathrm{d}x$

betrachtet, deren Integranden spezielle irrationale Terme enthalten. Da Quadratwurzeln aus Summen oder Differenzen sich nicht ohne weiteres vereinfachen lassen, werden zwei Formeln herangezogen, in denen die Summe bzw. die Differenz zweier Quadrate durch ein Quadrat ausgedrückt wird. Es sind dies die Formeln $\sin^2 z+\cos^2 z=1$ und $\cosh^2 z-\sinh^2 z=1$. Mit ihrer Hilfe sind beispielsweise die folgenden Umformungen möglich:

Wenn $x = a \sin z$, so ist

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 z} = a\sqrt{1 - \sin^2 z} = a\,|\cos z|\,,$$

oder für $x = a \cosh z$ ist

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \cosh^2 z - a^2} = a\sqrt{\cosh^2 z - 1} = a\,|\sinh z|.$$

Dadurch fallen die Wurzeln weg, und der Integrand vereinfacht sich wesentlich.

In der folgenden Übersicht sind die bei den verschiedenen Integranden anzuwendenden Substitutionen und die zugehörigen Umrechnungsformeln zusammengestellt:

Integral	$\int f\left(x; \sqrt{a^2 - x^2}\right) \mathrm{d}x$	$\int f\left(x; \sqrt{x^2 + a^2}\right) \mathrm{d}x$	$\int f\left(x; \sqrt{x^2 - a^2}\right) \mathrm{d}x$
Formeln für die Substitution	$x = a \sin z$ $\mathrm{d}x = a \cos z \,\mathrm{d}z$ $\sqrt{a^2 - x^2} = a\,\lvert\cos z\rvert$	$x = a \sinh z$ $\mathrm{d}x = a \cosh z \,\mathrm{d}z$ $\sqrt{x^2 + a^2} = a \cosh z$	$x = a \cosh z$ $\mathrm{d}x = a \sinh z \,\mathrm{d}z$ $\sqrt{x^2 - a^2} = a\,\lvert\sinh z\rvert$
Formeln für die Zurückführung auf die Variable x	$z = \arcsin \dfrac{x}{a}$	$z = \operatorname{arsinh} \dfrac{x}{a}$ $= \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$ $- \ln a$	$z = \operatorname{arcosh} \dfrac{x}{a}$ $= \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)$ $- \ln a$
	$\sin z = \dfrac{x}{a}$ $\cos z = \pm\dfrac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ $\tan z = \pm\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ $\cot z = \pm\dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$	$\sinh z = \dfrac{x}{a}$ $\cosh z = \dfrac{1}{a}\sqrt{x^2 + a^2}$ $\tanh z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ $\coth z = \dfrac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x}$	$\sinh z = \pm\dfrac{1}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ $\cosh z = \dfrac{x}{a}$ $\tanh z = \pm\dfrac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$ $\coth z = \pm\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

Bei bestimmten Integralen achte man darauf, daß die Grenzen im Definitionsbereich der verwendeten Funktionen liegen!

Beispiel 6.50

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3 + x^2}}$$

Substitution: $x = \sqrt{3} \sinh z$, $\mathrm{d}x = \sqrt{3} \cosh z \,\mathrm{d}z$, $\sqrt{3 + x^2} = \sqrt{3} \cosh z$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3 + x^2}} = \int \frac{\sqrt{3} \cosh z \,\mathrm{d}z}{\sqrt{3} \cosh z} = \int \mathrm{d}z = z + C = \operatorname{arsinh} \frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \ln\left(x + \sqrt{3 + x^2}\right) - \ln \sqrt{3} + C_1 = \underline{\underline{\ln\left(x + \sqrt{3 + x^2}\right) + C_2}}\,,$$

wobei $C_2 = -\ln \sqrt{3} + C_1$.

Beispiel 6.51

$$\int \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Substitution: $x = 3\sin z$, $\mathrm{d}x = 3\cos z\,\mathrm{d}z$, $\sqrt{9-x^2} = 3\,|\cos z|$

$$\int \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x = \int 3\,|\cos z|\;3\cos z\,\mathrm{d}z = 9\int \cos^2 z\,\mathrm{d}z$$

Das letzte Integral ist aus Beispiel 6.43 bereits bekannt. Also ist

$$\int \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}(z+\sin z\cos z)+C = \underline{\underline{\frac{9}{2}\left(\arcsin\frac{x}{3}+\frac{x}{9}\sqrt{9-x^2}\right)+C}}$$

6.2.2.4 Integrale der Form $\int R(\sin x;\cos x;\tan x;\cot x)\,\mathrm{d}x$

Die Schreibweise $R(\sin x;\cos x;\tan x;\cot x)$ bedeutet, daß der Integrand ein Term ist, in dem $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ durch rationale Rechenoperationen miteinander verknüpft sein können. Man sagt dazu, der Integrand sei rational in $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$. Durch Substitution

$$z = \tan\frac{x}{2} \text{ und damit } x = 2\arctan z,\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}z}{1+z^2} \text{ mit } x\in(-\pi,\pi)$$

geht der Integrand in einen rationalen Term der Variablen z über. Zur Umrechnung der Variablen müssen goniometrische Formeln herangezogen werden, z.B.

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2z}{1+z^2}.$$

In ähnlicher Weise ergeben sich

$$\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2};\quad \tan x = \frac{2z}{1-z^2};\quad \cot x = \frac{1-z^2}{2z}.$$

Damit kann man schreiben

$$\begin{aligned}\int R(\sin x;\cos x;\tan x;\cot x)\,\mathrm{d}x &= \int R\left(\frac{2z}{1+z^2};\frac{1-z^2}{1+z^2};\frac{2z}{1-z^2};\frac{1-z^2}{2z}\right)\frac{2\,\mathrm{d}z}{1+z^2}\\ &= \int \overline{R}(z)\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Zur Lösung dieses neuen Integrals ist häufig die Anwendung der *Partialbruchzerlegung* (vgl. Abschn. 6.2.4) erforderlich.
Entsprechend erfolgt die Lösung von Integralen, deren Integrand rational in $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, $\coth x$ ist.

Beispiel 6.52

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{(1+z^2)\,\mathrm{d}z}{z(1+z^2)} = \int \frac{\mathrm{d}z}{z} = \ln|z|+C = \underline{\underline{\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C}}$$

Beispiel 6.53

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\cos x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}z}{\left(1-\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)(1+z^2)} = \int \frac{2\,\mathrm{d}z}{1+z^2-1+z^2}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}z}{z^2} = -\frac{1}{z} + C = -\frac{1}{\tan\frac{x}{2}} + C = \underline{\underline{-\cot\frac{x}{2} + C}}$$

6.2.3 Partielle Integration

Das Verfahren der partiellen Integration führt die Lösung eines Integrals auf zwei Teilintegrationen zurück, die schrittweise nacheinander auszuführen sind. Es ist bevorzugt dann anwendbar, wenn der Integrand das Produkt zweier Terme ist, von denen einer leicht integriert werden kann (Beispiele 6.54 und 6.55). Aber auch in solchen Fällen, in denen der Integrand zunächst nicht die Form eines Produkts hat, kann die partielle Integration erfolgreich sein (Beispiele 6.56 und 6.57).
Es seien $u = f(x)$ und $v = g(x)$ die Funktionswerte zweier differenzierbarer Funktionen f und g, deren Ableitungen $u' = f'(x)$ und $v' = g'(x)$ als stetig vorausgesetzt werden sollen. Nach der Produktregel der Differentialrechnung (s. Abschn. 5.2.5.3) gilt dann

$$\frac{\mathrm{d}(uv)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}v + u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \quad \text{bzw.} \quad (uv)' = u'v + uv'.$$

Durch Integration erhält man daraus

$$uv + c = \int u'v\,\mathrm{d}x + \int uv'\,\mathrm{d}x$$

oder

$$\int u'v\,\mathrm{d}x = uv + c - \int uv'\,\mathrm{d}x.$$

Da auf der rechten Seite dieser Gleichung noch ein unbestimmtes Integral steht, kann die zu uv gehörige Integrationskonstante c mit der zu $\int uv'\mathrm{d}x$ gehörigen Konstanten vereinigt werden. Man braucht das c daher nicht anzugeben und darf schreiben:

$$\boxed{\int u'v\,\mathrm{d}x = uv - \int uv'\,\mathrm{d}x} \tag{6.33}$$

Nach dieser Formel der partiellen Integration ist von den beiden Faktoren des Integrànden der eine zu differenzieren und der andere zu integrieren. Das Verfahren ist erfolgreich, wenn sich aus u' durch eine erste Teilintegration u berechnen läßt und wenn in der zweiten Teilintegration $\int uv'\,\mathrm{d}x$ auf ein Grundintegral führt oder nach anderen Integrationsverfahren gelöst werden kann. Entscheidend ist dabei, welcher der beiden Faktoren des Integranden mit u' und welcher mit v bezeichnet wird. Bei der Wahl dieser Bezeichnungen achte man darauf, daß die Ableitung v' einfacher als v wird und daß u nicht komplizierter als der zu integrierende Faktor u' ist. Gegebenenfalls ist dazu vorher eine kurze Überschlagsrechnung notwendig.

Die bei der ersten Teilintegration, also bei der Berechnung von u aus u', auftretende Integrationskonstante hebt sich aus der Rechnung immer heraus und braucht daher nicht berücksichtigt zu werden. Im ersten Beispiel wird das ausführlicher gezeigt. In den weiteren Beispielen wird nur noch am Ende der Integration eine Konstante angegeben.

Beispiel 6.54

$$\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

Lösung:

Der Ansatz $u' = \mathrm{e}^x$, $v = x$ führt durch Integration auf $u = \mathrm{e}^x + C_1$ und durch Differentiation auf $v' = 1$. Dann ist nach (6.33)

$$\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\,(\mathrm{e}^x + C_1) - \int (\mathrm{e}^x + C_1)\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{e}^x + C_1 x - (\mathrm{e}^x + C_1 x) + C.$$

Die aus der ersten Teilintegration herrührende Konstante C_1 hebt sich heraus, wogegen die aus der zweiten Integration stammende Konstante C in das Ergebnis eingeht. Man erhält also

$$\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C = \underline{\underline{\mathrm{e}^x\,(x-1) + C.}}$$

Man überprüfe in dieser Hinsicht auch die folgenden Beispiele.

Anmerkung: Der zweite mögliche Ansatz $u = \mathrm{e}^x$, $v' = x$ bringt keine Vereinfachung der Aufgabe, sondern führt auf das kompliziertere Integral $\int x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Beispiel 6.55

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x$$

Lösung:

$u' = \cos x \quad u = \sin x \quad (C_1$ wird weggelassen!)

$v = x \qquad v' = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = (x\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} - 1}}$$

Beispiel 6.56

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x$$

Lösung:

Der Integrand erhält die Form eines Produktes, indem die Zahl 1 als Faktor verwendet wird.

$u' = 1 \qquad u = x$

$v = \ln x \qquad v' = \frac{1}{x}$

$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = \underline{\underline{x(\ln x - 1) + C}}$

Beispiel 6.57

$\int \arcsin x \, dx$

Lösung:

$u' = 1 \qquad u = x$

$v = \arcsin x \qquad v' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

Zur zweiten Teilintegration ist die Substitution $z = 1 - x^2$, $dz = -2x \, dx$, $-\frac{dz}{2} = x \, dx$ erforderlich:

$-\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{z} + C = \sqrt{1 - x^2} + C$

Mithin ist

$\int \arcsin x \, dx = \underline{\underline{x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C}}$

Beispiel 6.58

$\int x \sin 3x dx$

Lösung:

Da der Faktor $\sin 3x$ Term einer mittelbaren Funktion ist, muß entweder bei den einzelnen Teilintegrationen oder, wie hier gezeigt, vor der partiellen Integration substituiert werden:

$z = 3x, \; x = \frac{z}{3}, \; dx = \frac{dz}{3}$

$\int x \sin 3x dx = \frac{1}{9} \int z \sin z \, dz$

Partielle Integration: $u' = \sin z \qquad u = -\cos z$

$v = z \qquad v' = 1$

$$\int x \sin 3x dx = \frac{1}{9} \left(-z \cos z + \int \cos z \, dz \right) = \frac{1}{9}(-z \cos z + \sin z + C)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{9}(-3x \cos 3x + \sin 3x + C)}}$$

Beispiel 6.59

$$\int e^x \sin x \, dx$$

Lösung:

$$u_1' = e^x \qquad u_1 = e^x$$

$$v_1 = \sin x \qquad v_1' = \cos x$$

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

Die Lösung des rechtsstehenden Integrals macht eine erneute partielle Integration notwendig:

$$u_2' = e^x \qquad u_2 = e^x$$

$$v_2 = \cos x \qquad v_2' = -\sin x$$

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx \right) + C_1$$

Wenn, wie in diesem Falle, das rechtsstehende Integral mit dem Ausgangsintegral übereinstimmt, so ist die Rechnung keineswegs gescheitert, sondern man kann beide Integrale auf einer Seite der Gleichung zusammenfassen und nach dem Ausgangsintegral auflösen:

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x + C_1$$

oder

$$\int e^x \sin x \, dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C}} \qquad \left(C = \frac{C_1}{2} \right)$$

In vielen Fällen muß bis zur endgültigen Lösung des Integrals die partielle Integration mehrmals hintereinander ausgeführt werden. Mit jedem Schritt vereinfacht sich dabei das auf der rechten Seite der Gleichung verbleibende Integral. Die aus diesem Verfahren abgeleiteten allgemeinen Formeln heißen **Rekursionsformeln** (Rückführungsformeln). Die folgenden Beispiele zeigen die wiederholte Anwendung der partiellen Integration und die damit verbundene Herleitung von Rekursionsformeln. Auch die Integraltafel am Ende des Bandes enthält viele Rekursionsformeln, so z.B. die Integrale 3.1, 3.2, 4.1, 5.1 und andere.

Beispiel 6.60

$$\int x^2 e^x \, dx$$

Lösung:

$$u' = e^x \qquad u = e^x$$

$$v = x^2 \qquad v' = 2x$$

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx$$

Für das rechtsstehende Integral erhält man bei erneuter partieller Integration aus Beispiel 6.54 den Term $e^x(x-1)$. Somit ist

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2e^x(x-1) + C = \underline{\underline{e^x(x^2 - 2x + 2) + C}}$$

Dieselbe Rechnung ergibt für einen beliebigen Exponenten n die Rekursionsformel:

$$\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx.$$

Beispiel 6.61

$$\int \sin^n x \, dx$$

Lösung:

Man schreibt $\sin^n x = \sin^{n-1} x \sin x$ und setzt

$u' = \sin x$ $\qquad$ $u = -\cos x$

$v = \sin^{n-1} x$ $\qquad$ $v' = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x.$

Dann ist

$$\int \sin^n x \, dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx.$$

Das rechtsstehende Integral läßt sich als Differenz zweier Integrale schreiben, von denen eins das Ausgangsintegral ist:

$$\int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx = \int \sin^{n-2} x \, (1 - \sin^2 x) \, dx = \int \sin^{n-2} x \, dx - \int \sin^n x \, dx.$$

Somit ergibt sich

$$\int \sin^n x \, dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \sin^n x \, dx.$$

Faßt man die beiden Integrale mit dem Integranden $\sin^n x$ auf der linken Seite zusammen und dividiert durch den Koeffizienten $1 + (n-1) = n$, so erhält man eine Rekursionsformel, in der der Exponent des Integranden in einem Schritt von n auf $n-2$ erniedrigt wird:

$$\int \sin^n x \, dx = \underline{\underline{-\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx.}}$$

6.2.4 Integration nach Partialbruchzerlegung

6.2.4.1 Vorbemerkungen

Im Gegensatz zu den ersten beiden Integrationsverfahren, deren Anwendungsgebiete nicht genau begrenzt sind, ist die Integration nach Partialbruchzerlegung nur auf eine ganz bestimmte Klasse von Funktionen, auf gebrochenrationale Funktionen, anwendbar. Man kann sogar voraussetzen, daß der Integrand echt gebrochenrational ist, denn nach Abschn. 1.3.3.2 läßt sich jede unecht gebrochene rationale

Funktion als Summe einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenen rationalen Funktion darstellen. Die Integration einer ganzrationalen Funktion bereitet aber keine Schwierigkeiten. Daher sollen hier nur solche Integrale behandelt werden, deren Integrand die Form

$$R(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0}{x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

mit $n < m$; $m, n \in \mathbb{N}$; $a_i, b_i \in \mathbb{R}$; $a_n \neq 0$

hat. Die hier berücksichtigte Bedingung $b_m = 1$ läßt sich notfalls immer durch Ausklammern geeigneter Faktoren erreichen. Der einfacheren Darstellung wegen wird nur der Fall $m = 2$ betrachtet, was wegen $n < m$ die Einschränkung $n = 1$ zur Folge hat. Die hieraus gewonnenen Erkenntnisse lassen sich ohne Schwierigkeiten auf Exponenten $m > 2$ übertragen.

Der Hauptteil des Verfahrens besteht aus der Zerlegung des gebrochenrationalen Integranden in endlich viele Partial- oder Teilbrüche, was nach dem hier nicht bewiesenen Satz von der Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen immer möglich ist. Die eigentliche Integration ist nicht problematisch und vollzieht sich im wesentlichen nach dem Substitutionsverfahren.

Zur Erklärung des Prinzips der Partialbruchzerlegung werden zunächst zwei Brüche mit linearen Nennern addiert:

$$\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+5} = \frac{3(x+5)+2(x-2)}{(x-2)(x+5)} = \frac{5x+11}{x^2+3x-10}.$$

Die Zerlegung eines gebrochenrationalen Terms $\dfrac{Z(x)}{N(x)}$ in Partialbrüche ist der umgekehrte Vorgang. Der Quotient mit dem quadratischen Nennerterm $N(x)$ ist so in zwei Teilbrüche mit linearen Nennern zu zerlegen, daß $N(x)$ der Hauptnenner der beiden linearen Nenner ist und die Summe der Teilbrüche mit dem gegebenen Quotienten $\dfrac{Z(x)}{N(x)}$ übereinstimmt. Es kommt demnach darauf an, für $N(x)$ eine Faktorzerlegung $N(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ zu finden. Bezeichnen darin x_1 und x_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung $N(x) = 0$, so ist diese Faktorzerlegung eine Folgerung aus dem Fundamentalsatz der Algebra und daher immer möglich. Die Nenner der Teilbrüche ergeben sich aus den Linearfaktoren $x - x_1$ und $x - x_2$. Deren Kenntnis setzt die Berechnung der Nullstellen x_1 und x_2 des quadratischen Nennerterms $N(x)$ voraus. Dabei sind die folgenden vier Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: $N(x)$ hat nur reelle einfache und folglich voneinander verschiedene Nullstellen;

Fall 2: $N(x)$ hat nur reelle, aber auch mehrfache Nullstellen;

Fall 3: $N(x)$ enthält komplexe einfache Nullstellen;

Fall 4: $N(x)$ enthält komplexe mehrfache Nullstellen.

6.2.4.2 Nenner mit nur einfachen reellen Nullstellen

Zu lösen sei das Integral

$$\int \frac{Z(x)}{N(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{a_1x + a_0}{x^2 + b_1x + b_0}\,\mathrm{d}x.$$

Für die Nullstellen x_1 und x_2 des Nenners $N(x)$ gelte $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und $x_1 \neq x_2$. Dann ist für $N(x)$ die Produktdarstellung

$$N(x) = x^2 + b_1x + b_0 = (x - x_1)(x - x_2)$$

möglich. Als Ansatz für die Partialbruchzerlegung ergibt sich daraus

$$\frac{a_1x + a_0}{x^2 + b_1x + b_0} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2},$$

worin A und B noch zu bestimmende Konstanten sind. Wie man sich sofort überzeugen kann, ist die Summe der rechtsstehenden Teilbrüche ein Quotient mit dem Hauptnenner $N(x)$ und einem linearen Zähler $Z(x)$:

$$\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} = \frac{A(x - x_2) + B(x - x_1)}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{(A + B)x - Ax_2 - Bx_1}{x^2 + b_1x + b_0}.$$

Man braucht die Konstanten A und B nur noch so zu bestimmen, daß

$$\begin{aligned} A + B &= a_1 \\ \text{und} \qquad -Ax_2 - Bx_1 &= a_0. \end{aligned}$$

Statt des Vergleichs der Koeffizienten kann man bei der Bestimmung von A und B auch nach einem Einsetzverfahren arbeiten, das in den Beispielen beschrieben wird. Nach der Partialbruchzerlegung ist die Integration in einfacher Weise möglich:

$$\int \frac{a_1x + a_0}{x^2 + b_1 + b_0}\,\mathrm{d}x = A\int \frac{\mathrm{d}x}{x - x_1} + B\int \frac{\mathrm{d}x}{x - x_2}.$$

Beispiel 6.62

$$\int \frac{5x + 11}{x^2 + 3x - 10}\,\mathrm{d}x$$

Lösung:

Bestimmung der Nullstellen des Nenners:

$x^2 + 3x - 10 = 0$ ergibt $x_1 = 2$ und $x_2 = -5$.

Mithin ist $N(x) = x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$.

Zerlegung in Partialbrüche:

$$\frac{5x + 11}{x^2 + 3x - 10} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 5}$$

Zur Vereinfachung multipliziert man mit dem Hauptnenner $N(x)$ und erhält

$5x + 11 = A(x + 5) + B(x - 2)$.

Da x eine frei wählbare Variable ist, bleibt diese Gleichung richtig, wenn für x beliebige reelle Zahlen eingesetzt werden. Setzt man nacheinander $x = x_1 = 2$ und $x = x_2 = -5$, so erhält man zwei Gleichungen zur Bestimmung der beiden Konstanten A und B:

$x = 2:$ $\quad 21 = 7A$

$x = -5:$ $\quad -14 = -7B.$

Daraus folgt $A = 3$ und $B = 2$.

Selbstverständlich muß man nicht unbedingt die Nullstellen des Nenners einsetzen, jedoch werden dann die Bestimmungsgleichungen für A und B nicht so einfach. Die Partialbruchzerlegung lautet

$$\frac{5x+11}{x^2+3x-10} = \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+5}.$$

Integration:

$$\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x+5} = \underline{\underline{3\ln|x-2| + 2\ln|x+5| + C}}$$

Der Integration liegt das Substitutionsverfahren zugrunde. Die sich aus den Teilintegralen ergebenden Integrationskonstanten werden zu einer einzigen Konstanten C vereinigt.

Das hier angewandte Verfahren läßt sich ohne Abänderungen auf den Fall übertragen, daß der Nennerterm $N(x)$ von höherem Grade als 2 ist.

6.2.4.3 Nenner mit mehrfachen reellen Nullstellen

Für die Nullstellen x_1 und x_2 des Nenners $N(x)$ von $\dfrac{a_1x + a_0}{x^2 + b_1x + b_0}$ gelte $x_1 = x_2$ und $x_1 \in \mathbb{R}$. Die Produktdarstellung für $N(x)$ lautet dann

$$N(x) = x^2 + b_1x + b_0 = (x - x_1)(x - x_2) = (x - x_1)^2.$$

$N(x)$ ist also ein vollständiges Quadrat. Würde die Partialbruchzerlegung genauso angesetzt wie in 6.2.4.2, so erhielte man

$$\frac{a_1x + a_0}{x^2 + b_1x + b_0} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} = \frac{A + B}{x - x_1}.$$

Dieser Ansatz ist offenbar falsch, denn die Summe der rechtsstehenden Teilbrüche ist ein Quotient mit linearem Nenner und kann daher dem linksstehenden Quotienten mit quadratischem Nenner nicht gleich sein. Damit der Hauptnenner der Teilbrüche ebenfalls quadratisch ausfällt, muß der Ansatz richtig lauten:

$$\frac{a_1x + a_0}{x^2 + b_1x + b_0} = \frac{A}{(x - x_1)^2} + \frac{B}{x - x_1}.$$

Jetzt ergibt die Summe der Teilbrüche einen Quotienten mit dem quadratischen Nenner $N(x)$ und dem linearen Zähler $Z(x)$:

$$\frac{A}{(x-x_1)^2}+\frac{B}{x-x_1}=\frac{A+B(x-x_1)}{(x-x_1)^2}=\frac{Bx+(A-Bx_1)}{(x-x_1)^2}.$$

Den zweiten Teilbruch $\dfrac{B}{x-x_1}$ darf man im Ansatz nicht weglassen, da sonst der Zähler des Quotienten der rechten Seite konstant wäre und damit dem linearen Zähler der linken Seite widersprechen würde. Die weitere Rechnung verläuft genauso wie in 6.2.4.2.

Beispiel 6.63

$$\int \frac{x-5}{x^2-6x+9}\,dx$$

Lösung:

Nullstellen des Nenners:

$x^2-6x+9=0$ ergibt $x_1=3$ und $x_2=3$, also $x^2-6x+9=(x-3)^2$.

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x-5}{x^2-6x+9}=\frac{A}{(x-3)^2}+\frac{B}{x-3}$$

Die Multiplikation mit dem Hauptnenner $(x-3)^2$ liefert

$$x-5=A+B(x-3)$$

Da die beiden Nullstellen gleich sind, muß zur Bestimmung der Konstanten A und B neben $x=3$ noch irgendein anderer Wert für x eingesetzt werden, z.B. $x=4$.

$x=3:\qquad -2=A$

$x=4:\qquad -1=A+B$

Daraus folgt $A=-2$ und $B=1$, und die Zerlegung lautet

$$\frac{x-5}{x^2-6x+9}=\frac{-2}{(x-3)^2}+\frac{1}{x-3}.$$

Integration:

Mit Hilfe der Substitution $z=x-3$ erhält man

$$\int \frac{x-5}{x^2-6x+9}\,dx=-2\int\frac{dx}{(x-3)^2}+\int\frac{dx}{x-3}=\underline{\underline{\frac{2}{x-3}+\ln|x-3|+C.}}$$

Beispiel 6.64

$$\int \frac{15x^2+26x-5}{x^3+3x^2-4}\,dx$$

Lösung:

Nullstellen des Nenners:

$x^3+3x^2-4=0$ ergibt $x_1=1,\ x_2=x_3=-2.$

In diesem Beispiel besitzt der Nenner sowohl eine einfache als auch eine mehrfache Nullstelle. Die entsprechenden Verfahren sind miteinander zu verknüpfen.

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{15x^2+26x-5}{x^3+3x^2-4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+2}$$

Die Multiplikation mit dem Hauptnenner $(x-1)(x+2)^2$ ergibt

$$15x^2+26x-5 = A(x+2)^2 + B(x-1) + C(x-1)(x+2).$$

$$\begin{aligned} x=1: \quad & 36 = 9A \\ x=-2: \quad & 3 = -3B \\ x=0: \quad & -5 = 4A - B - 2C \end{aligned}$$

Daraus erhält man $A=4$, $B=-1$, $C=11$ und

$$\frac{15x^2+26x-5}{x^3+3x^2-4} = \frac{4}{x-1} - \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{11}{x+2}.$$

Integration:

$$\begin{aligned} \int \frac{15x^2+26x-5}{x^3+3x^2-4}\,\mathrm{d}x &= 4\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2} + 11\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2} \\ &= \underline{\underline{4\ln|x-1| + \frac{1}{x+2} + 11\ln|x+2| + C}} \end{aligned}$$

Kommen bei Nennern höheren Grades Nullstellen mit größerer Vielfachheit vor, so sind beim Ansatz der Partialbrüche alle Potenzen des zugehörigen Linearfaktors von der ersten bis zu der durch die Vielfachheit der Nullstelle festgelegten Potenz zu berücksichtigen. Die Anzahl der Partialbrüche ist immer gleich dem Grad des Nenners $N(x)$ des Integranden.

6.2.4.4 Nenner mit einfachen komplexen Nullstellen

Gilt für $N(x) = x^2+b_1x+b_0$ die Ungleichung $\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 < b_0$, so sind die Nullstellen des Nenners $N(x)$ konjugiert komplex. Eine Partialbruchzerlegung der gleichen Art wie in 6.2.4.2 würde in diesem Fall dazu führen, daß auch die Zähler A und B der Teilbrüche komplex wären. Daher verzichtet man auf die Partialbruchzerlegung und integriert den Term $\frac{a_1x+a_0}{x^2+b_1x+b_0}$ nach dem in Beispiel 6.49 gezeigten Verfahren. Durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor und Ergänzung einer Konstanten zerlegt man den Zähler so in zwei Teile, daß der erste Teil die Ableitung des Nenners als Faktor enthält und der zweite Teil eine Konstante ist. Damit zerfällt das Integral in zwei Summanden, die nach dem Substitutionsverfahren behandelt werden können. Treten bei Nennern höheren Grades reelle und konjugiert komplexe Nullstellen gleichzeitig auf, so sind die geeigneten Verfahren miteinander zu koppeln. Als Zähler des Teilbruches, dessen Nenner der quadratische Term mit den konjugiert komplexen Nullstellen ist, setzt man einen linearen Term an.

Beispiel 6.65

$$\int \frac{14x^2 - 51x + 43}{x^3 - 7x^2 + 17x - 15}\,\mathrm{d}x$$

Lösung:

Nullstellen des Nenners:

$x^3 - 7x^2 + 17x - 15 = 0$ ergibt $x_1 = 3$, $x_2 = 2 - \mathrm{j}$, $x_3 = 2 + \mathrm{j}$.

Als Produktdarstellung des Nenners erhält man $N(x) = (x-3)\left(x^2 - 4x + 5\right)$. Der quadratische Term, der die konjugiert komplexen Nullstellen liefert, wird nicht zerlegt.

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{14x^2 - 51x + 43}{x^3 - 7x^2 + 17x - 15} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx + C}{x^2 - 4x + 5}$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner ergibt

$$14x^2 - 51x + 43 = A\left(x^2 - 4x + 5\right) + (Bx + C)(x - 3).$$

Koeffizientenbestimmung durch Einsetzen beliebiger Werte für x:

$x = 3$: $\quad 16 = 2A$

$x = 0$: $\quad 43 = 5A - 3C$

$x = 2$: $\quad -3 = A - 2B - C$

Folglich ist $A = 8$, $B = 6$, $C = -1$.

Integration:

$$\begin{aligned}
\int \frac{14x^2 - 51x + 43}{x^3 - 7x^2 + 17x - 15}\,\mathrm{d}x &= 8\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3} + \int \frac{6x - 1}{x^2 - 4x + 5}\,\mathrm{d}x \\
&= 8\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3} + \int \frac{3(2x-4) + 11}{x^2 - 4x + 5}\,\mathrm{d}x \\
&= 8\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3} + 3\int \frac{2x-4}{x^2 - 4x + 5}\,\mathrm{d}x + 11\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2 + 1} \\
&= \underline{\underline{8\ln|x-3| + 3\ln\left|x^2 - 4x + 5\right| + 11\arctan(x-2) + C}}
\end{aligned}$$

6.2.4.5 Nenner mit mehrfachen komplexen Nullstellen

Da komplexe mehrfache Nullstellen immer paarweise konjugiert auftreten, ist dieser Fall erst bei Nennern vierten oder höheren Grades möglich. Bei der Partialbruchzerlegung sind die in 6.2.4.3 und 6.2.4.4 besprochenen Verfahren miteinander zu verknüpfen.

Beispiel 6.66

$$\int \frac{6x^3 - 29x^2 + 100x - 64}{x^4 - 8x^3 + 42x^2 - 104x + 169}\,\mathrm{d}x = \int \frac{6x^3 - 29x^2 + 100x - 64}{\left(x^2 - 4x + 13\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

Lösung:

Nullstellen des Nenners:

$(x^2 - 4x + 13)^2 = 0$ ergibt $x_1 = 2+3\mathrm{j}$, $x_2 = 2-3\mathrm{j}$, $x_3 = 2+3\mathrm{j}$, $x_4 = 2-3\mathrm{j}$.

Wie in 6.2.4.4 wird daher der quadratische Term $x^2 - 4x + 13$, der die konjugiert komplexen Lösungen liefert, nicht zerlegt. Die Mehrfachlösungen werden genauso wie in 6.2.4.3 berücksichtigt.

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{6x^3 - 29x^2 + 100x - 64}{(x^2 - 4x + 13)^2} = \frac{Ax + B}{(x^2 - 4x + 13)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - 4x + 13}$$

Die Multiplikation mit dem Hauptnenner ergibt

$$6x^3 - 29x^2 + 100x - 64 = Ax + B + (Cx + D)\,(x^2 - 4x + 13).$$

Zur Bestimmung der Konstanten A, B, C und D wird die Variable x mit beliebigen Werten belegt.

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
x = 0: & -64 & = & B & & & + & 13D \\
x = 1: & 13 & = & A & + & B & + 10C & + 10D \\
x = -1: & -199 & = & -A & + & B & - 18C & + 18D \\
x = 2: & 68 & = & 2A & + & B & + 18C & + 9D
\end{array}$$

Als Lösung dieses Gleichungssystems erhält man

$A = 2$, $B = 1$, $C = 6$, $D = -5$.

Die Partialbruchzerlegung lautet demnach

$$\frac{6x^3 - 29x^2 + 100x - 64}{(x^2 - 4x + 13)^2} = \frac{2x + 1}{(x^2 - 4x + 13)^2} + \frac{6x - 5}{x^2 - 4x + 13}.$$

Integration:

Es ist zweckmäßig, die Integration nach der Integraltafel zu vollziehen. Schreibt man

$$\begin{aligned}
\int \frac{6x^3 - 29x^2 + 100x - 64}{(x^2 - 4x + 13)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2x + 1}{(x^2 - 4x + 13)^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{6x - 5}{x^2 - 4x + 13}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2 - 4x + 13)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 - 4x + 13)^2} \\
&\quad +6\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2 - 4x + 13} - 5\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 4x + 13},
\end{aligned}$$

so können der Reihe nach die Integrale 1.4, 1.2, 1.3 und 1.1 angewandt werden. Als Ergebnis erhält man den Term

$$\frac{1}{18} \cdot \frac{5x - 28}{x^2 - 4x + 13} + 3\ln\left|x^2 - 4x + 13\right| - \frac{131}{54}\arctan\frac{x - 2}{3} + C.$$

6.2.5 Gebrauch von Integraltafeln

Häufig sind die wichtigsten Integrale in Tafeln zusammengestellt, wodurch sich der Aufwand bei der Lösung wesentlich verringert.[1] Eine solche Tafel exemplarisch ausgewählter Integrale ist diesem Buch beigefügt. Bei ihrem Gebrauch achte man vor allem auf die Einteilung der Integranden und auf die geltenden Einschränkungen, die in der letzten Spalte angegeben sind. Die Integranden sind nach der Art der in ihnen enthaltenen Funktionen geordnet. Die Merkmale für die Einteilung der Funktionen wurden bereits in 1.3.2 besprochen. Zur besseren Orientierung sind die Integrale numeriert. Algebraische Integranden findet man unter den Nummern 1 und 2, transzendente Integranden sind unter den Nummern 3 bis 5 aufgeführt. Enthält der Integrand gleichzeitig einen algebraischen und einen transzendenten Term, so suche man das Integral unter der Nummer des transzendenten Terms. Hat man den Typ des gegebenen Integranden in der Tafel gefunden, so sind in die Lösungsformel noch die als Koeffizienten und Exponenten auftretenden Konstanten einzusetzen.

Obwohl der Gebrauch einer Integraltafel die Integration in vielen Fällen erleichtert, kann man nicht völlig auf die in den vorangegangenen Abschnitten besprochenen Integrationsverfahren verzichten. Selbst in umfangreichen Integraltafeln kann nur eine begrenzte Auswahl von Integralen dargestellt werden. Ist ein zu lösendes Integral nicht in der Tafel zu finden, so versuche man, das Integral durch ein Integrationsverfahren auf ein in der Tafel vorhandenes Integral zurückzuführen.

Beispiel 6.67

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2-5x+11}}$$

Lösung:

Der Integrand ist algebraisch und irrational. Er ist im Integral 2.3 zu finden. Die Konstanten haben die Werte $a=2$, $b=-5$, $c=11$. Man kann sofort ablesen:

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2-5x+11}} = \frac{\sqrt{2x^2-5x+11}}{2} + \frac{5}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2-5x+11}}.$$

Das rechtsstehende Integral ist unter 2.1 dargestellt, wobei jedoch die in der letzten Spalte angegebenen drei Fälle zu unterscheiden sind. Im vorliegenden Fall ist $a=2>0$ und $4ac-b^2=63>0$. Es trifft also die Lösungsformel der ersten Zeile zu:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2-5x+11}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arsinh}\frac{4x-5}{\sqrt{63}} + C_1.$$

Insgesamt ergibt sich dann

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2-5x+11}} = \frac{\sqrt{2x^2-5x+11}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{8}\operatorname{arsinh}\frac{4x-5}{\sqrt{63}} + C.$$

[1] Eine sehr umfangreiche Sammlung enthält BARTSCH, Taschenbuch mathematischer Formeln, Fachbuchverlag Leipzig.

Beispiel 6.68

$$\int x^4 \, \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$$

Lösung:

Der Integrand enthält den algebraischen Term x^4 und den transzendenten Term e^{-x}. Sucht man in der Tafel nach Integralen, die Exponentialfunktionen enthalten, so findet man unter 4.1 eine Rekursionsformel, die nach mehrmaliger Anwendung die Lösung liefert.
Für $n = 4$ und $a = -1$ ist

$$\begin{aligned}\int x^4 \, \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x &= -x^4 \, \mathrm{e}^{-x} + 4\left(-x^3 \, \mathrm{e}^{-x} + 3\left(-x^2 \, \mathrm{e}^{-x} + 2\left(-x \, \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\right)\right)\right) + C \\ &= \underline{\underline{-\mathrm{e}^{-x}\left(x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24x + 24\right) + C.}}\end{aligned}$$

Beispiel 6.69

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3(2x-1)}$$

Lösung:

Dieses Integral ist in der Tafel nicht enthalten, aber unter 3.5 ist ein ähnliches angegeben. Es muß das Substitutionsverfahren herangezogen werden. Setzt man $z = 2x - 1$, $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}z}{2}$, so erhält man zunächst

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3(2x-1)} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}z}{\sin^3 z}$$

und kann jetzt die Formel 3.5 anwenden. Für $n = 3$ und $\omega = 1$ ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}z}{\sin^3 z} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\frac{\cos z}{\sin^2 z} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}z}{\sin z}\right) + C \\ &= \frac{1}{4}\left(-\frac{\cos z}{\sin^2 z} + \ln\left|\tan\frac{z}{2}\right|\right) + C \quad \text{(Integral 3.3)} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{4}\left(-\frac{\cos(2x-1)}{\sin^2(2x-1)} + \ln\left|\tan\frac{2x-1}{2}\right|\right) + C.}}\end{aligned}$$

6.2.6 Numerische Integration

Unter numerischer Integration versteht man die Berechnung bestimmter Integrale mit Hilfe von Näherungsformeln, von denen hier zwei besprochen werden. Mit derartigen Verfahren kann man bei entsprechendem Aufwand jede gewünschte Genauigkeit erzielen. Insofern müssen numerische Verfahren nicht als unzulänglich oder behelfsmäßig gelten. Mitunter gibt man ihnen sogar den Vorzug gegenüber einer formelmäßigen Integration, da bei Einsatz rechentechnischer Mittel die numerische Rechnung keine Hürde ist, wogegen die formelmäßige Lösung komplizierter Integrale mühsam oder sogar erfolglos sein kann. Die Anwendung der hier bespro-

chenen Verfahren setzt voraus, daß die zu integrierende Funktion als Wertetabelle mit konstanter Abszissenänderung vorliegt. Ist der Integrand analytisch als Term gegeben, so kann man durch Einsetzen geeigneter Abszissenwerte eine solche Wertetabelle aufstellen. Liegt der Integrand als Kurve vor, so braucht man nur die Paare der einander zugeordneten Abszissen und Ordinaten auszumessen.
Bei der Herleitung der Näherungsformeln wird zunächst von der Vorstellung ausgegangen, daß das bestimmte Integral den Inhalt einer Fläche angibt, die von einer Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[x_0, x_n]$ begrenzt wird, sofern f in $[x_0, x_n]$ keine negativen Werte annimmt. Zerlegt man das Intervall $[x_0, x_n]$ in n gleich breite Teilintervalle der Breite

$$h = \frac{x_n - x_0}{n}$$

und ersetzt die so entstandenen Flächenstreifen durch Rechtecke, wie das bereits in 6.1.2 gezeigt wurde, so ist die Summe dieser Rechtecke eine Näherungslösung für das bestimmte Integral.
Eine im allgemeinen bessere und leicht zu berechnende Näherung ergibt sich, wenn die krummlinige Begrenzung der Flächenstreifen durch die zugehörigen Sehnen ersetzt wird (Bild 6.10). Man erhält dann über jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ ein Trapez mit dem Flächeninhalt

$$\frac{y_{i-1} + y_i}{2} h.$$

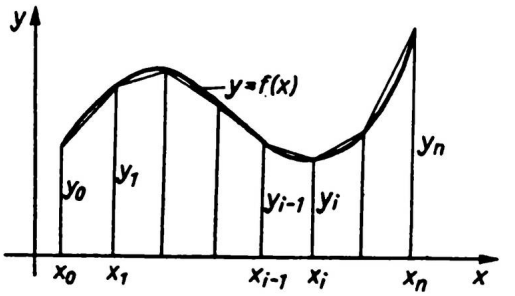


Bild 6.10

Die Summe aller Trapezflächen ist ein Näherungswert für den Inhalt der Fläche über dem Intervall $[x_0, x_n]$:

$$A \approx h \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right)$$

Eine Umformung ergibt die **Trapezformel**:

$$\boxed{A \approx h \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right)} \tag{6.34}$$

Die Trapezformel liefert ein zu kleines Ergebnis, wenn die Kurve im ganzen Intervall konkav ($f''(x) < 0$) ist, und ein zu großes Ergebnis, wenn die Kurve im ganzen Intervall konvex ($f''(x) > 0$) ist.
Eine Formel, die bei gleichem Aufwand noch genauere Ergebnisse liefert, erhält man, wenn zur Annäherung an die Kurve statt der Sehnen Parabeln 2.Grades verwendet werden (Bild 6.11). Unter den gleichen Voraussetzungen wie bei der Trapezformel wird das Intervall $[x_0, x_n]$ in eine gerade Anzahl n von Teilintervallen

gleicher Breite $h = \dfrac{x_n - x_0}{n}$

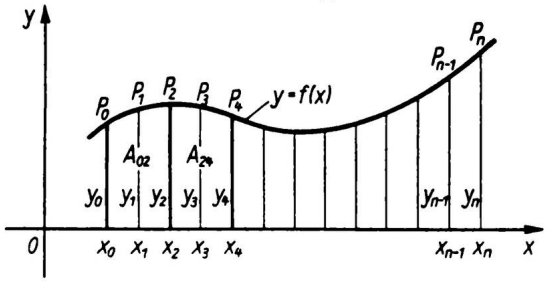


Bild 6.11

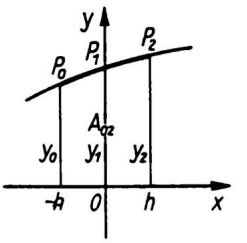


Bild 6.12

zerlegt. Je zwei der entstehenden Flächenstreifen werden zu einem Doppelstreifen zusammengefaßt. Der Inhalt des ersten Doppelstreifens über dem Intervall $[x_0, x_2]$ sei A_{02}. Durch die drei Kurvenpunkte P_0, P_1, P_2 läßt sich eindeutig eine Parabel mit der Gleichung $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ legen. Um die Bestimmung der Koeffizienten a_2, a_1, a_0 möglichst einfach zu gestalten, denkt man sich die y-Achse so weit parallel verschoben, daß sie durch den Punkt P_1 geht (Bild 6.12). Dadurch ändern sich die Koordinaten der drei Punkte des ersten Doppelstreifens folgendermaßen:

$$P_0\,(x_0; y_0) \rightarrow P_0\,(-h; y_0)$$
$$P_1\,(x_1; y_1) \rightarrow P_1\,(0; y_1)$$
$$P_2\,(x_2; y_2) \rightarrow P_2\,(h; y_2).$$

Da diese Punkte auf der Parabel liegen sollen, müssen ihre Koordinaten die Parabelgleichung erfüllen. Durch Einsetzen erhält man das Gleichungssystem

$$y_0 = a_2h^2 - a_1h + a_0$$
$$y_1 = a_0$$
$$y_2 = a_2h^2 + a_1h + a_0$$

mit den Variablen a_2, a_1 und a_0. Daraus folgt

$$a_2 = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)$$
$$a_1 = \frac{1}{2h}(y_2 - y_0)$$
$$a_0 = y_1.$$

Nachdem die Koeffizienten der Parabelgleichung bekannt sind, kann der Inhalt der parabelförmig begrenzten Fläche berechnet und als Näherungswert für A_{02} verwendet werden. Man erhält

$$A_{02} \approx \int_{-h}^{+h} (a_2x^2 + a_1x + a_0)\,dx = \frac{a_2x^3}{3} + \frac{a_1x^2}{2} + a_0x\Big|_{-h}^{+h} = \frac{2a_2h^3}{3} + 2a_0h.$$

Setzt man für a_2 und a_0 die berechneten Werte ein und vereinfacht, so ist

$$\boxed{A_{02} \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)} \tag{6.35}$$

Diese Formel wird **Keplersche Faßregel**[1] genannt. Man kann mit ihr in grober Näherung den Inhalt der Gesamtfläche berechnen, wenn das Intervall $[x_0, x_n]$ in nur zwei Teilintervalle zerlegt wird.
Die Flächeninhalte der übrigen Doppelstreifen (Bild 6.11) ergeben sich analog zu Gl. (6.35), also z.B.

$$A_{24} \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4).$$

Zum Intervall $[x_0, x_n]$ gehören insgesamt $\frac{n}{2}$ Doppelstreifen. Addiert man die Näherungswerte ihrer Flächeninhalte, so stellt die Summe in praktisch ausreichender Näherung den Inhalt der Gesamtfläche dar:

$$A \approx \frac{h}{3}((y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)).$$

Da unter den anfangs vorausgesetzten Bedingungen der Inhalt dieser Fläche mit dem bestimmten Integral der Funktion f im Intervall $[x_0, x_n]$ übereinstimmt, erhält man nach dem Zusammenfassen gleicher Glieder die **Simpsonsche Formel**[2]:

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}))}$$

$$n \in \mathbb{N} \text{ und gerade} \tag{6.36}$$

Hierin sind die y_i stets die Werte des Integranden: $y_i = f(x_i)$, unabhängig davon, ob das bestimmte Integral zur Berechnung einer Fläche oder in anderem Zusammenhang verwendet wird. Die Formel (6.36) ist auch dann richtig, wenn die Funktion f in $[x_0, x_n]$ negative Werte annimmt. Hat die zu f gehörige Kurve in $[x_0, x_n]$ Ecken oder Sprungstellen, so ist die Intervallteilung so zu wählen, daß diese Stellen nur in den Randpunkten der Teilintervalle auftreten. Mit der Simpsonschen Formel kann man theoretisch jede gewünschte Genauigkeit erzielen. Man braucht nur die Zahl n der Teilintervalle genügend groß zu wählen.
Bezeichnet man in (6.36) den linksstehenden exakten Wert mit I und den rechtsstehenden Näherungswert mit I_S, so läßt sich der Fehler der Simpsonschen Formel durch

$$|I - I_S| \leq \frac{nh^5}{180} M \tag{6.37}$$

abschätzen, worin M eine obere Schranke von $\left|f^{(4)}(x)\right|$ auf dem Intervall $[x_0, x_n]$ und n die geradzahlige Anzahl der Teilintervalle ist. (6.37) gibt eine relativ grobe,

[1] JOHANNES KEPLER (1571 bis 1630), deutscher Mathematiker und Astronom. Er schrieb u.a. ein Buch "Die Stereometrie des Fasses".
[2] THOMAS SIMPSON (1710 bis 1761), englischer Mathematiker

aber sichere Abschätzung des Fehlers. Diese Abschätzung ist undurchführbar, wenn der Integrand $f(x)$ nicht als analytischer Ausdruck vorliegt, sondern nur durch die Meßwerte y_i an den Meßstellen x_i gegeben ist.
Günstiger für die praktische Rechnung, insbesondere bei Verwendung programmierbarer Rechentechnik, ist die näherungsweise Darstellung des Fehlers mit Hilfe der Summe

$$I_N = \frac{2h}{3}\left(y_0 + y_n + 4\left(y_2 + y_6 + \ldots + y_{n-2}\right) + 2\left(y_4 + y_8 + \ldots + y_{n-4}\right)\right),$$

falls n ein ganzzahliges Vielfaches von 4 ist. Dann gilt

$$|I - I_S| \approx \frac{I_S - I_N}{15} \tag{6.38}$$

Zur Berechnung eines bestimmten Integrals mit der Simpsonschen Formel ist es zweckmäßig, rechentechnische Hilfsmittel (z.B. einen Taschenrechner) heranzuziehen und die Zwischenergebnisse in einem übersichtlichen Schema zu notieren. Für programmierbare Rechner gibt es Programme, die nach Eingabe der Funktion $f(x)$, der Schrittweite h und der Integralgrenzen unmittelbar das numerische Resultat liefern.

Beispiel 6.70

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Lösung:

Da es sich bei dieser Aufgabe um ein Grundintegral handelt, kann man die Lösung auch ohne Anwendung einer Näherungsformel sofort angeben:

$$I = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x\big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 \approx \underline{\underline{0,693147}}.$$

Zum Vergleich der erreichbaren Genauigkeiten soll die Lösung sowohl nach der Trapezformel als auch nach der Simpsonschen Formel gezeigt werden. Es sei $n = 8$ und damit $h = \frac{(2-1)}{8} = 0,125$. Die Trapezformel ergibt gemäß rechts stehender Tabelle:

i	x_i	$y_i = f(x_i) = \frac{1}{x_i}$
0	1,000	$\frac{1}{2}y_0 = 0,500000$
1	1,125	$y_1 = 0,888889$
2	1,250	$y_2 = 0,800000$
3	1,375	$y_3 = 0,727273$
4	1,500	$y_4 = 0,666667$
5	1,625	$y_5 = 0,615385$
6	1,750	$y_6 = 0,571429$
7	1,875	$y_7 = 0,533333$
8	2,000	$\frac{1}{2}y_8 = 0,250000$
		$S_T = 5,552976$

$$I_T = h \cdot S_T = 0,125 \cdot S_T = \underline{\underline{0,694122}}$$

Vor der Anwendung der Simpsonschen Formel empfiehlt sich eine Fehlerabschät-

zung nach (6.37) bzw. (6.38).

Für $f(x) = \frac{1}{x}$ erhält man $f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$. Wegen des im Intervall $[1,2]$ streng monoton fallenden Verlaufs dieser Funktion ist $M = f^{(4)}(1) = 24$ und somit nach (6.37)

$$|I - I_S| \leq \frac{8 \cdot 0,125^5}{180} \cdot 24 = 3,25 \cdot 10^{-5} < 4 \cdot 10^{-5}.$$

Die Ungenauigkeit beeinflußt also nicht die ersten 4 Dezimalen. Zur nötigen Sicherheit sollte mit 6 Dezimalstellen gerechnet werden.

Die Rechnung nach der Simpsonschen Formel zeigt das folgende Schema, in dem die letzten beiden Spalten der Fehlerabschätzung nach (6.38) dienen. p_i und q_i sind die in I_S bzw. I_N auftretenden Gewichtsfaktoren gemäß (6.36) bzw. (6.38).

i	x_i	$y_i = f(x_i) = \frac{1}{x_i}$	p_i	$p_i y_i$	q_i	$q_i y_i$
0	1,000	1,000000	1	1,000000	1	1,000000
1	1,125	0,888889	4	3,555556	0	
2	1,250	0,800000	2	1,600000	4	3,200000
3	1,375	0,727237	4	2,909091	0	
4	1,500	0,666667	2	1,333333	2	1,333333
5	1,625	0,615385	4	2,461538	0	
6	1,750	0,571429	2	1,142857	4	2,285714
7	1,875	0,533333	4	2,133333	0	
8	2,000	0,500000	1	0,500000	1	0,500000
			$S_S = 16,635709$		$S_N = 8,319047$	

Daraus erhält man

$$I_S = \frac{h}{3} \cdot S_S = \frac{0,125}{3} \cdot 16,635709 = \underline{\underline{0,693155}}$$

und

$$I_N = \frac{2h}{3} \cdot S_N = \frac{2 \cdot 0,125}{3} \cdot 8,319047 = 0,693254.$$

Der Vergleich von $|I - I_S| = |0,693147 - 0,693155| = 8 \cdot 10^{-6}$

mit $\frac{|I_S - I_N|}{15} = \frac{|0,693155 - 0,693254|}{15} = 7 \cdot 10^{-6}$

zeigt die gemäß (6.38) erreichte gute Näherung. Die Ungenauigkeit ist demnach $|I - I_S| < 1 \cdot 10^{-5}$.

Aufgaben 6.32 bis 6.96

6.3 Anwendungen der Integralrechnung aus der Geometrie

6.3.1 Flächeninhalte

6.3.1.1 Flächen zwischen einer Kurve und der x-Achse

In 6.1.2 wurde gezeigt, daß das bestimmte Integral I den Inhalt der Fläche A angibt, die von der Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$, der x-Achse und den zu $x = a$ und $x = b$ gehörigen Ordinaten begrenzt wird, sofern die Funktion f im Intervall $[a, b]$ nirgends negativ wird:

$$A = I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad \text{wenn } f(x) \geq 0 \text{ in } [a, b].$$

Im folgenden sollen diese Untersuchungen vertieft werden.
Bei einfachen Flächen läßt sich der Inhalt auch elementar berechnen. Selbstverständlich führt die Inhaltsberechnung durch Integration zum gleichen Ergebnis.

Beispiel 6.71

Man bestimme den Inhalt der Fläche, die von den Geraden mit den Gleichungen

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$, $y = 0$ und $x = 1$ begrenzt wird (Bild 6.13).

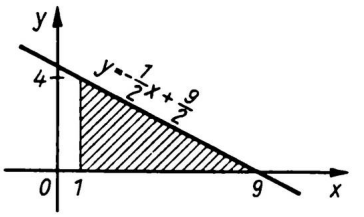


Bild 6.13

Lösung:

Die Grenzen sind $x = 1$ und $x = 9$. Da in diesem Intervall keine negativen Funktionswerte auftreten, ist $A = I$.

$$A = \int_1^9 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}\right) \mathrm{d}x = \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{9}{2}x\right)\Big|_1^9 = \left(-\frac{81}{4} + \frac{81}{2}\right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{9}{2}\right) = \underline{\underline{16}}$$

Der Inhalt der Fläche beträgt also im gleichgeteilten Koordinatensystem 16 Flächeneinheiten. Dasselbe Ergebnis erhält man auch auf elementarem Wege.

In Zukunft werden bei allen Beispielen in der Rechnung die Maßeinheiten weggelassen. Man darf dann auch zum Ergebnis, also zum letzten Glied der Gleichung keine Einheiten hinzufügen, denn sonst müßten bereits die Grenzen des Integrals mit Einheiten versehen werden, was nicht üblich ist. Man verschaffe sich bereits vor Beginn jeder Rechnung Klarheit über die zu erwartenden Maßeinheiten.
Es soll jetzt untersucht werden, wie sich der Flächeninhalt berechnen läßt, wenn Teile der Fläche unter der x-Achse liegen.
Für das Vorzeichen des bestimmten Integrals I gilt wegen (6.7) folgendes:

Sind in der Summe $\sum_{i=1}^{n} f(\xi)\Delta x_i$ für alle i

$$f(\xi_i) > 0 \quad \text{und} \quad \Delta x_i > 0, \text{ so ist } I > 0,$$
$$f(\xi_i) < 0 \quad \text{und} \quad \Delta x_i > 0, \text{ so ist } I < 0,$$
$$f(\xi_i) > 0 \quad \text{und} \quad \Delta x_i < 0, \text{ so ist } I < 0,$$
$$f(\xi_i) < 0 \quad \text{und} \quad \Delta x_i < 0, \text{ so ist } I > 0.$$

Für den Flächeninhalt ergibt sich daraus folgende, in Bild 6.14 veranschaulichte Merkregel, die unabhängig davon gilt, ob $a < b$ oder $b < a$:

> Liegt die Fläche links von der Richtung $a \rightarrow b$, so ist ihr Inhalt positiv, liegt sie rechts von der Richtung $a \rightarrow b$, so ist ihr Inhalt negativ.

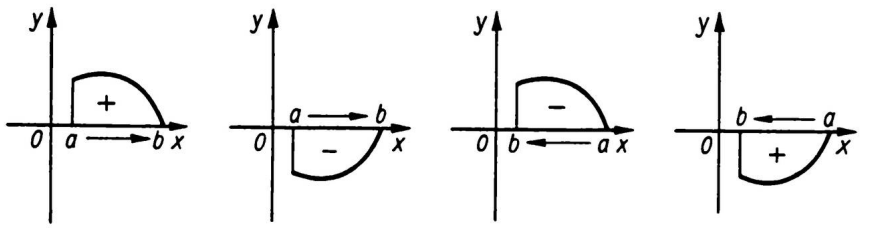


Bild 6.14

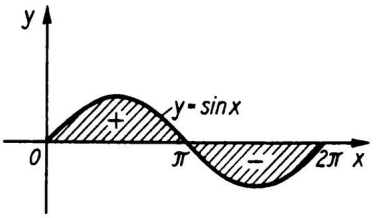


Bild 6.15

Liegt die Fläche teils oberhalb, teils unterhalb der x-Achse, so haben die Inhalte der Teilflächen verschiedenes Vorzeichen, und das bestimmte Integral gibt nicht den Inhalt der Gesamtfläche, sondern die Differenz der Teilflächen an (Bild 6.15). Um den Inhalt der Gesamtfläche zu berechnen, muß man die Nullstellen der Begrenzungsfunktion, die innerhalb des Integrationsintervalles liegen, ermitteln und über die Teilintervalle einzeln integrieren. Der Flächeninhalt ist dann die Summe der Beträge der Teilintegrale. Für den Fall, daß in $[a, b]$ nur eine Nullstelle x_N liegt, ergibt sich die Formel

$$A = |I_1| + |I_2| = \left| \int_a^{x_N} f(x)\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{x_N}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \tag{6.39}$$

Beispiel 6.72

Zu berechnen ist der Inhalt der Fläche zwischen der Sinuskurve und der x-Achse im Intervall $[0, 2\pi]$ (Bild 6.15).

Lösung:

Berechnet man I, so ergibt sich

$$I = \int_0^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = (-\cos 2\pi) - (-\cos 0) = -1 + 1 = 0.$$

Das ist offenbar nicht der gesuchte Flächeninhalt. Zur Begründung vergleiche man

$$I_1 = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$

und

$$I_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = (-\cos 2\pi) - (-\cos \pi) = -1 - 1 = -2.$$

Den Flächeninhalt erhält man durch die Rechnung

$$A = |I_1| + |I_2| = \left| \int_0^{\pi} \sin x \, dx \right| + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx \right| = |2| + |-2| = 4.$$

Beispiel 6.73

Man berechne den Inhalt der Fläche, die im Intervall $[2, 5]$ von $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ und der x-Achse begrenzt wird.

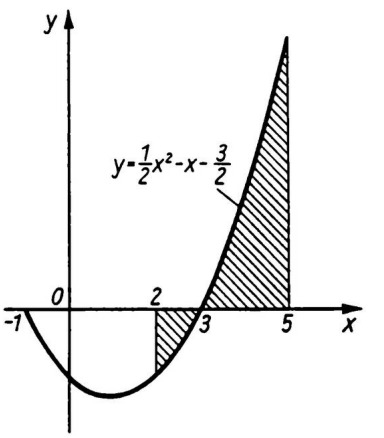


Bild 6.16

Lösung:

Aus $\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$ findet man die Nullstellen $x_{N_1} = -1$ und $x_{N_2} = 3$, von denen die zweite im Integrationsintervall liegt (Bild 6.16). Also ist zu rechnen:

$$I_1 = \int_2^3 \left(\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}\right) dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x\right)\Big|_2^3 = \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{2} - \frac{9}{2}\right) - \left(\frac{4}{3} - 2 - 3\right) = -\frac{5}{6}$$

$$I_2 = \int_3^5 \left(\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}\right) dx = \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x\right)\Big|_3^5$$

$$= \left(\frac{125}{6} - \frac{25}{2} - \frac{15}{2}\right) - \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{2} - \frac{9}{2}\right) = \frac{32}{6}$$

und $A = |I_1| + |I_2| = \left|-\frac{5}{6}\right| + \left|\frac{32}{6}\right| = \frac{37}{6} \approx \underline{\underline{6,17}}.$

Beispiel 6.74

Gegeben sei die Funktion mit der Gleichung

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} & \text{für } x \in [0,1] \\ \dfrac{1}{x} & \text{für } x \in (1,4] \end{cases}$$

Gesucht ist der Inhalt der Fläche zwischen der zugehörigen Kurve und der x-Achse (Bild 6.17).

Lösung:

Die hier angegebene Funktion enthält im Integrationsintervall $[0,4]$ zwar keine Nullstellen, ist aber bei $x = 1$ unstetig. Da der Sprung von endlicher Höhe ist, läßt sich der Flächeninhalt nach der Formel (6.27) in ähnlicher Weise wie bei den vorhergehenden Beispielen berechnen.

$$A = I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_{1+0}^4 \frac{dx}{x} = \arctan x\Big|_0^1 + \ln|x|\Big|_{1+0}^4$$

$$= \arctan 1 - \arctan 0 + \ln 4 - \ln 1$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 + \ln 4 - 0 = \frac{\pi}{4} + \ln 4 \approx \underline{\underline{2,172}}$$

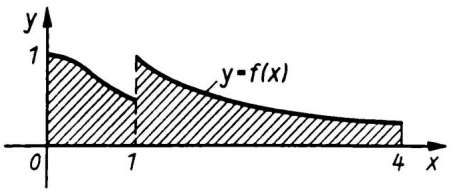


Bild 6.17

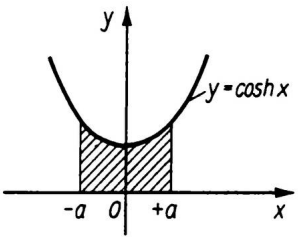


Bild 6.18

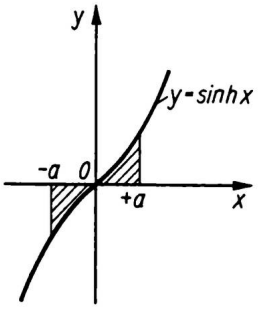


Bild 6.19

Wenn die Begrenzungskurven gewisse Symmetrieeigenschaften aufweisen, läßt sich die Berechnung des Flächeninhalts noch vereinfachen. Wird das Integrationsintervall durch die y-Achse halbiert und ist der Integrand der Term einer *geraden* Funktion, gilt also $f(-x) = f(x)$, so liegt die Fläche symmetrisch zur y-Achse (Bild 6.18). Man braucht dann nur die halbe Fläche zu berechnen und das Ergebnis zu verdoppeln. Für gerade Funktionen f gilt

$$A = I = \int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx,$$

sofern $f(x) \geq 0$ für $x \in [0,a]$.

Überträgt man das entsprechend auf *ungerade* Funktionen, die allgemein durch $f(-x) = -f(x)$ gekennzeichnet sind (Bild 6.19), so erhält man für das bestimmte Integral und für den Flächeninhalt verschiedene Ergebnisse. Für ungerade Funktionen f gilt:

$$I = \int_{-a}^{+a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \quad \text{aber } A = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x;$$

sofern $f(x) \geq 0$ für $x \in [0, a]$.

Beispiel 6.75

Es soll der Inhalt eines Kreises mit dem Radius $r = 3$ durch Integration bestimmt werden (Bild 6.20).

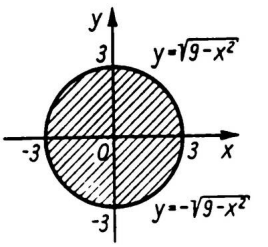


Bild 6.20

Lösung:

Da die Kreisfläche symmetrisch zur x-Achse liegt, braucht man nur die obere Hälfte zu berechnen. Diese liegt wiederum symmetrisch zur y-Achse. Insgesamt genügt es also, den Viertelkreis des 1.Quadranten zu berechnen und das Ergebnis mit 4 zu multiplizieren. Die Gleichung des oberen Halbkreises $y = \sqrt{9 - x^2}$ stellt eine gerade Funktion dar.

$$\begin{aligned} A &= 4\int_{0}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 4\left(\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \frac{x}{2}\sqrt{9 - x^2}\right)\Big|_{0}^{3} \\ &= 4\left(\frac{9}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0\right) = \underline{\underline{9\pi}}. \end{aligned}$$

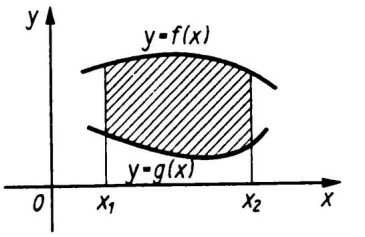


Bild 6.21

6.3.1.2 Flächen zwischen zwei Kurven

Bisher wurden die zu berechnenden Flächen nach einer Seite immer durch die x-Achse begrenzt. Man kann aber mit denselben Mitteln der Integralrechnung auch die Inhalte solcher Flächen berechnen, die oben und unten von Kurven begrenzt sind. Dazu braucht man nur die Differenz der Flächeninhalte zu bilden, wie das aus Bild 6.21 ersichtlich wird.

Ist A_1 der Inhalt der Fläche zwischen oberer Kurve und x-Achse und A_2 der Inhalt der Fläche zwischen unterer Kurve und x-Achse, so erhält man für den Inhalt der schraffierten Fläche

$$A = A_1 - A_2 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{x_1}^{x_2} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Da die Grenzen beider Integrale gleich sind, kann man die Differenz der Integrale zusammenfassen zu einem Integral:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x, \quad \text{wenn } f(x) \geq g(x) \text{ für alle } x \in [x_1, x_2] \tag{6.40}$$

Ist im Integrationsintervall teils $f(x) > g(x)$, teils $f(x) < g(x)$, so schneiden sich die Begrenzungskurven innerhalb des Intervalls, und der Term des Integranden hat dort eine Nullstelle (Bild 6.23). Die Formel (6.40) liefert dann nicht den Flächeninhalt. Man muß in diesem Falle gemäß Formel (6.39) verfahren. x_N ist die Schnittstelle der beiden Kurven bzw. die Nullstelle des Integranden $f(x)-g(x)$.

$$A = |I_1| + |I_2| = \left| \int_{x_1}^{x_N} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{x_N}^{x_2} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \right|$$

Beispiel 6.76

Man bestimme den Inhalt der Fläche, die von den beiden Kurven mit den Gleichungen $y = 2\sqrt{x}$ und $y = \frac{1}{4}x^2$ eingeschlossen wird (Bild 6.22).

Lösung:

Um das Integrationsintervall festzulegen, sind zunächst die Schnittstellen der beiden Kurven zu bestimmen. Aus $2\sqrt{x} = \frac{1}{4}x^2$ findet man $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$.

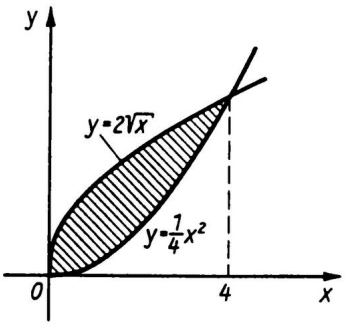


Bild 6.22

$$A = \int_0^4 \left(2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^2\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}x^3\right)\Big|_0^4 = \left(\frac{32}{3} - \frac{16}{3}\right) - 0 = \underline{\underline{\frac{16}{3}}}$$

Liegt eine von zwei Kurven begrenzte Fläche teilweise oder ganz unterhalb der x-Achse (Bild 6.23), kann der Flächeninhalt ebenfalls nach der Formel (6.40) berechnet werden. Um das einzusehen, braucht man das Koordinatensystem nur genügend weit nach unten zu verschieben, so daß die gesuchte Fläche wieder oberhalb der x-Achse liegt. Dadurch ändert sich nichts am Flächeninhalt. Zu den Funktionswerten beider Kurven wird dieselbe Konstante addiert, die sich bei Bilden der Differenz $f(x) - g(x)$ wieder heraushebt.

Beispiel 6.77

Gesucht wird der Inhalt der Fläche, die im Intervall $[-1, 5]$ von den beiden Kurven mit den Gleichungen $y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$ und $y = \frac{1}{2}\left(x^3 - 5x^2 + x + 11\right)$ eingeschlossen wird (Bild 6.23).

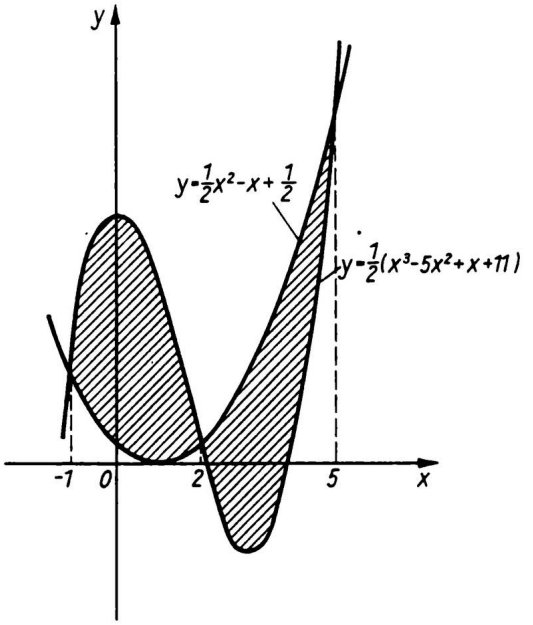


Bild 6.23

Lösung:

Im Innern des Intervalls $[-1, 5]$ liegt bei $x = 2$ eine Schnittstelle der beiden Kurven, die man aus $\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x^3 - 5x^2 + x + 11)$ findet.

Der Integrand $f(x) - g(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 5x^2 + x + 11) - \left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{3}{2}x + 5$ hat demnach dort eine Nullstelle. Es ist nach Gl. (6.39) zu rechnen. Die Tatsache, daß ein Teil der Fläche unterhalb der x-Achse liegt, wird nicht berücksichtigt.

$$I_1 = \int_{-1}^{2} \left(\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{3}{2}x + 5\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{x^4}{8} - x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 5x\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{81}{8}$$

$$I_2 = \int_{2}^{5} \left(\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{3}{2}x + 5\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{x^4}{8} - x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 5x\right)\Big|_{2}^{5} = -\frac{81}{8}$$

$$A = |I_1| + |I_2| = \frac{81}{8} + \frac{81}{8} = \frac{81}{4} = \underline{\underline{20,25}}$$

6.3.1.3 Betrachtungen zum Flächenelement

Abschließend soll die Flächenberechnung unter einem Gesichtspunkt betrachtet werden, der insbesondere für die weiteren Anwendungen der Integralrechnung bedeutungsvoll ist. Gegeben sei eine integrierbare Funktion f. Gesucht ist der Inhalt der Fläche zwischen der zugehörigen Kurve und der x-Achse im Intervall $[a, b]$ (Bild 6.24). Die Fläche wird in endlich viele Streifen der Breite $\Delta x = \mathrm{d}x$ zerlegt. Der Inhalt eines Streifens sei ΔA, wobei das Δ grundsätzlich darauf hinweist, daß die

genaue oder wahre Größe gemeint ist. ΔA ist näherungsweise dem Inhalt $\mathrm{d}A$ eines Rechteckes gleich, dessen Höhe $f(x)$ der Funktionswert für irgendein x aus dem betrachteten Intervall der Breite $\mathrm{d}x$ ist. Das Rechteck $\mathrm{d}A$ wird als Flächenelement bezeichnet, wobei das vorgestellte d auf das Differential $\mathrm{d}A$ der Flächenfunktion hinweist, das eine Näherung der Funktionsänderung ΔA darstellt. (Man überlege sich in diesem Zusammenhang noch einmal die Bedeutung des Differentials.) Es gilt demnach

$$\Delta A \approx \mathrm{d}A = f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hieraus gewinnt man durch formale Integration

$$\boxed{A = \int_A \mathrm{d}A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.} \tag{6.41}$$

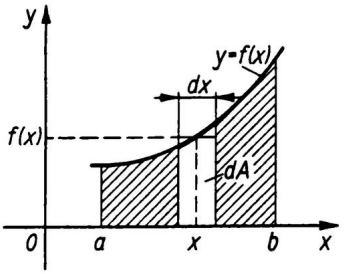


Bild 6.24

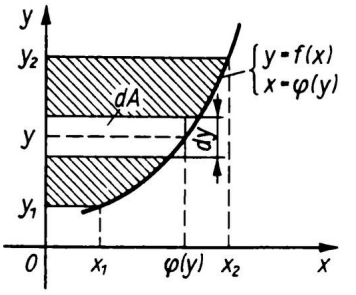


Bild 6.25

Diese Integration bedeutet im einzelnen stets die Summierung der Flächeninhalte der endlich vielen Rechteckstreifen mit anschließender Berechnung des Grenzwertes dieser Summenfolge für $n \to \infty$ und $\mathrm{d}x \to 0$. Der Vorgang stimmt damit völlig mit der in 6.1.2 erfolgten Definition des Flächeninhaltes als Grenzwert einer Summenfolge überein. Das an das erste Integralzeichen gesetzte A fordert dazu auf, die Grenzen bei der Berechnung des Integrals so zu wählen, daß die gesamte Fläche A erfaßt wird.

Bei Verwendung dieser Überlegung kann man in einfacher Weise auch zu Regeln für die Berechnung des Inhaltes von Flächen kommen, die zwischen einer Kurve und der y-Achse liegen.

Gegeben sei eine in $[x_1, x_2]$ eineindeutige und stetige Funktion f. Gesucht ist der Inhalt der Fläche, die zwischen der zu f gehörigen Kurve und der y-Achse liegt, in den Grenzen von $y_1 = f(x_1)$ bis $y_2 = f(x_2)$ (Bild 6.25). Die Fläche wird parallel zur x-Achse in endlich viele Streifen der Breite $\mathrm{d}y$ zerlegt. Ihr Inhalt ΔA wird näherungsweise durch den Inhalt von Rechtecken (Flächenelementen) $\mathrm{d}A$ ausgedrückt:

$$\Delta A \approx \mathrm{d}A = \varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

Darin ist $\varphi(y)$ der Wert der Umkehrfunktion φ an der Stelle y. Man erhält $\varphi(y)$, indem man $y = f(x)$ nach x auflöst. Durch Integration folgt aus dem Ansatz sofort

$$A = \int_A \mathrm{d}A = \int_{y_1}^{y_2} \varphi(y)\,\mathrm{d}y, \quad \text{sofern } \varphi(y) \geq 0 \text{ für } y \in [y_1, y_2]. \tag{6.42}$$

Alle Überlegungen dieses Abschnittes über Flächen, die beiderseits der Abszissenachse oder zwischen zwei Kurven liegen, lassen sich hierauf sinngemäß anwenden.

Beispiel 6.78

Man berechne den Inhalt der Fläche zwischen der Kurve von $y = \mathrm{e}^x$, der Geraden mit der Gleichung $y = 6$ und der y-Achse (Bild 6.26).

Lösung:

Die Kurve schneidet die y-Achse bei $y = 1$. Die Integrationsgrenzen sind also $y_1 = 1$ und $y_2 = 6$. Aus $y = \mathrm{e}^x$ erhält man durch Auflösen nach x die Gleichung der Umkehrfunktion $x = \ln y$.
Dann ist

$$\begin{aligned} A &= \int_1^6 \ln y\,\mathrm{d}y = y\,(\ln y - 1)\Big|_1^6 \\ &= (6\,(\ln 6 - 1)) - (\ln 1 - 1) \\ &= 6 \ln 6 - 5 \approx \underline{\underline{5{,}751}} \end{aligned}$$

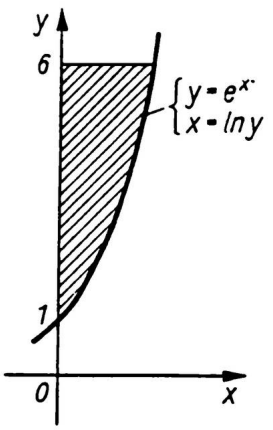


Bild 6.26

6.3.2 Rauminhalt von Rotationskörpern

Gegeben sei eine im Intervall $[x_1, x_2]$ stetige Funktion f. Wird die zwischen der Kurve von f und der x-Achse liegende ebene Fläche um die x-Achse gedreht, so erzeugt sie dabei einen Rotationskörper. Dessen Volumen V_x (der Index x gibt die Rotationsachse an) soll berechnet werden. Es werden dazu dieselben Überlegungen angestellt wie in 6.3.1.3 zum Begriff des Flächenelementes. Der zu berechnende Rotationskörper wird in Volumenelemente zerlegt, deren Summe einen Näherungswert für das gesuchte Volumen liefert. Durch Grenzübergang (Berechnung des bestimmten Integrals) erhält man den genauen Wert.
Im einzelnen sind die folgenden Schritte durchzuführen (Bild 6.27):
Der Rotationskörper wird durch Schnitte parallel zur y,z-Ebene in endlich viele Scheiben mit dem Volumen ΔV_x zerlegt.
Diese Scheiben werden ersetzt durch flache Zylinder (Volumensegmente) mit der Höhe (Dicke) $\mathrm{d}x$. Der Zylinderradius $f(x)$ ist der Funktionswert einer beliebigen Stelle x des Intervalles mit der Breite $\mathrm{d}x$. Das Volumen $\mathrm{d}V_x$ eines solchen Zylinders ist annähernd gleich dem Volumen ΔV_x der entsprechenden Scheibe.

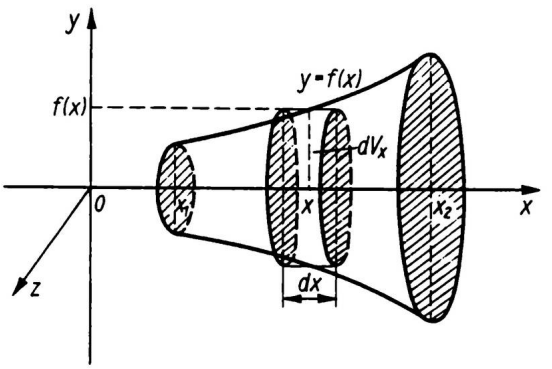


Bild 6.27

Der auftretende Fehler wird um so kleiner sein, je dünner die Volumenelemente sind und je größer ihre Zahl n ist.

$$\Delta V_x \approx \mathrm{d}V_x = \pi\,(f(x))^2\,\mathrm{d}x = \pi y^2\,\mathrm{d}x$$

Da $\pi\,(f(x))^2 = \pi y^2$ der Term einer stetigen Funktion ist, existiert das bestimmte Integral darüber. (Man beachte den Satz 6.2 in 6.1.3.) Durch Integration erhält man schließlich

$$\boxed{V_x = \int_{V_x} \mathrm{d}V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} (f(x))^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2\,\mathrm{d}x.} \tag{6.43}$$

Das bedeutet, der Grenzwert für $n \to \infty$ und $\Delta x_i \to 0$ der Folge der Summen

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi\,(f(x_i))^2\,\Delta x_i$$

ist für alle nur möglichen Zerlegungen endlich und gleich V_x.

Durch ähnliche Überlegungen wie in 6.3.1.3 erhält man das Volumen V_y eines Rotationskörpers bei Drehung um die y-Achse. Die erzeugende Fläche liegt zwischen der y-Achse und der Kurve, deren Gleichung mit $x = \varphi(y)$ anzugeben ist. φ ist die Umkehrfunktion zu f. Unter entsprechenden Voraussetzungen wie bei V_x ergibt sich

$$\boxed{V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} (\varphi(y))^2\,\mathrm{d}y = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2\,\mathrm{d}y.} \tag{6.44}$$

Das Ergebnis wird in Volumeneinheiten gemessen, bei einem gleichgeteilten Koordinatensystem in (Längeneinheiten)^3.

Beispiel 6.79

Es ist das Volumen eines geraden Kreiskegels mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h zu berechnen (Bild 6.28).

Lösung:

Die Rechnung wird begünstigt durch eine geschickte Wahl des Koordinatensystems. Die Spitze des Kegels liege im Ursprung, Rotationsachse sei die x-Achse. Bild 6.28 zeigt einen Längsschnitt des Kegels. Es ist

$$\mathrm{d}V_x = \pi\,(f(x))^2\,\mathrm{d}x = \pi\frac{r^2}{h^2}x^2\,\mathrm{d}x$$

und

$$V_x = \pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi r^2 x^3}{3h^2}\Big|_0^h = \underline{\underline{\frac{1}{3}\pi r^2 h.}}$$

Beispiel 6.80

Es ist das Volumen des Rotationsparaboloids der Höhe h zu bestimmen, das durch Rotation der von der y-Achse und der Parabel $y = x^2$ $(x > 0)$ begrenzten Fläche um die y-Achse erzeugt wird (Bild 6.29).

Lösung:

$\mathrm{d}V_y = \pi\,(\varphi(y))^2\,\mathrm{d}y = \pi x^2\,\mathrm{d}y$, und da $y = x^2$

$$V_y = \pi\int_0^h y\,\mathrm{d}y = \frac{\pi y^2}{2}\Big|_0^h = \frac{\pi h^2}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\pi r^2 h,}}$$

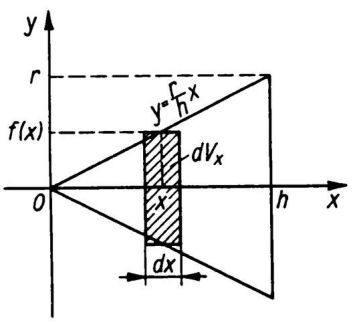


Bild 6.28

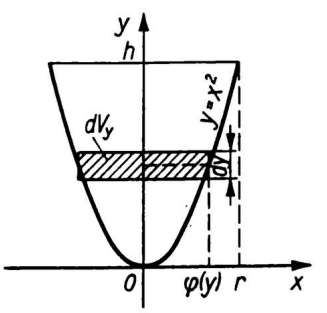


Bild 6.29

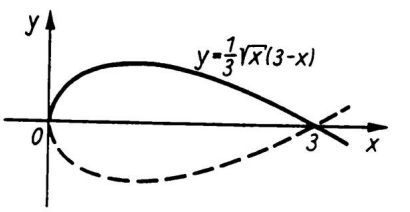


Bild 6.30

wobei $h = r^2$ berücksichtigt wurde. Das Volumen eines Rotationsparaboloids ist gleich dem halben Volumen eines Zylinders mit gleicher Höhe und gleichem Grundkreisradius.

Beispiel 6.81

Man berechne das Volumen eines Stromlinienkörpers, der durch Rotation eines *parabolischen Blattes* um die x-Achse entsteht. Die obere Begrenzungskurve der erzeugenden Fläche sei durch $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}\,(3 - x)$ gegeben (Bild 6.30).

Lösung:

Aus $\frac{1}{3}\sqrt{x}\,(3-x)=0$ ergeben sich die Grenzen $x_1=0$ und $x_2=3$.

$$V_x=\pi\int_{x_1}^{x_2}y^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{9}\int_0^3 x\,(9-6x+x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{9}\int_0^3(9x-6x^2+x^3)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{9}\left(\frac{9}{2}x^2-2x^3+\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^3=\frac{\pi}{9}\left(\frac{81}{2}-54+\frac{81}{4}\right)=\frac{3}{4}\pi\approx\underline{\underline{2,356}}$$

Das Verfahren der Volumenberechnung von Rotationskörpern läßt sich sinngemäß auf solche Körper übertragen, bei denen die parallel zu einer Koordinatenebene liegenden Querschnittsflächen bestimmbar sind.

Der Inhalt A jeder Querschnittsfläche ist abhängig von der Stelle x, an der der Schnitt geführt wird: $A=q(x)$.

Haben die Volumenelemente die Dicke $\mathrm{d}x$, so gilt

$$\Delta V\approx\mathrm{d}V=q(x)\,\mathrm{d}x.$$

Durch Integration erhält man

$$\boxed{V=\int_V\mathrm{d}V=\int_{x_1}^{x_2}q(x)\,\mathrm{d}x}\tag{6.45}$$

Die Lösung dieses Integrals ist jedoch nur möglich, wenn die Funktion q bekannt oder bestimmbar ist. Das setzt voraus, daß der Körper eine gewisse, mathematisch erfaßbare Regelmäßigkeit aufweist. Ist die Funktion q für alle $x\in[x_1,x_2]$ stetig, so existiert das Integral (6.45) als Grenzwert einer Summenfolge.

6.3.3 Bogenlängen

In diesem Abschnitt soll ein Verfahren hergeleitet werden, das die Berechnung der Länge einer ebenen Kurve zwischen zwei Punkten ermöglicht. Im wesentlichen wird dabei derselbe Weg wie bei der Flächen- oder Rauminhaltsberechnung eingeschlagen.

Gegeben sei eine Funktion f, für deren Kurve die Bogenlänge zwischen den Punkten P_1 und P_2 berechnet werden soll (Bild 6.31). Damit das sinnvoll ist, muß f als stetig vorausgesetzt werden.

Später zeigt es sich, daß man sogar die Differenzierbarkeit von f' verlangen muß. Das Kurvenstück zwischen P_1 und P_2 wird zunächst durch endlich viele Punkte unterteilt. Einer dieser Punkte sei P. Die Länge des Kurvenstücks zwischen P und dem nächsten Teilungspunkt sei Δs. Die Länge kann näherungsweise durch das geradlinige *Linienelement* $\mathrm{d}s$ (auch Bogendifferential genannt) ersetzt werden. $\mathrm{d}s$ läßt sich als Teilstück der durch P gehenden Tangente durch die zugehörigen Differentiale $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ ausdrücken:

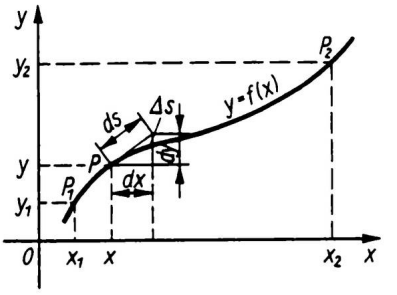


Bild 6.31

$$\Delta s \approx \mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x. \tag{6.46}$$

Die Summe aller Linienelemente $\mathrm{d}s$ wird die gesuchte Bogenlänge um so besser annähern, je feiner die Unterteilung ist. Man erhält daher für immer engere Unterteilungen eine Folge von Summen, deren Grenzwert für $n \to \infty$ und $\mathrm{d}x \to 0$ gebildet wird. Ist dieser Grenzwert endlich, so gibt er die gesuchte Bogenlänge an, und die Kurve heißt *rektifizierbar*. Diesen Vorgang kann man formal durch ein bestimmtes Integral beschreiben.

Beachtet man, daß $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$, so ergibt sich für diesen Grenzwert

$$\boxed{s = \int_s \mathrm{d}s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.} \tag{6.47}$$

Ist die Funktion f im Intervall $[x_1, x_2]$ eineindeutig, kann man zur Bogenlängenberechnung auch die Umkehrfunktion φ heranziehen. Die Grenzen des Integrals sind dann y_1 und y_2.

Aus $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y$ erhält man wegen $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \varphi'(y)$

$$\boxed{s = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + (\varphi'(y))^2}\,\mathrm{d}y.} \tag{6.48}$$

Das Ergebnis gibt die Bogenlänge in Längeneinheiten an. Wie die Formeln (6.47) und (6.48) zeigen, ergeben Bogenlängenberechnungen meist komplizierte Integrale. Hier werden nur zwei einfache Beispiele gerechnet.

Beispiel 6.82

Es ist die Bogenlänge der Kettenlinie $y = \cosh x$ zwischen den Punkten mit den Abszissen $-a$ und $+a$ zu berechnen (Bild 6.18).

Lösung:

Wegen der Symmetrie der Kurve braucht man nur von 0 bis a zu integrieren und das Ergebnis zu verdoppeln.

$$s = 2\int_0^a \sqrt{1+(\cosh' x)^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a \sqrt{1+\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a \cosh x\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\sinh x\Big|_0^a = \underline{\underline{2\sinh a}}$$

Beispiel 6.83

Man berechne den Umfang U des Kreises mit dem Radius 1.

Lösung:

Liegt der Kreismittelpunkt im Ursprung, so ist $y = \sqrt{1-x^2}$ die Funktionsgleichung des oberen Halbkreises und $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$. Für die Bogenlänge s eines Viertelkreises erhält man

$$s = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Daraus folgt $\underline{\underline{U = 4s = 2\pi}}$.

6.3.4 Mantelflächen

$y = f(x)$ sei die Gleichung einer rektifizierbaren Kurve, P_1 und P_2 seien zwei Punkte dieser Kurve mit den Abszissen x_1 und x_2. Bei Rotation um die x-Achse beschreibt das zwischen P_1 und P_2 liegende Kurvenstück den Mantel eines Rotationskörpers (Bild 6.32).

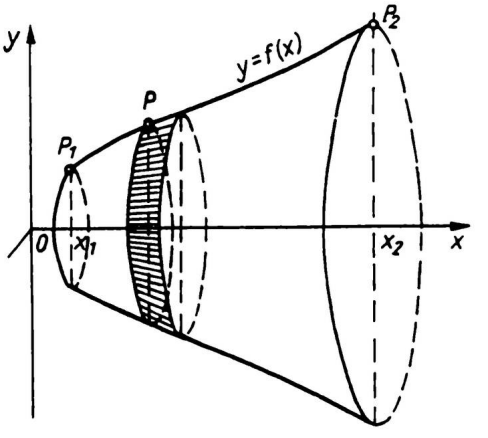


Bild 6.32

Zur Berechnung der Mantelfläche wird der Rotationskörper in bereits bekannter Weise in Scheiben zerlegt. Die Mantelfläche ΔA_{Mx} einer solchen Scheibe, erzeugt durch das Bogenstück Δs, läßt sich durch die Mantelfläche $\mathrm{d}A_{Mx}$ eines Kegelstumpfes annähern, die durch das Linienelement $\mathrm{d}s$ erzeugt wird.

Man verfolge die weiteren Überlegungen am Bild 6.31, das einen Achsenschnitt des Körpers von Bild 6.32 darstellt. Unter Berücksichtigung der für die Mantelfläche eines Kegelstumpfes geltenden Formel erhält man dann

$$\Delta A_{Mx} \approx \mathrm{d}A_{Mx} = \pi\,(y + (y + \mathrm{d}y))\,\mathrm{d}s.$$

Wegen $\mathrm{d}y \ll y$ gilt annähernd

$$\mathrm{d}A_{Mx} \approx 2\pi y\,\mathrm{d}s.$$

Bildet man die Summe dieser Mantelflächenelemente $\mathrm{d}A_{Mx}$, so wird durch sie die gesuchte Mantelfläche um so besser angenähert, je schmaler die einzelnen Flächenstreifen sind. Zum genauen Wert gelangt man durch Berechnung des Grenzwertes für $n \to \infty$ und $\mathrm{d}x \to 0$. Man erhält

$$A_{Mx} = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\,\mathrm{d}s = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}s$$

und unter Beachtung von (6.46)

$$\boxed{A_{Mx} = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.} \tag{6.49}$$

Entsprechende Überlegungen führen bei Rotation um die y-Achse auf die Formel

$$\boxed{A_{My} = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} \varphi(y)\sqrt{1+(\varphi'(y))^2}\,\mathrm{d}y,} \tag{6.50}$$

in der φ die Umkehrfunktion zu f bedeutet. Die Voraussetzungen sind die gleichen wie bei der Bogenlängenberechnung. Das Ergebnis drückt die Mantelfläche in Flächeneinheiten aus.

Beispiel 6.84

Berechnung einer Kugelzone (Mantelfläche einer Kugelschicht) (Bild 6.33).

Lösung:

Der Kugelradius sei r. Dann ist $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ die Funktionsgleichung des oberen Halbkreises und $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$.

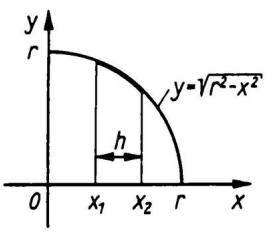


Bild 6.33

$$A_{M_x} = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\right)\mathrm{d}x = 2\pi r \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x = 2\pi r\,(x_2 - x_1) = \underline{\underline{2\pi r h}}$$

Beispiel 6.85

Berechnung der Oberfläche des in Bild 6.30 dargestellten Stromlinienkörpers.

Lösung:

Bei einem Stromlinienkörper ist die Oberfläche mit der Mantelfläche identisch.

Funktionsgleichung: $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}\,(3-x)$ Grenzen: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$

Ableitung: $y' = \dfrac{1-x}{2\sqrt{x}}$

$$A_{M_x} = 2\pi \int_0^3 \frac{1}{3}\sqrt{x}\,(3-x)\sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{4x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^3 \sqrt{x}\,(3-x)\sqrt{\frac{(1+x)^2}{4x}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{3}\int_0^3 (3+2x-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}\left(3x+x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 = \underline{\underline{3\pi}}.$$

Aufgaben 6.97 bis 6.121

6.4 Anwendungen der Integralrechnung aus anderen Gebieten

Zahlreiche physikalische und technische Probleme lassen sich mit Hilfe der Integralrechnung lösen. Das Gemeinsame dieser Aufgaben ist die Summation von Produkten mit gleichzeitigem Grenzübergang in dem in Abschnitt 6.1.2 dargelegten Sinne. Das gesuchte Ganze wird zunächst stets in endlich viele Teile zerlegt, die zur Vereinfachung des Problems nur näherungsweise berechnet werden. Die wahre Größe eines Teils ist durch ein vorgestelltes Δ, der Näherungswert (auch "Element" genannt) durch ein vorgestelltes d gekennzeichnet. Die Summe aller Elemente liefert einen Näherungswert für das Ganze, der um so besser ausfällt, je kleiner die Teile sind und je größer ihre Anzahl n ist. Läßt man in einem Grenzübergang n unbegrenzt anwachsen und dabei den auftretenden Fehler gegen null gehen, so erhält man den genauen Wert als Grenzwert einer Summenfolge, d.h. als bestimmtes Integral.

6.4.1 Statisches Moment und Schwerpunkt

6.4.1.1 Vorbemerkungen

Das statische Moment (oder Drehmoment) M eines *abstrakten Massenpunktes* mit der Masse m bezüglich einer Achse ist gleich dem Produkt aus der Masse m und dem Abstand r dieses Punktes von der Achse:

$$M = rm. \tag{6.51}$$

Soll das statische Moment eines realen Körpers berechnet werden, so zerlegt man diesen in endlich viele Teile, deren Massen näherungsweise durch $\mathrm{d}m_1$, $\mathrm{d}m_2$, ..., $\mathrm{d}m_n$ dargestellt werden. Multipliziert man die Massenelemente $\mathrm{d}m_i$ mit ihren Abständen r_i von der Bezugsachse, so erhält man die "Elementarmomente" $\mathrm{d}M_i$, deren Summe ein Näherungswert für das Gesamtmoment des Körpers ist:

$$\mathrm{d}M = \mathrm{d}M_1 + \mathrm{d}M_2 + \ldots + \mathrm{d}M_n = r_1\,\mathrm{d}m_1 + r_2\,\mathrm{d}m_2 + \ldots + r_n\,\mathrm{d}m_n.$$

Der Fehler wird dabei um so kleiner, je geringer die Masse der einzelnen Elemente ist. Läßt man die $\mathrm{d}m_i$ gegen null und ihre Anzahl gegen unendlich streben, so erhält man den genauen Wert für M. Der Grenzwert der Summenfolge wird durch ein bestimmtes Integral dargestellt:

$$\boxed{M = \int_m r\,\mathrm{d}m} \tag{6.52}$$

Denkt man sich die gesamte Masse m des Körpers in einem Punkt, dem Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt S, vereinigt, und ist r_s der Abstand des Schwerpunktes von der Bezugsachse, so folgt aus (6.51)

$$M = r_s m. \tag{6.53}$$

Aus (6.52) und (6.53) ergibt sich

$$r_s m = \int_m r\,\mathrm{d}m. \tag{6.54}$$

Das statische Moment ist einerseits gleich dem Produkt aus Gesamtmasse und Schwerpunktsabstand von der Bezugsachse und andererseits gleich dem Grenzwert einer Summenfolge der Elementarmomente.

Diese Erkenntnis wird den folgenden Betrachtungen zugrunde gelegt. Es ist ratsam, jede Schwerpunktsberechnung darauf aufzubauen.

6.4.1.2 Statische Momente und Schwerpunkt einer ebenen Fläche

Unter der Annahme, daß eine ebene Figur homogen mit Masse belegt sei und damit die *Flächendichte* ρ (Masse pro Flächeneinheit) konstant bleibt, ist die Masse der Figur ihrem Flächeninhalt proportional. Für $\rho = 1$ (was ohne Beschränkung der Allgemeinheit immer vorausgesetzt werden kann) stimmt die Maßzahl der Masse jedes Teils der Figur mit der Maßzahl des zugehörigen Flächeninhalts überein. Die Formel (6.54) geht dann über in

$$r_s A = \int_A r\,\mathrm{d}A,$$

wobei r_s den Abstand des Flächenschwerpunkts von einer Bezugsachse angibt. Liegt die Figur in einem kartesischen Koordinatensystem (Bild 6.34), so sind für r_s und r die Abstände zur x- bzw. y-Achse einzusetzen. Man erhält dann für die **statischen Momente einer Fläche**

$$\boxed{M_y = \int_A x \, \mathrm{d}A, , \quad M_x = \int_A y \, \mathrm{d}A} \tag{6.55}$$

und unter Einbeziehung der Schwerpunktskoordinaten x_s und y_s:

$$\boxed{x_s A = \int_A x \, \mathrm{d}A \quad \text{bzw.} \quad y_s A = \int_A y \, \mathrm{d}A} \tag{6.56}$$

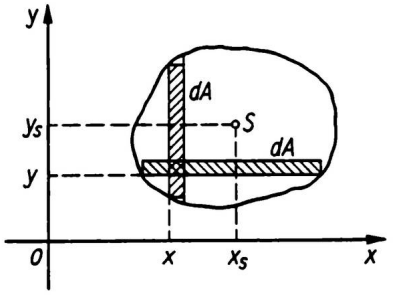


Bild 6.34

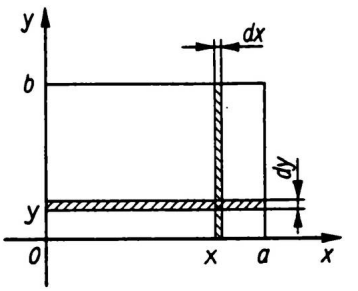


Bild 6.35

In diesen Formeln ist der Flächeninhalt $\mathrm{d}A$ ein Näherungswert für einen beliebig herausgegriffenen Flächenstreifen, der bei M_y parallel zur y-Achse und bei M_x parallel zur x-Achse liegt, x bzw. y ist der Abstand des Streifens zur betreffenden Achse.

Beispiel 6.86

Man berechne die Schwerpunktskoordinaten eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b.

Lösung:

Das Rechteck wird zweckmäßig so in das Koordinatensystem gelegt, wie Bild 6.35 zeigt. Als Flächenelemente wählt man Streifen parallel zu den Koordinatenachsen. Dann erhält man für die statischen Momente gemäß (6.55) und (6.56):

$$M_y = x_s A = \int_0^a xb \, \mathrm{d}x$$

$$M_x = y_s A = \int_0^b ya \, \mathrm{d}y$$

und nach Auflösung der Integrale

$$x_s ab = \frac{a^2 b}{2} \quad \text{bzw.} \quad y_s ab = \frac{ab^2}{2}.$$

Also ist $\underline{\underline{x_s = \frac{a}{2}}}$ und $\underline{\underline{y_s = \frac{b}{2}}}$.

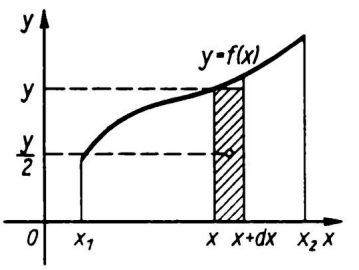


Bild 6.36

Im folgenden wird eine Fläche betrachtet, die im Intervall $[x_1, x_2]$ von einer Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ und der x-Achse begrenzt wird (Bild 6.36). Die

Funktion f sei stetig in $[x_1, x_2]$. Die statischen Momente M_x und M_y ergeben sich durch Grenzübergang aus einer Summe der Elementarmomente $\mathrm{d}M_x$ bzw. $\mathrm{d}M_y$. Zu ihrer Berechnung kann das Ergebnis des Beispiels 6.86 verwendet werden. Der Abstand des Schwerpunktes des rechteckigen Flächenelements $\mathrm{d}A$ von der x-Achse ist gleich $\frac{1}{2}y$, von der y-Achse näherungsweise gleich x (der Fehler $\frac{\mathrm{d}x}{2}$ kann vernachlässigt werden, da er beim Grenzübergang $\mathrm{d}x \to 0$ verschwindet). Mit $\mathrm{d}A = y\,\mathrm{d}x$ erhält man demnach

$$\mathrm{d}M_y = xy\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \mathrm{d}M_x = \frac{1}{2}y^2\,\mathrm{d}x.$$

Daraus folgt nach Summierung und Grenzübergang

$$M_y = \int_{x_1}^{x_2} xy\mathrm{d}y; \; M_x = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} y^2\mathrm{d}y$$

und gemäß der Formel (6.56)

$$x_s A = \int_{x_1}^{x_2} xy\,\mathrm{d}x; \quad y_s A = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} y^2\,\mathrm{d}x$$

bzw. wegen $y = f(x)$

$$\boxed{x_s A = \int_{x_1}^{x_2} xf(x)\,\mathrm{d}x; \quad y_s A = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} (f(x))^2\,\mathrm{d}x} \tag{6.57}$$

Für den Fall, daß die Fläche zwischen den Kurven zweier in $[x_1, x_2]$ stetiger Funktionen f und g liegt, ergeben sich ohne Schwierigkeiten entsprechende Formeln:

$$x_s A = \int_{x_1}^{x_2} x\,(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x\,; \quad y_s A = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} \left((f(x))^2 - (g(x))^2\right)\mathrm{d}x.$$

Beispiel 6.87

Man bestimme die Schwerpunktskoordinaten der Fläche, die im Intervall $[0, \pi]$ von der Kurve mit der Gleichung $y = x + \sin x$ und der x-Achse begrenzt wird.

Lösung:

Nach (6.57) erhält man für M_y:

$$x_s \int_0^{\pi} (x + \sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} x\,(x + \sin x)\,\mathrm{d}x \quad \text{oder}$$

$$x_s \left(\frac{\pi^2}{2} + 2\right) = \frac{\pi^3}{3} + \pi \quad \text{und daraus} \quad \underline{\underline{x_s \approx 1{,}94}}.$$

Für M_x erhält man

$$y_s \int_0^{\pi} (x + \sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (x + \sin x)^2\,\mathrm{d}x \quad \text{oder}$$

$$y_s \left(\frac{\pi^2}{2} + 2\right) = \frac{\pi^3}{6} + \frac{5}{4}\pi \quad \text{und daraus} \quad \underline{\underline{y_s \approx 1,31}}.$$

Die Lösung der auftretenden Integrale erfordert die Anwendung der partiellen Integration.

6.4.1.3 Statische Momente und Schwerpunkt eines Körpers

Es sollen nur solche Körper betrachtet werden, die homogen mit Masse belegt sind. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann dann die Dichte ρ mit 1 angenommen werden, so daß die Maßzahl der Masse des Körpers mit der Maßzahl seines Volumens übereinstimmt. Dann ergibt sich aus (6.52) allgemein

$$M = \int_V r\,\mathrm{d}V$$

und bei Bezug auf die Koordinatenebenen

$$M_{yz} = \int_V x\,\mathrm{d}V; \quad M_{xz} = \int_V y\,\mathrm{d}V; \quad M_{xy} = \int_V z\,\mathrm{d}V.$$

Zur Berechnung der Schwerpunktskoordinaten wird auch hier das in Formel (6.54) dargestellte Prinzip angewendet. Bei Rotationskörpern vereinfacht sich die Rechnung insofern, als die Rotationsachse gleichzeitig Symmetrielinie ist und daher der Schwerpunkt auf dieser Achse liegt. In diesem Falle braucht nur ein statisches Moment berechnet zu werden. Allgemein ergeben sich die

Koordinaten des Schwerpunktes eines Körpers aus

$$\boxed{x_s V = \int_V x\,\mathrm{d}V; \quad y_s V = \int_V y\,\mathrm{d}V; \quad z_s V = \int_V z\,\mathrm{d}V} \tag{6.58}$$

Mit $y = f(x)$, f stetig in $[x_1, x_2]$, erhält man insbesondere für einen Rotationskörper bei Rotation um die x-Achse: $\mathrm{d}V = \pi y^2\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}M_{yz} = x\pi y^2\,\mathrm{d}x$ (Bild 6.37). Mithin gilt

$$\boxed{x_s V = \pi \int_{x_1}^{x_2} x y^2\,\mathrm{d}x \quad \text{bzw.} \quad x_s V = \pi \int_{x_1}^{x_2} x\,(f(x))^2\,\mathrm{d}x} \tag{6.59}$$

und aus Symmetriegründen $y_s = 0$; $z_s = 0$.

Beispiel 6.88

Man bestimme die Schwerpunktskoordinaten eines Rotationsparaboloids mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h.

Lösung:

Bild 6.37 zeigt einen Längsschnitt des Körpers. Aus $\mathrm{d}V = \pi y^2\,\mathrm{d}x$ folgt unter Beachtung von $r = \sqrt{2ph}$

$$V = \pi \int_0^h 2px\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi r^2 h \text{ (vgl. Beispiel 6.80)}$$

Weiterhin ist

$$M_{yz} = \pi \int_0^h x 2px\,\mathrm{d}x = 2\pi p \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h^2.$$

Daraus folgt

$$x_s \frac{1}{2}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 h^2 \quad \text{und} \quad \underline{\underline{x_s = \frac{2}{3}h.}}$$

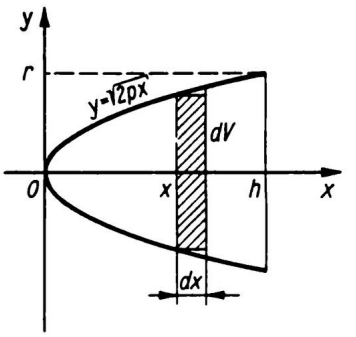


Bild 6.37

Aus der Symmetrie ergibt sich $y_s = 0$ und $z_s = 0$. Der Schwerpunkt eines Rotationsparaboloids liegt also auf der Rotationsachse bei einem Drittel der Höhe, vom Grundkreis aus gemessen.

6.4.1.4 Statische Momente und Schwerpunkt eines ebenen Kurvenstücks

Denkt man sich einen Bogen homogen mit Masse belegt und setzt die lineare Dichte (Masse pro Längeneinheit) $\rho = 1$, so stimmt die Maßzahl der Masse des Bogens mit der Maßzahl seiner Länge überein. Für das statische Moment eines ebenen Kurvenstücks ergibt sich damit aus (6.52)

$$M = \int_s r\,\mathrm{d}s.$$

Die statischen Momente bezüglich der Achsen eines kartesischen Koordinatensystems lauten

$$M_y = \int_s x\,\mathrm{d}s; \quad M_x = \int_s y\,\mathrm{d}s.$$

Dabei wird das vorgegebene Kurvenstück in Teile zerlegt, die durch Linienelemente $\mathrm{d}s$ angenähert werden (Bild 6.38). x und y sind näherungsweise die Achsenabstände eines solchen Linienelements. Mit $y = f(x)$, f stetig in $[x_1, x_2]$, erhält man unter Beachtung der für $\mathrm{d}s$ geltenden Beziehung (6.46) gemäß (6.54) die folgenden Formeln zur Berechnung der **Schwerpunktskoordinaten eines ebenen Kurvenstücks**:

$$x_s s = \int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

$$y_s s = \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \qquad (6.60)$$

Man beachte, daß der Schwerpunkt nicht unbedingt auf der Kurve liegen muß.

Beispiel 6.89

Es ist der Schwerpunkt der Kurve mit der Gleichung $y = \cosh x$ im Intervall $[0, 2]$ zu ermitteln.

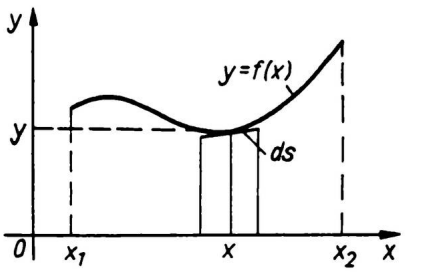


Bild 6.38

Lösung:

Aus (6.47) ergibt sich (vgl. Beispiel 6.82)

$$s = \int_0^2 \sqrt{1+\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x = \sinh 2 \approx 3,63.$$

Weiterhin gilt

$$M_y = \int_0^2 x\sqrt{1+\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x\cosh x\,\mathrm{d}x \approx 4,49$$

$$M_x = \int_0^2 \cosh x\sqrt{1+\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \cosh^2 x\,\mathrm{d}x \approx 7,82.$$

Nach Gl. (6.60) ist damit

$3,63x_s = 4,49$, $\underline{\underline{x_s = 1,24}}$ und $3,63y_s = 7,82$, $\underline{\underline{y_s = 2,16}}$.

6.4.1.5 Guldinsche Regeln

Die Regeln von GULDIN[1] vermitteln einen Zusammenhang zwischen der Berechnung von Rauminhalten und Oberflächen von Rotationskörpern und der Schwerpunktsbestimmung von Flächen und Kurven. Ein Vergleich der Formel (6.43) für das Volumen eines Rotationskörpers mit der Beziehung für das Moment M_x einer ebenen Fläche zeigt Übereinstimmung der Integrale. Ist $y = f(x)$ die Gleichung der Begrenzungskurve einer um die x-Achse rotierenden Fläche, so ist

$$V_x = \pi\int_{x_1}^{x_2} y^2\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad M_x = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} y^2\,\mathrm{d}x, \quad \text{also } V_x = 2\pi M_x.$$

[1] PAUL GULDIN (1577 bis 1643), Schweizer Mathematiker

Wegen (6.57) folgt daraus die **1. Guldinsche Regel**:

$$\boxed{V_x = 2\pi y_s A} \tag{6.61}$$

Das Volumen eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt der erzeugenden Fläche und dem Weg ihres Schwerpunkts.

Diese Regel gilt auch bei Rotation der Fläche um eine beliebige andere Achse.
Nach 6.3.4 gilt für die Mantelfläche eines Rotationskörpers bei Rotation um die x-Achse $A_M = 2\pi \int_s y \, ds$ und für das Moment M_x eines ebenen Kurvenstücks $M_x = \int_s y \, ds$. Also ist $A_M = 2\pi M_x$.
Wegen $M_x = y_s s$ folgt daraus die **2. Guldinsche Regel**:

$$\boxed{A_M = 2\pi y_s s} \tag{6.62}$$

Die Mantelfläche eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus der Länge des erzeugenden Bogens und dem Weg seines Schwerpunkts.

Auch diese Regel ist unabhängig von der Lage der Rotationsachse.
Die 1. Guldinsche Regel ermöglicht bei Kenntnis von A und y_s die Bestimmung von V und bei Kenntnis von A und V die Bestimmung von y_s. Mit Hilfe der zweiten Guldinschen Regel kann aus s und y_s die Mantelfläche A_M und aus A_M und s der Schwerpunktsabstand y_s berechnet werden. Die jeweils zweite Möglichkeit ist praktisch die bedeutsamere. Man beachte, daß y_s in (6.61) die Schwerpunktsordinate der Fläche, in (6.62) aber die Schwerpunktsordinate des Bogens ist.

Beispiel 6.90

Man berechne das Volumen eines zylindrischen Ringes (Torus) (Bild 6.39).

Lösung:

Setzt man in (6.61) $A = \pi r^2$ und $y_s = R$ ein, so erhält man

$V = 2\pi R \pi r^2 = \underline{\underline{2\pi^2 r^2 R}}$.

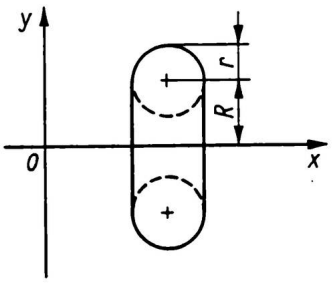


Bild 6.39

Beispiel 6.91

Man bestimme den Schwerpunkt einer Halbkreisfläche mit dem Radius r.

Lösung:

Es ist $A_{\text{Halbkreis}} = \frac{1}{2}\pi r^2$ und $V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3}\pi r^3$. Aus (6.61) ergibt sich damit

$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi y_s \frac{1}{2}\pi r^2$ und $y_s = \underline{\underline{\frac{4r}{3\pi}}}$.

Die zweite Schwerpunktskoordinate x_s läßt sich unter Ausnutzung der Symmetrie bestimmen.

6.4.2 Trägheitsmomente

Unter dem Trägheitsmoment I eines Massenpunktes mit der Masse m bezüglich einer Achse versteht man das Produkt aus seiner Masse und dem Quadrat des Abstandes r dieses Punktes von der Achse:

$$I = r^2 m \tag{6.63}$$

Das Trägheitsmoment eines Körpers läßt sich berechnen, indem man den Körper in Elemente zerlegt, für jedes Element das Trägheitsmoment bestimmt und die Summe dieser Elementarmomente bildet. Läßt man die Zahl der Elemente beliebig groß und jedes einzelne Element beliebig klein werden, so hat man den Grenzwert einer Summe zu berechnen, der der Definition des bestimmten Integrals gemäß (6.7) genügt.

Liegen alle Massenpunkte in einer Ebene, so gelangt man zum Begriff des Flächenträgheitsmoments, für das ein analoges Berechnungsverfahren zutrifft. Bei Flächenträgheitsmomenten unterscheidet man

das *äquatoriale (axiale) Flächenträgheitsmoment*, wenn die Bezugsachse in der Ebene der Fläche liegt,

und

das *polare Flächenträgheitsmoment*, wenn die Bezugsachse senkrecht auf der Ebene der Fläche steht.

Liegt ein Massenpunkt in der Ebene des cartesischen Koordinatensystems (Bild 6.40), so erhält man für ihn bezüglich der x- und der y-Achse die äquatorialen Trägheitsmomente

$$I_x = y^2 m \quad \text{und} \quad I_y = x^2 m \tag{6.64}$$

und bezüglich des Koordinatenursprungs als Durchstoßpunkt (Pol) einer senkrecht zur Ebene stehenden Achse das polare Trägheitsmoment

$$I_p = R^2 m. \tag{6.65}$$

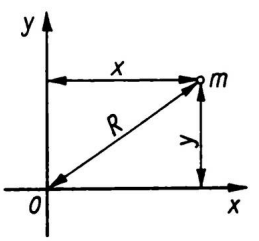


Bild 6.40

Nach dem Satz des PYTHAGORAS gilt $R^2 = x^2 + y^2$ und deshalb

$$I_p = R^2 m = \left(x^2 + y^2\right) m = x^2 m + y^2 m.$$

Folglich ist

$$\boxed{I_p = I_x + I_y} \tag{6.66}$$

Im weiteren werden nur Trägheitsmomente ebener Flächen betrachtet.

Wie in 6.4.1.2 soll angenommen werden, daß die Flächendichte einer homogen mit Masse belegten ebenen Figur gleich 1 sei. Dann stimmen die Maßzahlen von

Masse und Flächeninhalt überein, und man erhält aus (6.64) und (6.65) für die Flächenträgheitsmomente eines Elements $\mathrm{d}A$:

$$\mathrm{d}I_x = y^2\,\mathrm{d}A, \quad \mathrm{d}I_y = x^2\,\mathrm{d}A, \quad I_p = R^2\,\mathrm{d}A.$$

Durch Integration ergeben sich daraus die **äquatorialen Flächenträgheitsmomente**

$$\boxed{I_x = \int_A y^2\,\mathrm{d}A; \quad I_y = \int_A x^2\,\mathrm{d}A} \tag{6.67}$$

und das **polare Flächenträgheitsmoment**

$$\boxed{I_p = \int_A R^2\,\mathrm{d}A} \tag{6.68}$$

In einem gleichgeteilten Koordinatensystem haben Flächenträgheitsmomente die Maßeinheit (Längeneinheiten)^4.

Beispiel 6.92

Man berechne die äquatorialen Flächenträgheitsmomente eines Rechtecks in bezug auf seine Seiten (Bild 6.35).

Lösung:

Zur Berechnung von I_x betrachtet man einen Flächenstreifen parallel zur x-Achse mit dem Inhalt $\mathrm{d}A = a\,\mathrm{d}y$ und erhält aus (6.67)

$$I_x = \int_0^b ay^2\,\mathrm{d}y = \underline{\underline{\frac{ab^3}{3}}}.$$

Entsprechend ist

$$I_y = \int_0^a bx^2\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{a^3b}{3}}}$$

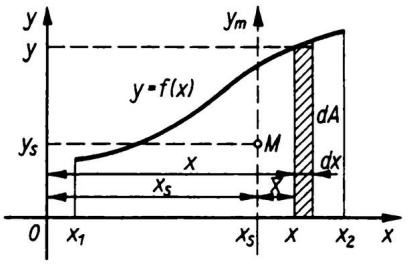


Bild 6.41

Ist eine Fläche gegeben, die im Intervall $[x_1, x_2]$ nach oben von der Kurve einer stetigen Funktion und nach unten von der x-Achse begrenzt wird (Bild 6.41), so zerlegt man die Fläche in Streifen und nähert diese durch rechteckige Flächenelemente an. Die Berechnung der Trägheitsmomente der einzelnen Elemente kann dann nach Beispiel 6.92 erfolgen. Es ist demnach

$$\mathrm{d}I_x = \frac{1}{3}y^3\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \mathrm{d}I_y = x^2y\,\mathrm{d}x.$$

Daraus erhält man durch Integration die **äquatorialen Trägheitsmomente der Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$:**

$$I_x = \frac{1}{3}\int_{x_1}^{x_2} y^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_{x_1}^{x_2} (f(x))^3\,\mathrm{d}x$$

$$I_y = \int_{x_1}^{x_2} x^2 y\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.69}$$

Liegt die Fläche zwischen zwei Kurven, so erhält man die gesuchten Trägheitsmomente durch Subtraktion der Trägheitsmomente zweier Teilflächen, von der jeweiligen Kurve bis zur x-Achse gemessen.

Beispiel 6.93

Man berechne die äquatorialen Flächenträgheitsmomente I_x und I_y und das polare Flächenträgheitsmoment I_p für die von der Sinuskurve und der x-Achse im Intervall $[0, \pi]$ eingeschlossene Fläche.

Lösung:

$$I_x = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \sin^3 x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{9}\cos x\,(\sin^2 x + 2)\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{9} \approx \underline{\underline{0,44}}$$

(Rekursionsformel Integraltafel 3.1)

$$I_y = \int_0^{\pi} x^2 \sin x\,\mathrm{d}x = \left((2 - x^2)\cos x + 2x \sin x\right)\Big|_0^{\pi} = \pi^2 - 4 \approx \underline{\underline{5,87}}$$

Aus (6.66) folgt dann $I_p = I_x + I_y = \underline{\underline{6,31}}$.

Von besonderer Bedeutung für die Berechnung von Trägheitsmomenten ist der **Satz von STEINER**[1] , der hier ohne Beweis angegeben wird:

Das Trägheitsmoment einer Fläche A in bezug auf eine Achse L ist gleich der Summe aus dem Trägheitsmoment dieser Fläche bezüglich einer durch den Schwerpunkt M gehenden, zu L parallelen Achse und dem Produkt Al^2, wobei l der Abstand der beiden Achsen ist:

$$I_L = I_M + Al^2 \tag{6.70}$$

Für die Flächenträgheitsmomente I_x und I_y lautet der Satz von STEINER:

$$I_x = I_{x_m} + y_s^2 A \quad \text{bzw.} \quad I_y = I_{y_m} + x_s^2 A.$$

Die Bedeutung des Satzes von STEINER liegt vor allem darin, daß das Trägheitsmoment bezüglich einer beliebigen Achse mit Hilfe des häufig einfacher zu berechnenden Trägheitsmomentes bezüglich der Schwerpunktsachse bestimmt werden kann.

[1] JACOB STEINER (1796 bis 1863), Schweizer Mathematiker

Beispiel 6.94

Man berechne das Trägheitsmoment einer Kreisfläche mit dem Radius 1 bezüglich einer Tangente.

Lösung:

Bild 6.42 zeigt eine zweckmäßige Lage des Koordinatensystems. Die y-Achse ist gleichzeitig Schwerpunktsachse. Mit der Gleichung $y = \sqrt{1-x^2}$ für den oberen Halbkreis erhält man $I_y = 2\int\limits_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. Durch den Faktor 2 wird auch der untere Halbkreis mit erfaßt. Mit Hilfe der Integraltafel (2.6, 2.2, 2.1) findet man

$$I_y = 4\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left(-x\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3 + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\right)\Big|_0^1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}.$$

Der Lösungsweg vereinfacht sich, wenn zuerst I_p berechnet wird. Dazu empfiehlt sich die Zerlegung des Kreises in Kreisringe (Bild 6.42), deren Inhalt ΔA durch Rechtecke $\mathrm{d}A$ der Länge $2\pi r$ und der Breite $\mathrm{d}r$ angenähert wird:
$\Delta A \approx \mathrm{d}A = 2\pi r\,\mathrm{d}r$. Dann ergibt sich

$$I_p = \int_A r^2\,\mathrm{d}A = 2\pi\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}.$$

Aus der Beziehung $I_p = I_x + I_y$ und der wegen der Symmetrie geltenden Gleichheit $I_x = I_y$ folgt $I_y = \frac{1}{2}I_p = \frac{\pi}{4}$.

Das Trägheitsmoment bezüglich der Tangente T läßt sich dann nach dem Satz von STEINER angeben ($l = 1$):

$$I_T = I_y + Al^2 = \frac{\pi}{4} + \pi = \underline{\underline{\frac{5\pi}{4}}}.$$

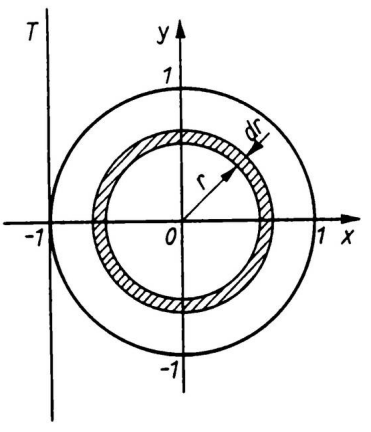


Bild 6.42

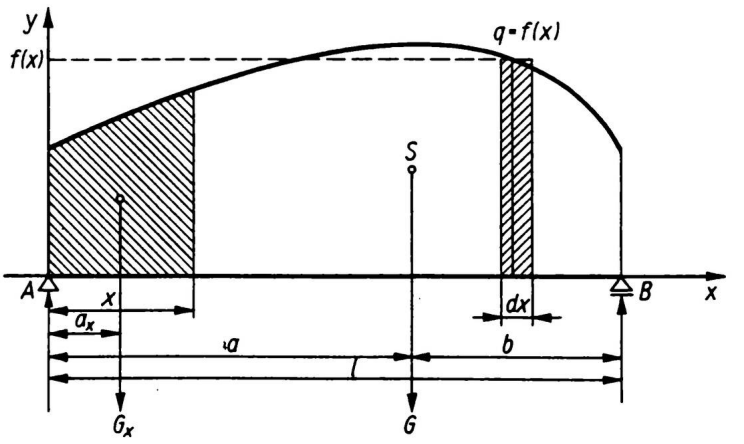


Bild 6.43

6.4.3 Balken auf zwei Stützen mit ungleichmäßig verteilter Streckenlast

Von Bedeutung für die Statik ist die Betrachtung einer über die Balkenlänge ungleichmäßig verteilten Streckenlast. Dieser Fall, der z.B. bei der Lagerung von Schüttgütern auftritt, ist in Bild 6.43 dargestellt. Der Ursprung des Koordinatensystems liege im linken Auflager, die x-Achse zeige in Balkenrichtung, und die Belastungsordinaten q seien durch die Gleichung $q = f(x)$ einer in $[0, l]$ stetigen Funktion f gegeben.

Auflagerkräfte

Die Last auf dem Balkenstück der Breite $\mathrm{d}x$ ist näherungsweise $q\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x$. Die Gesamtlast G ergibt sich als Inhalt der Fläche unter der *Belastungskurve* mit der Gleichung $q = f(x)$ durch Integration:

$$\boxed{G = \int_0^l f(x)\,\mathrm{d}x} \tag{6.71}$$

Der Vektor von G greift im Schwerpunkt S der *Belastungsfläche* an, in dem man sich die Gesamtheit vereinigt denken kann. Den Schwerpunktsabstand a vom linken Auflager erhält man nach (6.57) aus

$$\boxed{a\,G = \int_0^l x f(x)\,\mathrm{d}x} \tag{6.72}$$

Aus Bild 6.43 folgt $b = l - a$. Mit der Gesamtlast G stehen die beiden Auflagerkräfte F_A und F_B im Gleichgewicht. Daher muß die Momentensumme in bezug auf jeden beliebigen Drehpunkt gleich null sein. Liegt der Drehpunkt einmal im linken und einmal im rechten Auflager, so gelten die Momentengleichungen

$$F_B l - G a = 0 \quad \text{und} \quad F_A l - G b = 0,$$

aus denen sich die Auflagerkräfte

$$\boxed{F_A = \frac{G b}{l};\ F_B = \frac{G a}{l}} \tag{6.73}$$

ergeben.

Schnittkräfte

Die *Längskraft* ist null, da keine waagerechten Belastungskomponenten auftreten. Die *Querkraft* $Q = g(x)$ für einen Schnitt in der beliebigen Entfernung x vom linken Auflager ist die Summe aller senkrechten Kräfte vom linken Auflager bis zur Schnittstelle x. Ist G_x die Last auf der Strecke $[0, x]$, so erhält man entsprechend

$$G_x = \int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x$$

und

$$\boxed{Q = F_A - \int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x} \tag{6.74}$$

wenn nach oben gerichtete Kräfte als positiv vorausgesetzt werden.

Das *Moment* an der Stelle x ist die Summe der Momente aller links von x angreifenden Kräfte, bezogen auf die Stelle x. Unter Berücksichtigung der beiden Kräfte F_A und G_x ist deshalb das Moment an der Stelle x

$$M = F_A x - G_x\,(x - a_x) = F_A x - x G_x + a_x G_x.$$

Analog zu (6.72) ergibt sich a_x aus

$$a_x G_x = \int_0^x x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Mithin ist

$$\boxed{M = F_A x - x \int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^x x f(x)\,\mathrm{d}x} \tag{6.75}$$

Zusammenhang zwischen Moment, Querkraft und Belastung

Durch Differentiation erhält man aus (6.75)

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = F_A - \int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x - x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x x f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= F_A - \int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x - x f(x) + x f(x) = F_A - \int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wegen (6.74) ist also

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = Q} \tag{6.76}$$

Die Maßzahl des Anstiegs der Momentenlinie an der Stelle x ist gleich der Maßzahl der Querkraft an dieser Stelle.

Weitere Differentiation ergibt

$$\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = 0 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x = -f(x)$$

und wegen $q = f(x)$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = -q} \tag{6.77}$$

Die Maßzahl des Anstiegs der Querkraftlinie an einer Stelle x ist gleich der negativen Maßzahl der Belastung an dieser Stelle.

Die Stelle x_E, an der die Momentenlinie einen Extrempunkt hat, heißt *gefährdeter Querschnitt*. Die Bedingung dafür ist

$$\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_E} = 0,$$

also wegen (6.76)

$$\boxed{Q = g(x_E) = 0} \tag{6.78}$$

Der gefährdete Querschnitt liegt an der Stelle x_E, an der die Querkraft den Wert Null hat.

Beispiel 6.95

Die Belastung für einen Balken der Länge $l = 3$ werde durch die Kurve mit der Gleichung $q = x - 0,25x^2$ gegeben (Bild 6.44).
Man berechne G, F_A, F_B, die Querkraft Q und das Moment M für eine beliebige Stelle x und für die Balkenmitte sowie den gefährdeten Querschnitt.

Lösung:

$$G = \int_0^3 (x - 0,25x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{9}{4} = 2,2500$$

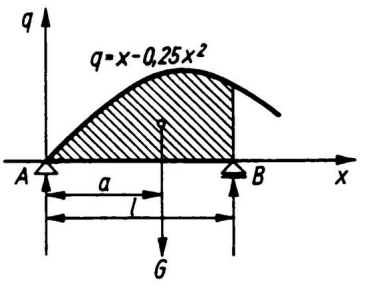


Bild 6.44

Nach (6.72) ist

$$aG = \int_0^3 x\,(x - 0,25x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{63}{16} = 3,9375$$

und damit $F_B = \dfrac{aG}{l} = \dfrac{21}{16} = 1,3125.$

Wegen $F_A + F_B = G$ folgt $F_A = G - F_B = 0,9375.$

$$Q = F_A - \int_0^x (x - 0,25x^2)\,\mathrm{d}x = 0,9375 - 0,5x^2 + 0,0833x^3$$

$$Q_{\frac{1}{2}} = 0,9375 - 1,1250 + 0,2813 = 0,0938$$

$$M = F_A x - x \int_0^x (x - 0,25x^2)\,\mathrm{d}x + \int_0^x x\,(x - 0,25x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$= F_A x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{48}x^4 = F_A x - 0,1667x^3 + 0,0208x^4$$

$$M_{\frac{1}{2}} = 1,5F_A - 0,5625 + 0,1055 = 0,9493$$

Als Lösung der Gleichung $Q = 0$ ergibt sich

$x_E = 1,5988.$

Werden die Kräfte in N und die Länge in m gemessen, so erhält man demnach

$$G \approx 22,5\,\mathrm{N}; \quad F_A \approx 9,4\,\mathrm{N}; \quad F_B \approx 13,1\,\mathrm{N};$$
$$Q_{\frac{1}{2}} \approx 0,9\,\mathrm{N}; \quad M_{\frac{1}{2}} \approx 9,5\,\mathrm{Nm}; \quad x_E \approx 1,6\,\mathrm{m}.$$

6.4.4 Arbeit

6.4.4.1 Arbeit bei der Ausdehnung einer Schraubenfeder

In der Mechanik ist die durch eine konstante Kraft F längs eines Weges geleistete Arbeit definiert als Produkt

$$W = F_s s,$$

wobei F_s die in der Bewegungsrichtung liegende Kraftkomponente ist. Häufig werden sich jedoch sowohl der Betrag als auch der Winkel der Angriffsrichtung der Kraft in Abhängigkeit vom Weg ändern, d.h., es ist $F = f(s)$. Zur Berechnung der Arbeit zerlegt man den Weg in n Elemente d_{s_i}, längs derer die Arbeit ΔW_i näherungsweise durch $\mathrm{d}W_i = F_{s_i}\,\mathrm{d}s_i = f(s_i)\,\mathrm{d}s_i$ dargestellt wird. Für die Gesamtarbeit erhält man damit

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\,\mathrm{d}s_i.$$

Die $f(s_i)$ setzt man längs der einzelnen Wegstücke $\mathrm{d}s_i$ als konstant voraus. Der Fehler wird dabei um so kleiner, je feiner die Unterteilung wird, d.h. je kleiner die $\mathrm{d}s_i$ sind. Durch Grenzübergang erhält man den genauen Wert:

$$\boxed{W = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathrm{d}s_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\,\mathrm{d}s_i = \int_{s_1}^{s_2} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_{s_1}^{s_2} F_s\,\mathrm{d}s} \tag{6.79}$$

Auf Grund der Darstellung durch ein bestimmtes Integral läßt sich die Arbeit auch geometrisch als Inhalt der Fläche unter der Kurve von $F_s = f(s)$ im F_s, s-Diagramm deuten (Bild 6.45).

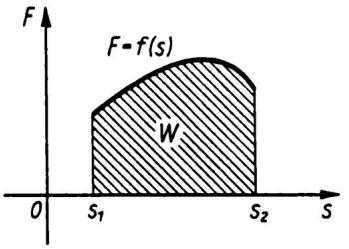


Bild 6.45

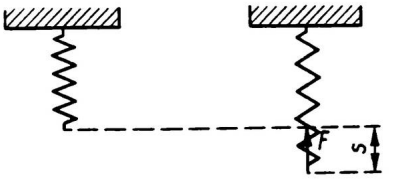


Bild 6.46

Bei der Dehnung s einer Feder (Bild 6.46) muß die in Richtung der Federachse wirkende Kraft F eine Spannung überwinden, die in gewissen Grenzen der Dehnung proportional ist:

$$F = ks.$$

k ist dabei ein materialbedingter Proportionalitätsfaktor, die sogenannte Federkonstante. Die Arbeit bei der Dehnung um die Länge h ist damit nach (6.79)

$$W = \int_0^h F\,\mathrm{d}s = k\int_0^h s\,\mathrm{d}s = \frac{kh^2}{2}.$$

Bezeichnet man mit F_h den größten Wert von F, der der Dehnung h entspricht, so ist $F_h = kh$ und demnach

$$W = \frac{hF_h}{2}.$$

Im F,s-Diagramm kann also die Arbeit für die Ausdehnung einer Schraubenfeder als Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen h und F_h dargestellt werden.

6.4.4.2 Ausdehnungsarbeit eines Gases

In einem Zylinder befinde sich auf der einen Seite des Kolbens (Bild 6.47) ein Gas mit dem Volumen V und dem Druck p. Der Kolbenquerschnitt sei Q. Dehnt sich das Gas aus, so wird der Kolben um die Strecke $\mathrm{d}s$ nach rechts bewegt. Die auf den Kolben wirkende Kraft ist gleich pQ und die vom Gas geleistete Arbeit

$$W = Q\int_{s_1}^{s_2} p\,\mathrm{d}s.$$

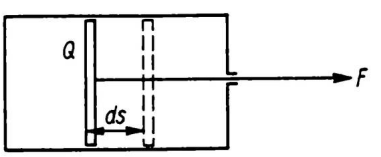


Bild 6.47

Wegen $V = Qs$ kann das Produkt $Q\,\mathrm{d}s$ durch $\mathrm{d}V$ ersetzt werden.
Dadurch ergibt sich

$$\boxed{W = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V} \tag{6.80}$$

wobei V_1 und V_2 das Anfangs- und das Endvolumen bezeichnen. Verläuft der Prozeß *isotherm*, d.h. bei gleichbleibender Temperatur, so gilt für ideale Gase das Gesetz von BOYLE–MARIOTTE[1] $pV = p_1V_1$ =const., sofern p_1 und V_1 bekannte Anfangswerte sind.

Demnach ist $p = \dfrac{p_1V_1}{V}$ und nach (6.80)

$$W = p_1V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} = p_1V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Für einen *adiabatischen* Ausdehnungsprozeß, bei dem mit der Umgebung kein Wärmeaustausch erfolgt, gilt das Gestz von POISSON[2] $pV^\varkappa = p_1V_1^\varkappa$, wobei $\varkappa = \dfrac{c_p}{c_v}$ das Verhalten der spezifischen Wärme des Gases bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen angibt.

Aus $p = p_1\dfrac{V_1^\varkappa}{V^\varkappa}$ und (6.80) folgt

$$W = p_1V_1^\varkappa \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V^\varkappa} = \frac{p_1V_1^\varkappa}{\varkappa - 1}\left(\frac{1}{V_1^{\varkappa-1}} - \frac{1}{V_2^{\varkappa-1}}\right).$$

6.4.4.3 Arbeit des Wechselstroms

Für die Arbeit in einem Gleichstromkreis mit der konstanten Spannung U und dem konstanten Strom I während einer Zeit t gilt die Beziehung

$$W = UIt.$$

Sind dagegen die Spannung und der Strom zeitlich veränderlich ($u = f(t)$, $i = g(t)$), wird die Arbeit durch diese Gleichung nicht richtig dargestellt. Man zerlegt die vorgegebene Zeitspanne T in kleine Zeitelemente $\mathrm{d}t$ und betrachtet u und i während der kurzen Zeit $\mathrm{d}t$ als annähernd konstant. Dann ist

$$\mathrm{d}W = ui\,\mathrm{d}t$$

ein Näherungswert für die Arbeit in dieser Zeit, und die Arbeit für die Gesamtzeit T ergibt sich durch Integration:

---

[1] ROBERT BOYLE (1627 bis 1691), englischer Physiker
EDMÉ MARIOTTE (1620 bis 1684), französischer Physiker

[2] SIMEON DENIS POISSON (1781 bis 1840), französischer Mathematiker und Physiker

$$\boxed{W = \int_0^T ui\,\mathrm{d}t} \tag{6.81}$$

Ist $u = \hat{u}\sin\omega t$ eine Wechselspannung mit der Amplitude $\hat{u}$ und der Kreisfrequenz ω, die einen Wechselstrom $i = \hat{\imath}\sin(\omega t + \varphi)$ erzeugt, wobei $\hat{\imath}$ die Amplitude des Wechselstroms und φ die Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung sei, so folgt aus (6.81) für die Arbeit des Wechselstroms während der Periode $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$$W = \hat{u}\hat{\imath}\int_0^T \sin\omega t\sin(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t.$$

Nach der Lösung dieses Integrals (Integraltafel 3.7) ergibt sich

$$\begin{aligned} W &= \frac{\hat{u}\hat{\imath}}{2}\left(-\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t + \varphi) + t\cos\varphi\right)\Bigg|_0^T \\ &= \frac{\hat{u}\hat{\imath}}{2}\left(-\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega T + \varphi) + T\cos\varphi + \frac{1}{2\omega}\sin\varphi\right). \end{aligned}$$

Beachtet man, daß $2\omega T = 4\pi$ und $\sin(4\pi + \varphi) = \sin\varphi$, so ist schließlich

$$W = \frac{\hat{u}\hat{\imath}}{2}T\cos\varphi.$$

Durch Einführung der Effektivwerte $U = \dfrac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$ und $I = \dfrac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}}$ von Spannung und Strom (vgl. 6.4.5.2) erhält man daraus

$$W = UIT\cos\varphi.$$

6.4.5 Berechnung von Mittelwerten mit Hilfe des bestimmten Integrals

6.4.5.1 Linearer Mittelwert

Aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (6.16) ergibt sich

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$f(\xi)$ heißt linearer oder arithmetischer Mittelwert. Geometrisch gibt er die Höhe eines Rechtecks an, welches der von $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[a, b]$ begrenzten Fläche inhaltsgleich ist.

Beispiel 6.96

Für eine Kraft F gelte $F = f(s) = \frac{s^2}{2}$. Man berechne jene konstante Kraft F_m, die längs des Weges von $s_1 = 1$ bis $s_2 = 8$ die gleiche Arbeit wie die veränderliche Kraft F verrichtet.

Lösung:

$$F_m = \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} f(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{7} \int_1^8 \frac{s^2}{2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{7} \frac{s^3}{6}\Big|_1^8 \approx \underline{\underline{12,2}}.$$

Wird F in N angegeben, so ist die Maßeinheit des Ergebnisses ebenfalls N.

Beispiel 6.97

Ein elektrischer Strom konstanter Stärke I transportiert während der Zeit t die Elektrizitätsmenge $Q = It$. Ist dagegen die Stromstärke zeitlich variabel, also $i = f(t)$, so ist $\mathrm{d}Q = i\,\mathrm{d}t$ ein Näherungswert für die in der kurzen Zeit $\mathrm{d}t$ beförderte Elektrizitätsmenge $\{i = f(\tau), \quad \tau \in [t, t + \mathrm{d}t]\}$. Daraus ergibt sich für ein Zeitintervall $[t_1, t_2]$:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} i\,\mathrm{d}t.$$

Man berechne die gedachte konstante Stromstärke $\bar{i}$, die erforderlich ist, um in der Zeit $t_2 - t_1$ die gleiche Elektrizitätsmenge zu transportieren wie bei der variablen Stromstärke $i = f(t)$.

Lösung:

$$\bar{i} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i\,\mathrm{d}t$$

$\bar{i}$ heißt in der Elektrotechnik *arithmetischer* oder *elektrolytischer Mittelwert.* Betrachtet man einen Wechselstrom $i = \hat{i} \sin \omega t$ mit der Amplitude $\hat{i}$ und der Kreisfrequenz ω während einer Periode T, so ist

$$\bar{i} = \frac{\hat{i}}{T} \int_0^T \sin \omega t\,\mathrm{d}t = -\frac{\hat{i}}{\omega T} \cos \omega t\Big|_0^T$$

und wegen $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\bar{i} = -\frac{\hat{i}}{2\pi} (\cos 2\pi - \cos 0) = 0.$$

Der arithmetische Mittelwert für eine halbe Periode ist

$$\bar{i} = \frac{2\hat{i}}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t\,\mathrm{d}t = -\frac{2\hat{i}}{\omega T} \cos \omega t\Big|_0^{\frac{T}{2}} = -\frac{2\hat{i}}{2\pi} (\cos \pi - \cos 0) = \frac{2}{\pi} \hat{i} \approx \underline{\underline{0,637\hat{i}}}.$$

6.4.5.2 Quadratischer Mittelwert

Der quadratische Mittelwert einer Funktion f im Intervall $[a, b]$ wird nach (6.17) durch den Term

$$\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x}$$

angegeben. Als Beispiel sei der *Effektivwert* der Stromstärke angeführt.

Beispiel 6.98

Die von einem Gleichstrom während einer Zeit t geleistete Arbeit ist $W = UIt = I^2Rt$.

Der Effektivwert eines Wechselstroms $i = \hat{i}\sin\omega t$ ist jener konstante Strom I, der während einer Periode T den gleichen Effekt erzielt, d.h. dieselbe Arbeit leistet bzw. dieselbe Wärmemenge liefert. Somit ergibt sich unter Beachtung von (6.81)

$$I^2Rt = \int_0^t ui\,\mathrm{d}t = \int_0^t i^2R\,\mathrm{d}t.$$

Für $t = T$ gilt

$$I^2RT = R\int_0^T i^2\,\mathrm{d}t \quad \text{bzw.} \quad I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2\,\mathrm{d}t$$

und folglich

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,\mathrm{d}t}.$$

Der Effektivwert I ist demnach ein quadratischer Mittelwert. Durch weitere Umformung erhält man

$$I^2 = \frac{\hat{i}^2}{T}\int_0^T \sin^2\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{\hat{i}^2}{2\omega T}(\omega t - \sin\omega t\cos\omega t)\Big|_0^T.$$

Wegen $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ folgt daraus

$$I^2 = \frac{\hat{i}^2}{4\pi}(2\pi - \sin 2\pi\cos 2\pi) = \frac{\hat{i}^2}{2}$$

und

$$I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \approx \underline{\underline{0,707\hat{i}}}.$$

Aufgaben 6.122 bis 6.137

6.5 Aufgaben

6.1 $\int (x^5 - 3x^2 + 7)\,\mathrm{d}x$ **6.2** $\int \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$ **6.3** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{x^2}}$

6.4 $\int \frac{t^2 - 4\sqrt[3]{t} + 8t^{-2}}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ **6.5** $\int \left(s + 2\sqrt{s}\right)^2\,\mathrm{d}s$ **6.6** $\int \sqrt{u\sqrt[3]{u^2}}\,\mathrm{d}u$

6.7 $\int \sqrt{v\sqrt[3]{u^2}}\,\mathrm{d}u$ **6.8** $\int (r^2 + 2^r)\,\mathrm{d}r$ **6.9** $\int \left(m - \frac{1}{m}\right)\mathrm{d}m$

6.10 $\int a\cos^2 x\,\mathrm{d}u$ **6.11** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{t} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$ **6.12** $\int_{1}^{x} (q^3 + 6q^2 - 2q + 7)\,\mathrm{d}q$

6.13 $\int_{2}^{s} \frac{\mathrm{d}s}{s}$ **6.14** $\int_{\frac{1}{2}}^{y} \left(\frac{\pi}{2} + (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x$

6.15 Man bestimme die Stammfunktion zu $f(x) = x^3 + 5x - 4$, deren Kurve durch den Punkt $P(2;8)$ geht.

6.16 $\int_{-2}^{1} (2 - 4x)\,\mathrm{d}x$ **6.17** $\int_{0}^{\pi} (\sin x - 5)\,\mathrm{d}x$ **6.18** $\int_{0}^{0,5} \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2}$

6.19 $\int_{2}^{4} \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2}$ **6.20** $\int_{0,5}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2}$ **6.21** $\int_{1}^{2} (\cos\varphi)\,t\,\mathrm{d}t$

6.22 $-\int_{5}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 + x^2}}$ **6.23** $\int_{x_1}^{x_2} ab\pi\,\mathrm{d}t$

6.24 $\int_{1}^{3} (1 - x^2)\,\mathrm{d}x - \int_{3}^{4} (x^2 - 1)\,\mathrm{d}x$ **6.25** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

6.26 $\int_{0}^{a} 3\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ **6.27** $\int_{1}^{0,1} \frac{\mathrm{d}v}{v}$ **6.28** $\int_{0}^{2} \mathrm{d}\left(x^2\right)$

6.29 Man bestimme den Mittelwert von $f(x) = \mathrm{e}^x - 1$ für das Intervall $[0, a]$.

6.30 Man bestimme den Mittelwert von $f(x) = x^3$ für das Intervall $[-1, 1]$.

6.31 Man bestimme den Mittelwert von $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x < \frac{\pi}{3} \\ \sin x & \text{für } \frac{\pi}{3} \le x \le \pi \end{cases}$ für den angegebenen Definitionsbereich.

6.32 $\int \sqrt{5x + 3}\,\mathrm{d}x$ **6.33** $\int \frac{\mathrm{d}t}{2t + 3}$ **6.34** $\int 3^{2-x}\,\mathrm{d}x$

6.35 $\int \cos(2\varphi + 0{,}5)\,\mathrm{d}\varphi$ **6.36** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9x^2-1}}$ **6.37** $\int \frac{5\,\mathrm{d}u}{\sqrt[6]{2u-7}}$

6.38 $\int \frac{3\,\mathrm{d}x}{\cos^2(4x-2)}$ **6.39** $\int \frac{\mathrm{d}u}{1+a^2u^2}$ **6.40** $\int_0^1 \left(\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\right)^2 \mathrm{d}x$

6.41 $\int_4^5 \frac{\mathrm{d}v}{(v-3)^2}$ **6.42** $\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x$ **6.43** $\int \cos^3 x \sin x\,\mathrm{d}x$

6.44 $\int \left(5\sin^4 x - 3\sin^2 x + 2\sin x + 4\right)\cos x\,\mathrm{d}x$ **6.45** $\int x^2\sqrt{6x^3-5}\,\mathrm{d}x$

6.46 $\int \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x$ **6.47** $\int \mathrm{e}^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x$ **6.48** $\int \frac{\operatorname{arsinh} 4x}{\sqrt{16x^2+1}}\,\mathrm{d}x$

6.49 $\int_1^2 \frac{\coth^2 x}{\cosh x}\,\mathrm{d}x$ **6.50** $\int_2^4 \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$ **6.51** $\int_0^{\frac{\pi^2}{9}} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

6.52 $\int \cot x\,\mathrm{d}x$ **6.53** $\int_2^6 \frac{\mathrm{d}x}{x\lg x}$ **6.54** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

6.55 $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{5-u^2}}$ **6.56** $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$ **6.57** $\int \sqrt{3-(4+y)^2}\,\mathrm{d}y$

6.58 $\int \frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$ **6.59** $\int_{1,5}^{0,5} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$ **6.60** $\int \sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x$

6.61 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ **6.62** $\int x\sqrt{x^2+4x+29}\,\mathrm{d}x$ **6.63** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9x^2+6x+5}}$

6.64 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2-8x}}$ **6.65** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$ **6.66** $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$

6.67 $\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x$ **6.68** $\int x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ **6.69** $\int x\sin x^2\,\mathrm{d}x$

6.70 $\int x\sin(3-x)\,\mathrm{d}x$ **6.71** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x+1)\,\mathrm{d}x$ **6.72** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4t\cos 2t\,\mathrm{d}t$

6.73 $\int_1^3 u\,\mathrm{e}^{u-3}\,\mathrm{d}u$ **6.74** $\int \frac{\sin x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$ **6.75** $\int x^3\,\mathrm{e}^{-4x}\,\mathrm{d}x$

6.76 $\int x^2\cosh\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x$ **6.77** $\int \arctan x\,\mathrm{d}x$ $\left(\text{Man beachte } \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}\right)$

6.78 $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$ **6.79** $\int \operatorname{arsinh} x\,\mathrm{d}x$ **6.80** $\int x(\ln x+1)\,\mathrm{d}x$

6.81 $\int_1^2 x^{-2} \ln x \, dx$ **6.82** $\int \frac{x+13}{x^2-4x-5} dx$ **6.83** $\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2-10x+25}$

6.84 $\int \frac{(x+2)\,dx}{(x-1)(1-x)}$ **6.85** $\int \frac{x-3}{x^2+1} dx$ **6.86** $\int \frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8} dx$

6.87 $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)^2}$ **6.88** $\int \frac{5x^2-24x+21}{x^3-7x^2+8x+16} dx$ **6.89** $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

6.90 $\int_0^1 \lg(1+x^3)\,dx$ **6.91** $\int_0^{1,2} \lg(1+x^2)\,dx$ **6.92** $\int_0^{1,2} e^{x^2-1}\,dx$

6.93 $\int_{0,1}^{0,7} \sinh(1+x^2)\,dx$ **6.94** $\int_4^8 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ **6.95** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin x}$; $n=4$

6.96 Man berechne nach der Simpsonschen Formel den Inhalt der Fläche zwischen der x-Achse und der durch die folgende Wertetabelle gegebenen Kurve:

x	2	3	4	5	6	7	8
y	10	11	13	17	19	20	18

(Skizze!)

Vor Beginn der Rechnung ist die Anfertigung einer Skizze zu empfehlen.

6.97 Man bestimme die Flächeninhalte der Figuren, deren Begrenzungskurven durch die folgenden Gleichungen gegeben sind:

a) $y = \frac{1}{5}x + 2$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 5$.

b) $y = \frac{1}{10}2^x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 10$.

c) $y = x^2 - 5x + 4$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 6$.

d) $y = \cos x - \sin x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 2\pi$.

e) $y = x$; $y = x + \cos x$. Gesucht ist die eingeschlossene Fläche zwischen zwei benachbarten Schnittpunkten.

6.98 Welche Fläche schließen die Kurven mit den Gleichungen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ im Bereich zweier aufeinanderfolgender Schnittpunkte ein?

6.99 Man berechne den Inhalt der Fläche zwischen der x-Achse und der Kurve mit der Gleichung $y = \frac{1}{1+x^2}$.

Hinweis: Die Aufgabe führt auf das *uneigentliche Integral* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

6.100 Man bestimme den Inhalt der Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

6.101 Welche Fläche wird von den Kurven mit den Gleichungen $y = \sin^2 x$ und $y = \frac{1}{2}\tan x$ zwischen den zwei kleinsten nichtnegativen Schnittstellen eingeschlossen?

6.102 Die Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = \dfrac{x}{a + bx^2}$ ist in den Grenzen von $x_1 = a$ bis $x_2 = b$ zu berechnen.

6.103 Wie groß ist die von den Kurven mit den Gleichungen $25y^2 - 144x + 144 = 0$ und $9x^2 + 25y^2 - 90x = 0$ eingeschlossene Fläche?

6.104 In welchem Abstand von der y-Achse ist die Parallele zu ziehen, die mit der positiven x-Achse und der Kurve der Funktion $y = \tan x$ die Fläche begrenzt, die den Inhalt 1 hat?

6.105 Man berechne das Volumen des Körpers, der bei Rotation der Kurve mit der Gleichung $y = \dfrac{1}{\cosh x}$ $(x \in [-2, 3])$ um die x-Achse entsteht.

6.106 Man berechne das Volumen des Körpers, der bei Rotation der Kurve mit der Gleichung $y = \dfrac{1}{x^2}$ $(y \in [1, 9])$ um die y-Achse entsteht.

6.107 Man berechne das Volumen des Körpers, der durch Rotation der Fläche zwischen den Kurven mit den Gleichungen $y = \sqrt{8x}$, $(x - 5)^2 + y^2 = 9$, $y = 0$ und $x = 5$ um die x-Achse entsteht (Skizze!).

6.108 Man berechne das Volumen des Körpers, der durch Rotation der von den Kurven mit den Gleichungen $y = \sqrt{2(x + 5)}$, $x^2 + y^2 = 25$ und $y = 0$ eingeschlossenen Fläche um die x-Achse entsteht (Skizze!).

6.109 Die Ellipse mit der Gleichung $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ rotiere a) um die x-Achse, b) um die y-Achse. Man bestimme die Volumen der dabei entstehenden Körper.

6.110 Von den Kurven mit den Gleichungen $y = \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}$, $y = -\dfrac{1}{8}x + 1$ und $x = 4$ wird eine Fläche eingeschlossen. Man berechne
a) den Inhalt dieser Fläche,
b) das Volumen des Körpers, der bei Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht.

6.111 Die Kurven mit den Gleichungen $y = \sqrt{3(x + 1)}$, $y = 0$ und $x = 2$ schließen eine Fläche ein. Man berechne
a) den Inhalt dieser Fläche,
b) das Volumen des Körpers, der bei Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht.

6.112 Die Sinuskurve rotiere im Intervall $[0, \pi]$ um die x-Achse. Man berechne das Volumen und die Oberfläche des entstehenden Rotationskörpers.

6.113 Man berechne die Mantelfläche des Körpers, der durch Rotation des im 1. Quadranten liegenden Teils der Kurve mit der Gleichung $y = 2\sqrt{5 - x}$ um die x-Achse entsteht.

6.114 Man berechne die Mantelfläche des Körpers, der durch Rotation der Kurve mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$ um die x-Achse im Intervall $[0, \ln 2]$ erzeugt wird.

6.115 Die Fläche zwischen der Kurve mit der Gleichung $y = x^3$ und der x-Achse rotiere im Intervall $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ um die x-Achse. Man berechne die Mantelfläche des entstehenden Rotationskörpers.

6.116 Man bestimme die Länge des Bogens der Parabel mit der Gleichung $y^2 = ax$ in den Grenzen $x_1 = 0$; $x_2 = c$.

6.117 Man berechne die Bogenlänge der Parabel mit der Gleichung $y = x^2 - 2x - 15$ zwischen den beiden Nullstellen.

6.118 Man berechne die Bogenlänge eines Teils der Neilschen Parabel mit der Gleichung $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ und $x \in [0, 3]$.

6.119 Man berechne die Bogenlänge eines Viertelkreises mit dem Radius r.

6.120 Wie lang ist die Schleife der Kurve mit der Gleichung $y^2 = \frac{1}{36}x\,(12 - x)^2$? (Skizze!)

6.121 Man berechne die Bogenlänge der Kurve mit der Gleichung $y = \mathrm{e}^x$ im Intervall $[0, 1]$!

5.122 Man bestimme den Schwerpunkt der Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = x^3 - 8$ in den Grenzen $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$.

6.123 Man bestimme den Schwerpunkt der Fläche, die von der Kurve mit der Gleichung $y = x\,(3 - x)$ und der x-Achse begrenzt wird.

6.124 Man bestimme den Schwerpunkt der Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = \mathrm{e}^{-2x}$ innerhalb der Grenzen $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{1}{2}$.

6.125 Man bestimme den Schwerpunkt eines Halbkreises mit dem Radius r, ohne die Guldinsche Regel zu benutzen.

6.126 Man bestimme den Schwerpunkt der Fläche, die von den Kurven mit den Gleichungen $y = \sqrt{x}$ und $y = x^2$ eingeschlossen wird.

6.127 Man bestimme den Schwerpunkt der Fläche, die von den beiden Kurven mit den Gleichungen $y = x^2 - 4x - 2$ und $y = 4 - x^2$ eingeschlossen wird.

6.128 Man bestimme den Schwerpunkt des parabolischen Blattes, dessen Fläche von der Schleife der Kurve mit der Gleichung $y^2 = \frac{1}{25}x\,(4 - x)^2$ eingeschlossen wird. Man beachte die Symmetrie.

6.129 Man bestimme den Schwerpunkt des Rotationskörpers, der im Intervall $[0, 1]$ durch Rotation der Fläche unter der Hyperbel mit der Gleichung $y = \sqrt{1 + x^2}$ um die x-Achse erzeugt wird.

6.130 Bei der Rotation der Kurve mit der Gleichung $y = \ln x$ um die x-Achse entsteht im Intervall $1 \leq x \leq \mathrm{e}$ ein Körper. Welche Koordinaten hat sein Schwerpunkt?

6.131 Man bestimme den Schwerpunkt des Bogens mit der Gleichung $y = x^3$ im Intervall $[0, 4]$. Zur Berechnung der Bogenlänge verwende man die Simpsonsche Formel $(n = 8)$.

6.132 Man berechne die Oberfläche eines zylindrischen Kreisringes (Torus) nach GULDIN (Bild 6.39).

6.133 Man bestimme die Trägheitsmomente der Fläche unter der Kurve mit der Gleichung

$y = 4 - \frac{x^2}{2}$ im Intervall $[-2, 2]$ in bezug auf die Koordinatenachsen.

6.134 Man bestimme die Trägheitsmomente I_x, I_y und I_p der von der Kurve mit der Gleichung $y = 2\sqrt{5 - x}$ und den beiden Koordinatenachsen eingeschlossenen Fläche.

6.135 Man bestimme die Trägheitsmomente für die Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$ im Intervall $[0, 2]$ in bezug auf die Koordinatenachsen.

6.136 Man bestimme die Trägheitsmomente der Fläche unter der Kurve mit der Gleichung $y = \ln x$ in den Grenzen $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ in bezug auf die Koordinatenachsen.

6.137 Man bestimme die Flächenträgheitsmomente eines Dreiecks mit der Grundlinie g und der Höhe h in bezug auf die Grundlinie und eine parallel zur Grundlinie durch den Schwerpunkt gehende Achse.

Lösungen

1.1 a) Aussage, w b) Aussagenform c) Aussage, f
d) Aussagenform e) Aussagenform g) Aussage, w

1.2 a) f b) w c) f d) w e) w f) f g) f h) w i) f k) w

1.3 a) notwendig und hinreichend b) hinreichend c) notwendig

1.4 a)

p	q	$p \vee q$	$\overline{q}$	$(p \vee q) \wedge \overline{p}$
w	w	w	f	f
w	f	w	f	f
f	w	w	w	w
f	f	f	w	f

Die Aussagenfunktion ist nur wahr, wenn p falsch und q wahr ist.

b) p wahr, q falsch

1.5 a) stets falsch b) stets wahr

1.6

p	q	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	k)	l)	m)
w	w	f	f	w	w	f	f	w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	w	f	w	f	f	w	w	f	w	w
f	w	w	f	w	f	w	f	f	w	f	f	f	w
f	f	f	w	f	w	f	w	f	w	w	f	w	w

Äquivalent sind a) und e), b) und f), g) und k), h) und m).

1.7 a) 1. richtig für $n = 1$: $1 = \dfrac{1 \cdot (1+1)}{2}$

2. Annahme: richtig für n : $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

3. Behauptung:
richtig für $n+1$: $1 + 2 + \ldots + (n+1) = \dfrac{(n+1)\,((n+1)+1)}{2}$

4. Beweis: $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, Addition von $n+1$

$$1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

b) 1. richtig für $n = 1$: $1 = 2^1 - 1$

2. Annahme: richtig für n : $1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

3. Behauptung: richtig für $n + 1$: $1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n = 2^{n+1} - 1$

4. Beweis: $1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, Addition von $2^{(n+1)-1} = 2^n$

$$1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n = 2^n - 1 + 2^n = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

1.8 $A = \{17, 34, 51, 68, 85\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2\}$, $C = \{-3, 3\}$, $D = \emptyset$, $E = \{-4\}$

1.9 $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$

1.10 $Q \subset R \subset P \subset T \subset V$, $Q \subset U \subset P$, $U \subset D \subset V$

1.11 a) V b) P c) Q d) U

1.12 a) $\{a, b, c, d, e, f\}$, b) $\{a, c\}$, c) $\{b, d\}$, d) $\{c, d, e, f\}$, e) $\{a, b\}$,
f) $\{a, c, d, e, f, g\}$, g) $\{a\}$, h) $\{b\}$, i) A, k) $\emptyset$, l) $\{c\}$, m) $\{a\}$

1.13 a) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$, b) $\{6, 7, 8, 9, 10\}$, c) $\{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$, d) $\{6, 8, 10\}$

1.14 a) $(A \cap B) \setminus C$ b) $(B \cup C) \setminus A$ c) $A \cup (B \cap C)$

1.15 a) $\dfrac{a-2}{a+2}$ b) $\dfrac{x-1}{x+1}$ c) $\dfrac{3x+1}{2x+3}$

1.16 a) $-\dfrac{1}{a}$ b) $\dfrac{3y-x}{(x-y)y}$ c) $\dfrac{3a+2b}{2a(3a+b)}$

d) $\dfrac{4a^2}{27b^2} + \dfrac{b}{2a}$ e) $x^2 - xy + y^2$

1.17 a) $\dfrac{a}{b}$ b) $\dfrac{1}{x}$ c) $\dfrac{b-a}{b+a}$

d) $\dfrac{RR_1R_2}{R_1R_2 - RR_2 - RR_1}$ e) $\dfrac{a(15cd+1)}{30bcd + 2b - 3d}$

1.18 a) $3a + 2b$ b) $5a - 6b$ c) $m^2 + mn + n^2$

d) $2x^2 - 6xy + 3y^3z$

1.19 a) $1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{25}$ b) $-1 + 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7}$

c) $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ d) $1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!}$

1.20 a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n(n+1)}$ b $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \frac{(-1)^{k-1}}{2^k}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!}$

d) $a\displaystyle\sum_{k=1}^{4} q^k$

1.21 a) $6ab(a+b)$ b) $\dfrac{n}{m}$ c) x

d) xy e) $a^{-1}bc^{-1}$ f) $\dfrac{2}{x^7}$

g) $\frac{1}{a^n}$ h) $a^{3x+1} - a^{2x+2} + a^{x+3} - a^4$

1.22 a) $4\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ b) $a-b$ c) $\frac{a}{b}$

d) $\sqrt[12]{\frac{x}{y}}$ e) $3(x-1)$ f) $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

g) $x\sqrt{\frac{x}{y}} + x + \sqrt{xy}$ h) $a-b$ i) $\sqrt[3]{x}$

k) $\sqrt[4]{x}$ l) $\sqrt[3]{a}$

1.23 a) $\sqrt{3}$ b) $3-2\sqrt{2}$ c) $5+2\sqrt{6}$

d) $a-\sqrt{a^2-1}$ e) $4-\sqrt{3}+\sqrt{2}$ f) $\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}+ab$

1.24 a) $\log_{0,1} 0,001 = 3$ b) $\log_a b = n+1$ c) $\log_2 \frac{1}{64} = -6$

1.25 a) $8^{-1} = 0,125$ b) $64^{-\frac{1}{6}} = 0,5$ c) $9^4 = 6561$

1.26 a) $\frac{1}{3}\left(2\ln a + \ln\left(b^2-c^2\right) - \frac{1}{2}\ln d\right)$ b) $\frac{1}{2}\left(\lg\left(1+a^2\right) - \lg\left(1-a^2\right)\right)$

c) $\ln 2 - \ln 5 - \ln x - 2\ln(y-z)$

1.27 a) $\lg \sqrt[3]{\frac{5ac^2}{a^2-b^2}}$ b) $\ln\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{c}}}$ c) $\ln\left(T_2 \cdot \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right)$

1.28 a) 15 b) 990 c) 0 d) -21 e) $\frac{5}{81}$

1.29 a) $8k^3 - 2,4k^2 + 0,24k - 0,008$

b) $32 + 8x + 0,8x^2 + 0,04x^3 + 0,001x^4 + 0,00001x^5$

c) $16a^4 - 48a^3b^2 + 54a^2b^4 - 27ab^6 + \frac{81}{16}b^8$

1.30 a) $\{-2\}$ b) $\emptyset$ c) $\left\{\frac{b}{a}(b-a)\right\}$

d) $\left\{\frac{ab}{a-b}\right\}$ e) $\left\{\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right\}$ f) $\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\mathrm{j};\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\mathrm{j}\right\}$

g) $\{4\}$ h) $\{2c-a;-c\}$

1.31 a) $\{-7;3;5\}$ b) $\{4;5\mathrm{j};-5\mathrm{j}\}$ c) $\{2;-2;3\mathrm{j};-3\mathrm{j}\}$

d) $\{-11;-3;1;5\}$

1.32 a) $\{9\}$, b) $\{6\}$, c) $\left\{\frac{1}{2};1\right\}$, d) $\{-1\}$, e) $\emptyset$, f) $\{10\}$

1.33 a) $\{9\}$ b) $\{2\}$ c) $\{2,096\}$

d) $\{-0,885;0,885\}$ e) $\{-2,650\}$ f) $\{1,099\}$

g) $\{2,512\}$ h) $\{u^2v^3\}$ i) $\{e^3a^{-3}\}$

k) $\{18,436\}$ l) $\{5,026\}$ m) $\{1,468\}$

1.34 a) $V_1 = \dfrac{V_2}{e^{\frac{\omega}{mRT}}}$ b) $R = 2L\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \omega^2}$ c) $c = -\dfrac{1}{R \ln \frac{u}{u_0}}$

d) $D_0 = \dfrac{d}{1 - e^{-(\varphi + 0{,}16)}}$ e) $n = \dfrac{\ln \frac{p_1}{p_2}}{\ln \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1}}$ f) $t = \tau \ln \dfrac{y_E}{y_E - y}$

1.35 a) $\left\{1{,}166 + k \cdot \dfrac{2\pi}{3}; 1{,}976 + k \cdot \dfrac{2\pi}{3}\right\}$ b) $\{2{,}948 + k \cdot 2\pi; 3{,}684 + k \cdot 2\pi\}$

c) $\{0{,}927 + k \cdot 2\pi\}$ d) $\left\{0 + k \cdot 2\pi; \dfrac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi\right\}$

e) $\left\{\dfrac{\pi}{4} + k \cdot \dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right\}$ f) $\left\{0{,}983 + k\pi; \dfrac{3}{4}\pi + k\pi\right\}$

g) $\{0 + k\pi; 2{,}300 + k \cdot 2\pi; 3{,}983 + k \cdot 2\pi\}$

h) $\{1{,}369 + k \cdot 2\pi; 4{,}913 + k \cdot 2\pi\}$ i) $\left\{0 + k \cdot 2\pi; \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right\}$

1.36 $-14; -10; 10; 14$

1.37 a) 1 für $a > 0$, -1 für $a < 0$, für $a = 0$ nicht definiert

b) a für $a > 0$, 0 für $a \leq 0$

c) die größte der beiden Zahlen a und b

d) die kleinste der beiden Zahlen a und b

1.38 a) $[-2; 8)$ b) $[2; 4]$ c) $(0; 2)$ d) $(-4; 8) \setminus [2; 4]$

1.39 a) $\left(\dfrac{5}{7}; \infty\right)$ b) $[-5; -1]$ c) $\mathbb{R} \setminus [-7; -1]$

d) $\mathbb{R} \setminus [-2; 1]$ e) $\mathbb{R} \setminus [1; 5]$

1.40 a) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ b) $y = 3 + \sqrt{9 + 8x}$ c) $y = \ln(2 + x)$

d) $y = e^{\frac{x^2 - 1}{2}}$

1.41 a) $y = \dfrac{x^2}{9}$ b) $y = 1 - x$ c) $y = e^x + e^{-x}$

d) $y = \sqrt{1 - 2x}$

1.42 a) $X = [-4; 4]$, $Y = [0; 4]$ b $X = \mathbb{R} \setminus (-6; 6)$, $Y = \mathbb{R}$ c) $X = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{5}{3}\right\}$, $Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

d) $X = \mathbb{R} \setminus \{-2; 5\}$, $Y = \mathbb{R}$ e) $X = \left[\dfrac{1}{4}; \infty\right)$, $Y = (-\infty; 2)$ f) $X = (-3; \infty)$, $Y = \mathbb{R}$

g) $X = \mathbb{R}$ h) $X = [0; \infty)$

$Y = (2; \infty)$ Y=$[1; \infty)$

1.43 gerade Funktionen a), d), e); ungerade Funktionen: c), f), h).

1.44 a) $p = \pi$ b) $p = 2\pi$ c) $p = \frac{2}{3}\pi$

1.45 a) $y = \frac{1}{2x} - 4$ b) $y = 1 + 2x - x^2$ c) $y = 2 + \mathrm{e}^x$

d) $y = 2(\ln x - 1)$ e) $y = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$ f) $y = \frac{\ln x}{\ln 2}$

1.46 a) $y = 0,2x^3 - 1,2x^2 + 2x - 4,21$

b) $y = -2x^3 + 15x + 12$

1.47 a) 0,1838 rad ; 11,7011 gon b) 129,2593° ; 143,6215 gon

c) 115,524° , 2,0163 rad d) 0,2488 rad ; 15,8404 gon

1.48 a) 0,969 rad ; 2,173 rad b) 2,137 rad ; 5,279 rad

c) 1,554 rad ; 4,729 rad d) 0,024 rad ; 3,166 rad

e) 3,715 rad ; 5,710 rad f) π rad

1.49 a) $\sin x$ b) $\tan x$ c) $-\sin x$ d) $\cos x$ e) $-\cot x$

1.50 a) $\cos x$ b) 1 c) $\cos x$

1.51 a) $\sin x = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$, $\cos x = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$, $\cot x = n$

b) $\sin x = \frac{2\sqrt{a}}{1+a}$, $\tan x = \frac{2\sqrt{a}}{1-a}$, $\cot x = \frac{1-a}{2\sqrt{a}}$

1.52 a) 0 b) $\cos \alpha$ c) $\sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2}$ d) $\tan \frac{x+y}{2}$ e) $\cos 2x$

1.54 a) $b = 32,18$ cm, $c = 34,80$ cm, $\alpha = 22,394°$, $h = 12,26$ cm, $p = 5,05$ cm, $q = 29,75$ cm

b) $a = 254,09$ m, $\alpha = 53,332°$, $\beta = 36,668°$, $h = 151,74$ m, $p = 203,81$ m, $q = 112,97$ m

c) $a = 40,95$ m, $b = 56,02$ m, $c = 69,39$ m, $\beta = 53,834°$, $p = 24,16$ m, $q = 45,23$ m

d) $b = 362,85$ m, $c = 395,01$ m, $\alpha = 23,281°$, $\beta = 66,718°$, $h = 143,41$ m, $p = 61,71$ m

1.55 a) $x = -21,14$; $y = 9,31$ b) $x = 14,43$; $y = -53,27$ c) $x = -7,17$; $y = -4,99$

1.56 a) $r = 76,21$; $\alpha = 334,19°$ b) $r = 14,08$; $\alpha = 141,20°$

c) $r = 33,11$; $\alpha = 236,11°$

1.57 $\alpha = 2 \arcsin \frac{s}{2r} = 12,7587°$. $b - s = 83$ mm

1.58 $r = 451,67$ m, $\overset{\frown}{AB} = 339,98$ m, $\overline{SC} = 33,99$ m

1.59 $F_H = 800\,\text{N}, \quad F_N = 4042\,\text{N}$

1.60 a) $c = 32,79\,\text{m}, \ \beta = 39,3519°, \ \gamma = 6,2481°$

b) $\alpha = 36°19'00'', \ \gamma = 27°54'30''$

c) $\beta = 87,8722°$

d) keine Lösung

e) $b = 202,55\,\text{m}, \ \alpha = 147,0839°$

f) $\alpha = 33,9392°, \ \beta = 90,1594°, \ \gamma = 55,9014°$

g) $a = 87,64\,\text{m}, \ \beta = 38,9164°, \ \gamma = 85,7392°$

h) 2 Lösungen: $\beta_1 = 62°47'29'', \quad \gamma_1 = 78°05'31'', \quad c_1 = 717,14\,\text{m}$

$\beta_2 = 117°12'31'', \quad \gamma_2 = 23°40'29'', \quad c_2 = 294,30\,\text{m}$

i) $\beta = 46,7083°, \ a = 568,56\,\text{m}, \ c = 462,22\,\text{m}$

k) $\gamma = 121,9869°$

1.61 Das Krafteck ist ein Dreieck, die gesuchten Winkel sind die Außenwinkel des Dreiecks: 141,79°; 120,00°; 98,21°

1.62 $e = 143,06\,\text{m}$

1.63 $s_2 = 476,43\,\text{m}, \quad s_3 = 353,82\,\text{m}$

1.64 $\gamma = \arctan\dfrac{h}{s} = 17,2144°, \quad \overline{AB} = c = 87,887\,\text{m}$

$$\overline{AC} = b = \frac{c\sin(\beta+\gamma)}{\sin(\alpha-\beta)} = 210,667\,\text{m}, \quad x = b\sin\alpha = 127,01\,\text{m}$$

2.1 a) $(8 + x - y)\,\text{j}$ b) $5\sqrt{3}\,\text{j}$

2.2 a) $-ab$ b) $xy\,\text{j}$

2.3 a) $-2,5\,\text{j}$ b) 0

2.4 a) $1 - 3\,\text{j}$ b) $-4a + (u+v)\,\text{j}$

2.5 a) $-13 + 11\,\text{j}$ b) 93

2.6 a) $2 + \text{j}$ b) $\dfrac{\sqrt{5}}{6} + \dfrac{\text{j}}{6}$

c) $-\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}\,\text{j}$

2.7 a) 0 b) $-2\,\text{j}$

2.8 Bild L 2.1

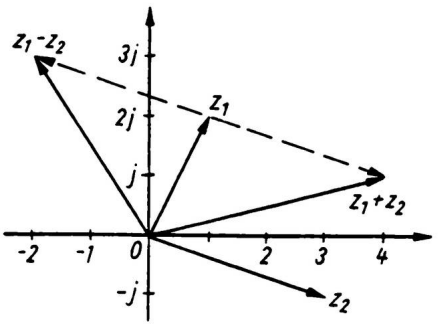


Bild L 2.1

2.9 a) $10\,(\cos 53,13° + \text{j}\sin 53,13°)$

b) $13\,(\cos 112,62° + \text{j}\sin 112,62°)$

c) $\sqrt{2}\,(\cos 225° + \text{j}\sin 225°)$

$= \sqrt{2}\,(\cos 3,927 + \text{j}\sin 3,927)$

d) $\cos 300° + \text{j}\sin 300°$

$= \cos 2,618 + \text{j}\sin 2,618$

2.10 a) $-\sqrt{3}+\mathrm{j}$ b) $\frac{9}{2}\sqrt{3}-\frac{9}{2}\mathrm{j}$ c) $-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{j}$ d) $3\sqrt{3}+3\mathrm{j}$

2.11 $z_1 = 0,75+\mathrm{j} = 1,25\,(\cos 53,13^\circ + \mathrm{j}\sin 53,13^\circ)$

$z_2 = 1,25-\mathrm{j} = 1,601\,(\cos 321,34^\circ + \mathrm{j}\sin 321,34^\circ)$

$z_1 \cdot z_2 = 2,001\,(\cos 14,47^\circ + \mathrm{j}\sin 14,47^\circ) = 1,938+0,500\,\mathrm{j}$

$z_1 : z_2 = 0,781\,(\cos 91,79^\circ + \mathrm{j}\sin 91,79^\circ) = -0,024+0,780\,\mathrm{j}$

2.12 $(\cos\varphi+\mathrm{j}\sin\varphi)^{-n} = \dfrac{1\cdot(\cos n\varphi-\mathrm{j}\sin n\varphi)}{(\cos n\varphi+\mathrm{j}\sin n\varphi)(\cos n\varphi-\mathrm{j}\sin n\varphi)}$

$= \dfrac{\cos n\varphi-\mathrm{j}\sin n\varphi}{\cos^2 n\varphi+\sin^2 n\varphi} = \cos n\varphi-\mathrm{j}\sin n\varphi$

2.13 a) $-2035-828,0\,\mathrm{j}$ b) $-72+124,7\,\mathrm{j}$ c) 1

2.14 a) $x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\mathrm{j}$ $x_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\mathrm{j}$ $x_2 = \mathrm{j}$

b) $x_0 = 2+3\,\mathrm{j}$ $x_1 = -2-3\,\mathrm{j}$

c) $x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\mathrm{j}$ $x_1 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}$ $x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\mathrm{j}$ $x_3 = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}$

2.15 a) $x_0 = \sqrt{3}+\sqrt{3}\,\mathrm{j}$ $x_1 = -\sqrt{3}+\sqrt{3}\,\mathrm{j}$ $x_2 = -\sqrt{3}-\sqrt{3}\,\mathrm{j}$ $x_3 = \sqrt{3}-\sqrt{3}\,\mathrm{j}$

b) $x_0 = 1,618+1,176\,\mathrm{j}$ $x_1 = -0,618+1,902\,\mathrm{j}$ $x_2 = -2$

$x_3 = -0,618-1,902\,\mathrm{j}$ $x_4 = 1,618-1,176\,\mathrm{j}$

c) $x_0 = 1,913$ $x_1 = -0,956+1,657\,\mathrm{j}$ $x_2 = -0,956-1,657\,\mathrm{j}$

2.16 a) $2,5\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot 4,914}$ b) $2,45\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$ c) $3,60\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot 5,695}$

2.17 a) $83\,(\cos 63,5^\circ + \mathrm{j}\sin 63,5^\circ) = 37,03+74,28\,\mathrm{j}$

b) $3,8\,(\cos 43,5^\circ + \mathrm{j}\sin 43,5^\circ) = 2,756+2,616\,\mathrm{j}$

c) $1,221\,(\cos 68,8^\circ + \mathrm{j}\sin 68,8^\circ) = 0,443+1,138\,\mathrm{j}$

2.18 a) $10^3\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot 1,211} = 352,0+936,0\,\mathrm{j}$

b) $3-\sqrt{3}\,\mathrm{j} = 12\,(\cos 330^\circ + \mathrm{j}\sin 330^\circ) = 12\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{11\pi}{6}}$

$x_0 = -1,063+2,920\,\mathrm{j}$ $x_1 = -1,997-2,380\,\mathrm{j}$ $x_2 = 3,060-0,540\,\mathrm{j}$

2.19 $z_1 = 1,581\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\cdot 0,3217}$ $z_2 = 3,041\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot 0,1651}$

a) $z_1+z_2 = 4,5$ $z = 1,055-0,1666\,\mathrm{j}$

b) $z_2 : z_1 = 1,9236\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot 0,4868}$ $x = 1,2436\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(0,1623+k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)}$

$x_0 = 1,2436\,(\cos 9,30^\circ + \mathrm{j}\sin 9,30^\circ) = 1,227+0,201\,\mathrm{j}$

$x_1 = 1,2436\,(\cos 129,30^\circ + \mathrm{j}\sin 129,30^\circ) = -0,788+0,962\,\mathrm{j}$

$x_2 = 1,2436\,(\cos 249,30^\circ + \mathrm{j}\sin 249,30^\circ) = -0,440-1,163\,\mathrm{j}$

2.20 a) $\ln(-2) = \ln\left(2 \cdot e^{j(\pi + k \cdot 2\pi)}\right) = 0,693 + 1,571\,j$

b) $z_2 = 3,041\,e^{j \cdot 0,1651} \qquad \ln z_2 = 1,112 + 0,165\,j$

c) $1 + z_2 = 4 + 0,5\,j = 4,0311\,e^{j \cdot 0,1244}$

$1 - z_2 = -2 - 0,5\,j = 2,0616\,e^{j \cdot 3,3866}$

$z = \ln \sqrt{1,9554\,e^{-j \cdot 3,2622}} = \ln\left(1,3984\,e^{-j(1,6311 + k \cdot \pi)}\right)$

$= 0,325 - (1,631 + k \cdot \pi)\,j \quad (k \in \mathbb{Z})$

2.21 a) Bild L 2.2 b) Bild L 2.3

2.22 a) Bild L 2.4 b) Bild L 2.5

2.23 a) Bild L 2.6 b) Bild L 2.7

2.24 a) Bild L 2.8 b) Bild L 2.9

2.25 a) Bild L 2.2 b) Bild L 2.3

2.26 a) Bild L 2.4 b) Bild L 2.5

2.27 a) $z^*(p) = 0,5\,e^{-jp}$ (Bild L 2.10)

b) $z^*(p) = 0,25\,e^{-j\left(p + \frac{\pi}{6}\right)}$ (Bild L 2.11)

2.28 Bild L 2.12

2.29 Bild L 2.13

2.30 a) Bild L 2.14 b) Bild L 2.15

Bilder:

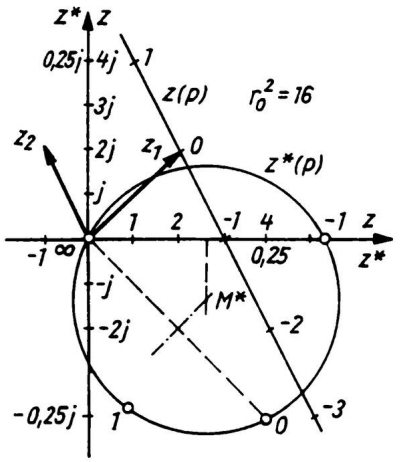


Bild L 2.2

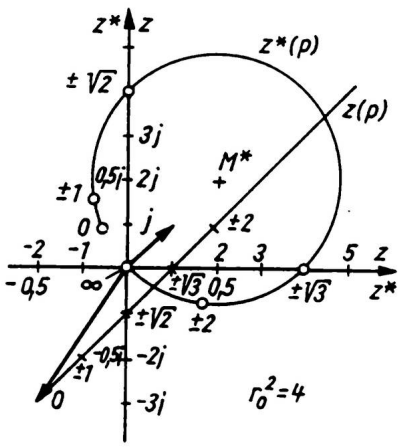


Bild L 2.3

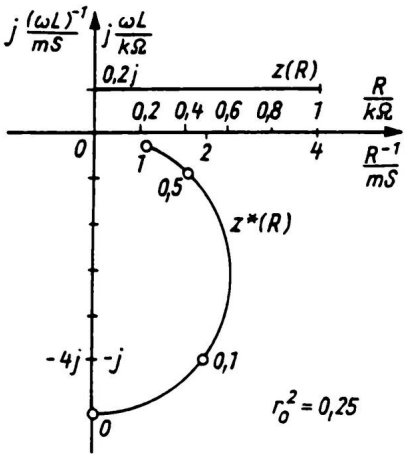


Bild L 2.4

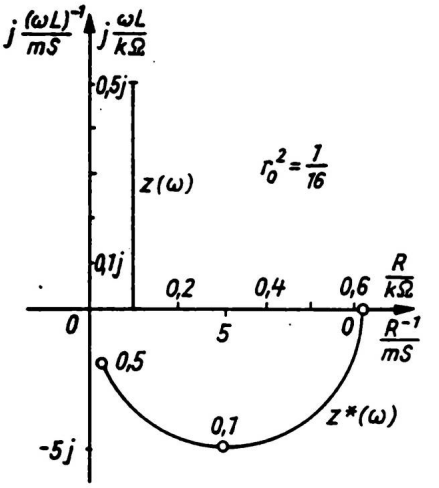


Bild L 2.5

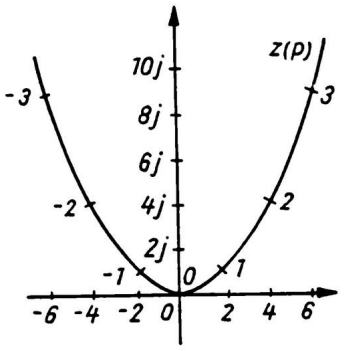


Bild L 2.6

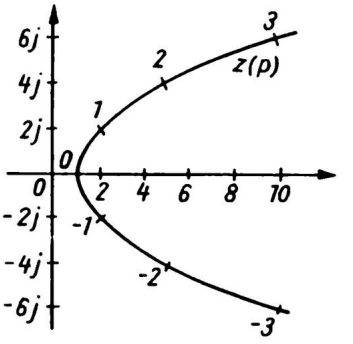


Bild L 2.7

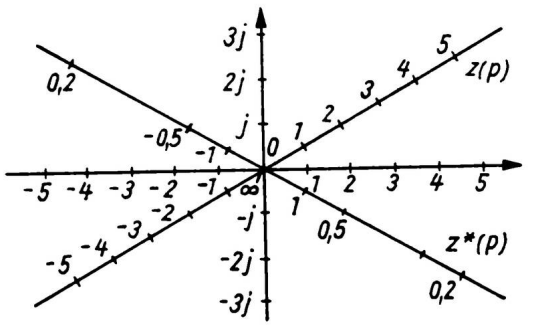


Bild L 2.8

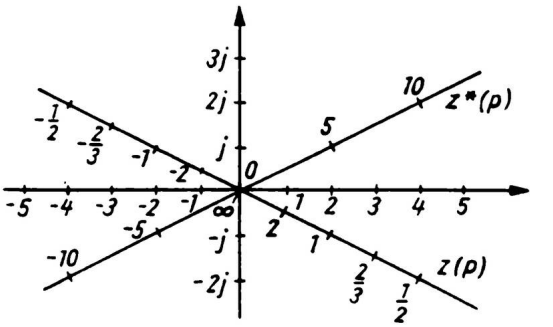


Bild L 2.9

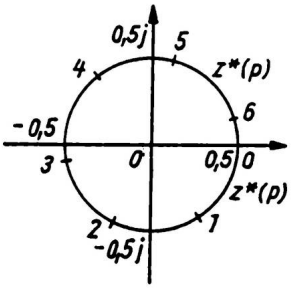


Bild L 2.10

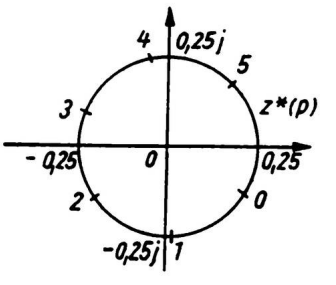


Bild L 2.11

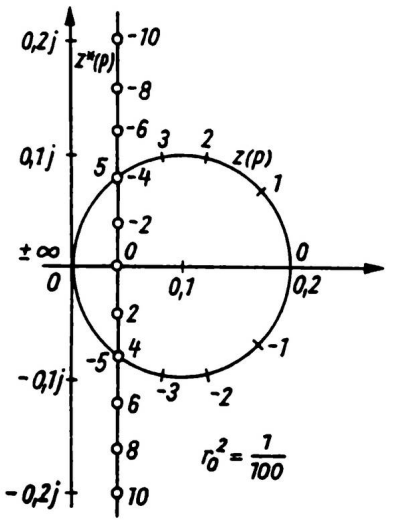


Bild L 2.12

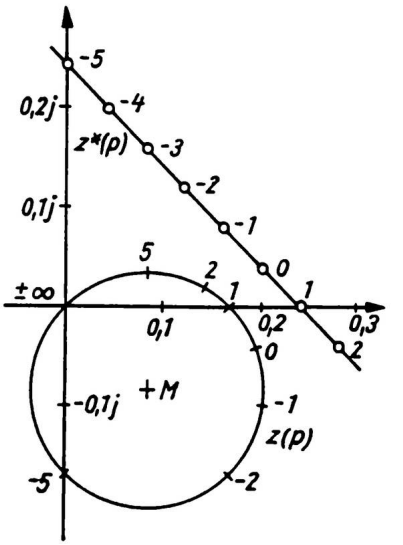


Bild L 2.13

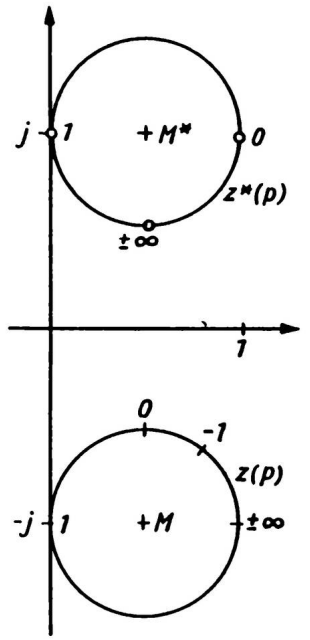


Bild L 2.14

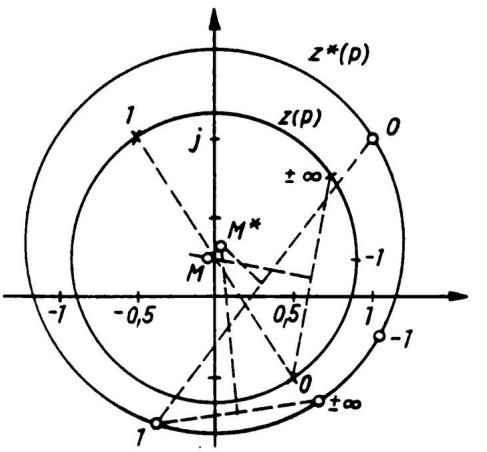


Bild L 2.15

3.1 a) $x'_A = -6\,,\ y'_A = -2$ b) $y'^2 - 4x' - 32 = 0$

3.2 $x'^2 + y'^2 - 25 = 0$. Die Kurve ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt in O. Daher wirkt sich die Drehung von K nach K' nicht auf die Form der Kurvengleichung aus.

3.3 $x'_1 = -9,40\,;\ y'_1 = 8,28$

3.4 $r_M = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$

3.5 $F_{s_1} = 25500\ \mathrm{N}\,,\quad F_{s_2} = 34800\ \mathrm{N}$

3.6 $s = a + \frac{1}{2}b = -c - \frac{1}{2}b$

3.7 $\boldsymbol{r}_S = \frac{1}{3}(\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{r}_C)$

3.8 a) $(14\ -6\ 0)^T$ b) $(9\ -9\ 9)^T$ c) $\boldsymbol{o}$

3.9 $r = |\boldsymbol{r}| = 7$, $\boldsymbol{e}_r = \frac{2}{7}\boldsymbol{i} - \frac{3}{7}\boldsymbol{j} + \frac{6}{7}\boldsymbol{k}$, $\alpha = 73,40°$, $\beta = 115,38°$, $\gamma = 31,00°$

3.10 $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \sqrt{2}\boldsymbol{k}$

3.11 a) $D = 25$, die Vektoren sind linear unabhängig.

b) $D = 0$, die Vektoren sind linear abhängig.

3.12 Wegen $D = 0$ sind $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}$ linear abhängig. Aus dem Ansatz $\boldsymbol{t} = \lambda\boldsymbol{r} + \mu\boldsymbol{s}$ folgt $\lambda = -1,5$, $\mu = -0,9$, $\boldsymbol{t} = -1,5\boldsymbol{r} - 0,9\boldsymbol{s}$

3.13 a) $D \neq 0$, d.h. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ linear unabhängig,

Ansatz: $\boldsymbol{s} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} + \mu\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{s} = \frac{1}{52}(23\boldsymbol{a} + 61\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})$

b) $D = 0$, d.h. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ linear abhängig, Zerlegung nicht möglich.

3.14 a) $\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2 = -4$, b) $\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2 = 0$; $\boldsymbol{r}_1 \perp \boldsymbol{r}_2$, c) $\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2 = -28$; $\boldsymbol{r}_1 \parallel \boldsymbol{r}_2$ $(\boldsymbol{r}_2 = -2\boldsymbol{r}_1)$

3.15 a) $\varphi = 63°19'$ b) $\varphi = 96°08'$

3.16 $W = 1430\,\mathrm{J}$

3.17 $\boldsymbol{e}_1^T = \frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|} = \frac{1}{\sqrt{174}}(10\ 7\ -5)$, $\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1$

3.18 $A = \frac{1}{2}|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$

3.19 a^2b^2

3.20 a) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\frac{3}{2}\boldsymbol{i} - \frac{5}{2}\boldsymbol{j} - \frac{17}{4}\boldsymbol{k}$ b) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$

3.21 $A = \frac{1}{2}|(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \times (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1)| = 123,5\,\mathrm{FE}$

3.22 94 VE

3.23 Das Volumen eines Tetraeders ist ein Sechstel des Spatvolumens.

$V = \frac{1}{6}(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3) \cdot \boldsymbol{r}_4 = \frac{32}{3}$

3.24 $6\boldsymbol{i} + 9\boldsymbol{j} + 18\boldsymbol{k}$

3.25 a) $\boldsymbol{b} = \left(\frac{7}{9}\boldsymbol{i} - \frac{49}{18}\boldsymbol{j} + \frac{7}{18}\boldsymbol{k}\right) + \left(\frac{20}{9}\boldsymbol{i} + \frac{13}{18}\boldsymbol{j} + \frac{11}{18}\boldsymbol{k}\right)$

b) $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}$. Parallelkomponente ist $\boldsymbol{o}$
Normalkomponente ist $\boldsymbol{b}$

3.26 $P_1 \in k_1$, $P_1 \in k_3$, $P_2 \in k_2$, $P_2 \in k_3$, $P_3 \in k_2$, $P_3 \in k_4$, $P_4 \in k_1$, $P_4 \in k_4$

3.27 a) $P_1(-5;2)$ b) $P_1(6;0)$, $P_2(2;4)$ c) kein Schnittpunkt

3.28 a) $x_1 = 3$ b) $x_{1,2} = \pm 10$ c) kein Schnittpunkt

3.29 a) $\frac{1}{2}x^2 + x - y - \frac{5}{2} = 0$

b) $2x - y + 1 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$

d) $4x^2 - 9y^2 + 36 = 0$, BildL3.1

3.30 Die Kurve ist eine nach unten geöffnete Parabel.

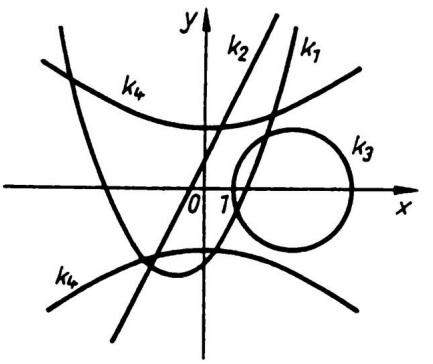


Bild L3.1

3.31 a) $r = \frac{8\cot^2\varphi}{\sin\varphi}$ b) $r = \frac{1}{2\cos\varphi - \sin\varphi}$ c) $r = \sqrt{\frac{1}{\cos 2\varphi}}$

3.32 a) $y^2 - 4x - 4 = 0$ b) $x + y - 4 = 0$ c) $x^2 + y^2 + x - 4y = 0$

3.33 a) $\overline{AB} = 7,81$; $\alpha = 129,8°$; $M(5,5;4)$

b) $\overline{P_1P_2} = 5,44$; $\alpha = 54,0°$; $M(-4,10;0,9)$

c) $\overline{RQ} = 6,94$; $\alpha = 0°$; $M(-1,07;-2,18)$

d) $\overline{MN} = 9,46$; $\alpha = 40,7°$; $M(9,22;3,09)$

3.34 Es ist das Gleichungssystem
$(x+4)^2 + (y-2)^2 = 169$
$(x-15)^2 + (y+17)^2 = 625$
zu lösen. Zwei Lösungen: $P_1(8;7)$, $P_2(-9;-10)$

3.35 $y = 0,437x$

3.36 a) $y = 1,73x + 7,93$ b) $y = -1,48 + 2,06$

c) $y = 0,8$ d) $x = 3,48$

3.37 a) $y = -\frac{5}{8}x + \frac{11}{4}$ b) $x = 1,7$

3.38 $g_1: y = -\frac{1}{2}x + 2$ $g_2: y = \frac{2}{3}x - 2$

$g_3: y = 2$ $g_4: y = 3x$

3.39 a) $S(4;-2)$, $\delta = 63,43°$ bzw. $\delta = 116,57°$

b) $S(2,28;5,52)$, $\delta = 90°$

c) kein Schnittpunkt, da $g_1 \parallel g_2$, $\delta = 0°$

d) für $t = \frac{5}{2}$ bzw. $s = \frac{1}{3}$ folgt $S(5,5;6)$, $\delta = 55,49°$ bzw. $\delta = 124,51°$

3.40 a) $y = \frac{1}{3}x + 10,4$ b) $y = -3x + 26,4$

3.41 a) $M(6;-3)$, $r = 12$ b) $M(-2;0)$, $r = 2$

c) $M\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{6}\right)$, $r=\frac{5}{6}\mathrm{j}$, keine reelle Kurve

d) $M\left(-1;\frac{1}{2}\right)$, $r=0$, Punkt.

3.42 $\left(x+\frac{7}{4}\right)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{169}{4}$

3.43 $(x-2,5)^2+(y+0,4)^2=6,25$

3.44 $(x-3)^2+(y-4)^2=169$

3.45 a) $P_1(8;6)$, $P_2(6;-8)$: Die Gerade schneidet den Kreis.

b) $P_1(-5;7)=P_2$: Die Gerade ist Tangente des Kreises.

c) $P_1(3+3\mathrm{j};-8+\mathrm{j})$, $P_2(3-3\mathrm{j};-8-\mathrm{j})$: Die Gerade schneidet den Kreis nicht.

3.46 $m_1: y=\frac{23}{7}x-\frac{36}{7}$, $m_2: y=8$, $m_3: y=-x+12$

Umkreis: $(x-4)^2+(y-8)^2=289$

3.47 a) $y^2=4x$ b) $y^2=-10x$ c) $y^2=0,733x$

3.48 a) $(y+5)^2=8(x+2)$ b) $(x-3)^2=-y$

3.49 a) $S(-2;3)$, $F(1;3)$ b) $S\left(\frac{4}{3};4\right)$, $F\left(\frac{4}{3};\frac{23}{6}\right)$

3.50 a) $x^2=-\frac{l^2}{4(h+a)}(y-h)$

b) $a=h\Longrightarrow x^2=-\frac{l^2}{8h}(y-h)$, $y_D=0\Longrightarrow x_D=\frac{1}{4}\sqrt{2}$,
wegen $\overline{CO}=\overline{OD}=x_D$ folgt $\overline{CD}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$

c) $\overline{CD}=29,4\,\mathrm{m}$, $h_1=h_4=3,22\,\mathrm{m}$, $h_2=h_3=5,31\,\mathrm{m}$

3.51 a) $S(-1;3)$, $F(2;3)$ b) $S(-4;-6)$, $F(-4;7,25)$

3.52 a) $\frac{x^2}{121}+\frac{y^2}{57}=1$ b) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$ c) $\frac{x^2}{256}+\frac{y^2}{112}=1$

3.53 a) $a=10$, $b=6$, $F_1(-8;0)$, $F_2(8;0)$, $\varepsilon=0,8$

b) $a=2,9$, $b=2,1$, $F_1(0;2)$, $F_2(0;-2)$, $\varepsilon=0,69$

c) $a=\sqrt{43}$, $b=3\sqrt{3}$, $F_1(-4;0)$, $\varepsilon=0,61$

3.54 $a=10$, $b=6$

3.55 a) $P_1(4;1)$; $P_2(2;2)$ b) kein Schnittpunkt

c) $P_0\left(4\sqrt{3};2\sqrt{2}\right)$, g ist Tangente.

3.56 $\varepsilon=\frac{\sqrt{11}}{6}=0,553$, $\overline{P_1F_1}=4,01$, $\overline{P_1F_2}=7,99$, $\overline{P_2F_1}=8,65$, $\overline{P_2F_2}=3,35$

3.57 $\varepsilon=\frac{1}{59}=0,017$

3.58 $x = (m+n)\cos\omega t$
$y = (m-n)\sin\omega t$; Ellipse mit $a = m+n$, $b = m-n$

3.59 a) $a = 6$, $b = 12$, $F_1\left(-6\sqrt{5};0\right)$, $F_2\left(6\sqrt{5};0\right)$, $y = \pm 2x$

b) $a = 15$, $b = 8$, $F_1(0;17)$, $F_2(0;-17)$, $y = \pm\frac{15}{8}x$

c) $a = b = 14$, $F_1\left(-14\sqrt{2};0\right)$, $F_2\left(14\sqrt{2};0\right)$, $y = \pm x$

3.60 $2\alpha = 67°23'$

3.61 a) $P_1(3,44;-1,12)$, $P_2(5,56;3,12)$

b) $P_1(3,56;1,28)$, $P_2(-6,14;-3,57)$

c) kein Schnittpunkt

d) Tangente: $P_0\left(-5;\frac{8}{3}\right)$

e) $P_1(-4,35;-2,1)$

3.62 $x = \pm 4\sqrt{\frac{26}{17}} = \pm 4,95$, $y = \pm\frac{18}{\sqrt{17}} = \pm 4,36$

3.63 $\overline{P_1P_2} = 19,80$

3.64 $r = 2i+3k+t(3i-3j+9k)$, $A \in g$, $B \notin g$

3.65 $r = -2i+3j+5k+t(3i-j+2k)$
$t = -1$: $P_1(-5;4;3)$, $t = 0$: $P_2(-2;3;5)$, $t = 3$: $P_3(7;0;11)$

3.66 $d = 4,68$

3.67 $g_1 \cap g_2 = S(6;8;12)$, $g_1 \cap g_3 = S(3;4;6)$, g_2, g_3 windschief

3.68 Es muß $r_1 - r_2$ orthogonal zu $u = i+j+k$ sein: $(r_1 - r_2)\cdot u = 0$
und P_1 auf g_1 liegen. Daraus folgt $t_1 = 0$, $P_1(0;0;0)$.
g_2: $r = 2k + s(i+j-k)$, $\overline{P_1P_2} = \sqrt{3}$

3.69 $S\left(\frac{11}{3};\frac{1}{3};3\right)$

3.70 $\varphi = 54,16°$

3.71 $\sphericalangle(g_1,g_2) = 43,37°$, $\sphericalangle(g_1,g_3) = 39,81°$, $\sphericalangle(g_2,g_3) = 13,26°$

3.72 $d = 3,67$

3.73 $r = \begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$, $P_4 \notin E$, $P_5 \in E$

3.74 $3x - 5y + 3z - 3 = 0$

3.75 $4x - 6y + 5z - 2 = 0$

3.76 $2x + 4y + 3z - 9 = 0$

3.77 a) $r = -i - j + \frac{41}{12}k + t(72i + 108j - 69k)$

b) $r = -38i - 19j + t(13i + 7j + k)$

3.78 g_1: $r = -i - j + k + t(i + 6j + 3k)$
g_2: $r = 3i + 3j - 3k + s(5j + k)$ $d = 5,8$

3.79 $d = \frac{10}{7}$ **3.80** $d = -3,02$ **3.81** $P_0\,(7;1;8)$, $\varphi = 22,89°$

3.82 $P_0\,(-366;-242;-13)$

3.83 a) $\varphi = 48,70°$ b) $\varphi = 74,15°$

3.84 a) Lotfußpunkt $P_0\left(\frac{36}{49};\frac{72}{49};\frac{24}{49}\right)$, $\overline{OP_0} = 1,71$

b) Schnittpunkt $D\,(1,66;0,43;0,55)$, $\alpha = 79,83°$

c) $E_2:\ 3x + 6y + 2z - 41 = 0$

4.1 a) $x_1 = 1$, $x_2 = 10$, $x_3 = -19$

b) $x = -5z - 6$, $y = -56z - 58$, z frei wählbar

c) $x_1 = u$, $x_2 = -\frac{3}{2}u - \frac{21}{2}v + 12$, $x_3 = v$, $x_4 = 2v - 4$
u, v frei wählbar

d) $x_1 = 15$, $x_2 = -3$, $x_3 = -5$

e) $x_1 = 2$, $x_2 = -5$

f) $x_1 = -0,638$, $x_2 = 0,136$, $x_3 = 0,596$

g) $x_1 = -0,55$, $x_2 = 0,92$, $x_3 = 0,96$, $x_4 = 0,47$,
$x_5 = -0,45$, $x_6 = 0,53$

h) x_1 beliebig wählbar, $x_2 = -5x_1 + 11$, $x_3 = 9x_1 - 21$

i) $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -3$

4.2 a) linear abhängig: $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + 4\boldsymbol{a}_3 + 3\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{o}$

b) linear unabhängig

c) linear abhängig: $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3 + 3\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{o}$

4.3 a) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 0 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -8 & 19 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 22 & 15 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{Y}^T \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{Y}^T \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 58 \\ 34 \\ 32 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 11 & -4 \\ 4 & -8 & 3 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{Y}^T \cdot \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 29 & 20 \\ 20 & 14 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{X}^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{X} = (6) \qquad \boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{Y}^T = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 8 & 13 & 18 \\ 11 & 18 & 25 \end{pmatrix}$$

c) $\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,6 \\ 0,4 & -0,2 & 0,2 \\ 0,8 & -0,4 & -0,6 \end{pmatrix} \qquad \left(\boldsymbol{Y}^T \boldsymbol{Y}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{14}{6} & -\frac{20}{6} \\ -\frac{20}{6} & \frac{29}{6} \end{pmatrix}$

4.4 a) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}$

b) $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$. Daraus folgt $\boldsymbol{A}^{2n+1} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^{2n} = \boldsymbol{E}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}$.
$\boldsymbol{A}$ ist nicht orthogonal.

4.5 $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -\mathrm{j} & 0 \\ 0 & -\mathrm{j} \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{Y}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -15 & 6 \\ -1 & -8 & 3,2 \\ -1 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

4.6 $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

4.7 a) $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A} + 8\boldsymbol{E})^{-1}\left(\boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{C}\right)$ b) $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^2 + \boldsymbol{E}\right)^{-1}$

c) $\boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{A}^{-1}$ d) $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E}$

4.8 a) 13,6009 b) r c) $\frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{j}\sqrt{3}\right)$

d) $3 + 7\mathrm{j}$ e) 0 f) -3584

4.9 a) $\lambda = 1$ b) $t = 0$

4.10 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & \mathrm{j} \\ -1 & -2\mathrm{j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \mathrm{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$

4.11 a) Die Matrix $\boldsymbol{A}$ des Systems ist regulär; das System hat die eindeutige Lösung

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Die Matrix $\boldsymbol{A}$ des Systems ist singulär; die allgemeine Lösung lautet

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 250 \\ -46 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.12 $\operatorname{cond}(\boldsymbol{A}) \approx 199\,998$

a) $x_1 = 1,\ x_2 = 5$ b) $x_1 = 2,5,\ x_2 = -0,097$ c) $x_1 = 1,679,\ x_2 = 2,717$

4.13 a) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 7$ $\quad \boldsymbol{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 2$ $\quad \boldsymbol{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = 1,\ \lambda_4 = -1$

$$\boldsymbol{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_3 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_4 = c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5.1 a) $4,\ 3\frac{1}{2},\ 3\frac{1}{3},\ 3\frac{1}{4},\ 3\frac{1}{5}$ b) $-1,\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{5},\ \frac{1}{7},\ -\frac{1}{9}$

c) $2,\ 2,25,\ 2,37,\ 2,44,\ 2,49$ d) $1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1$

e) $\frac{3}{5},\ \frac{5}{5^3},\ \frac{7}{5^5},\ \frac{9}{5^7},\ \frac{11}{5^9}$ f) $-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{6}{3^3},\ \frac{4!}{4^4},\ -\frac{5!}{5^5}$

5.2 a) $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ b) $\dfrac{2n}{2n+1}$ c) $\dfrac{1}{2n(2n+1)}$ d) $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

5.3 a) streng monoton steigend b) streng monoton steigend

c) streng monoton fallend d) streng monoton fallend

e) streng monoton fallend

5.4 a) $x_{10} = 37,\ s_{10} = 190$ b) $x_{10} = 20,\ s_{10} = 110$

c) $x_{10} = 140,\ s_{10} = 725$ d) $x_{10} = \dfrac{1}{2^9},\ s_{10} = 1,998$

e) $x_{10} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{10} = 0,056,\ s_{10} = 2,83$

5.5 a) $n = 9$ b) $n = 48$

5.9 a) $N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$, $N(0,01) > 100$ b) $N(\varepsilon) > \frac{\ln \varepsilon}{-\ln 3}$, $N(0,01) > 4,19$

c) $N(\varepsilon) > \frac{6+\varepsilon}{4\varepsilon}$, $N(0,01) > 150,25$ d) $N(\varepsilon) > \frac{4}{\sqrt{\varepsilon}}$, $N(0,01) > 40$

e) $N(\varepsilon) > \sqrt{\frac{4-2\varepsilon}{\varepsilon}}$, $N(0,01) > 19,95$

f) $N(\varepsilon) > \frac{\ln 2}{\ln(\varepsilon+1)}$, $N(0,01) > 69,66$

5.10 a) $g = \frac{5}{2}$, $\left|\frac{5}{2} - \frac{5n}{2n-1}\right| < \varepsilon, n \geq N(\varepsilon) > \frac{5+2\varepsilon}{4\varepsilon}$

b) $g = 1$, $\left|1 - \frac{n^2}{n^2+1}\right| < \varepsilon, n \geq N(\varepsilon) > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$

c) $g = 1$, $\left|1 - \frac{(n-5)^2}{n^2+1}\right| < \varepsilon, n \geq N(\varepsilon) > \frac{5+\sqrt{25-\varepsilon^2-24\varepsilon}}{\varepsilon}$

5.11 a) $s = 10$ b) $s = 2,25$

5.12 $s = 6$, $s_n = 3 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \geq 5,94$, Abbruch nach dem 6. Glied.

5.13 a) $1,\overline{2} = 1\frac{2}{9}$ b) $3\frac{4}{90}$ c) $2\frac{27}{1100}$

5.14 a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x^2+1} = 0$ b) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2+3x+2} = -1$

c) $\lim\limits_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = 6$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-x}{1-\sqrt{x+1}} = 2$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x \sin x}{x} = 1$

5.15 a) $g^+ = g^- = 1$ b) $g^- = -1$, $g^+ = 1$ c) $g^+ = 0$, $g^- = \infty$

d) $g^+ = g^- = 0$ e) $g^+ = 0$, $g^- = \frac{1}{2}$

f) $g^+ = \infty$, $g^- = \infty$, Polstelle gerader Ordnung

5.16 a) $g = 0$ b) $g = \frac{2}{3}$ c) $g = \infty$

d) $g = 0$ e) $g = 0$ f) $g = 0$

5.17 a) stetig b) stetig

c) $g^+ = 2$, $g^- = 0$; Sprung, nicht hebbare Lücke

5.18 $g^+ = g^- = f(1) = 1$, stetig

5.19 a) $g = 2$, hebbare Lücke b) $g = 2$, hebbare Lücke

c) $g^+ = \infty$, $g^- = -\infty$, Polstelle ungerader Ordnung

d) $g^+ = \infty$, $g^- = \infty$, Polstelle gerader Ordnung

5.20 a) $g^+ = g^- = f(0) = 0$, stetig b) $g^+ = g^- = f(-2) = 0$, stetig

c) $g^+ = g^- = f(1) = 0$, stetig

5.21 a) $g^+ = 0$, $g^- = 0$, hebbare Lücke

b) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}$, $g^+ = 1$, $g^- = 1$, hebbare Lücke

5.22 a) $f'(x) = x^2 - \dfrac{1}{2}$ b) $f'(x) = 4ax^3 - 2bx$

c) $f'(x) = (x-2)^2\,(8x^5 - 10x^4 - 3)$

d) $f'(x) = 8x^3$ e) $g'(t) = 6t + 2$

5.23 a) Tangente: $y = 3x - 2$ Normale: $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}$

b) Tangenten: $y = 12x - 16$, $y = 12x + 16$

Berührpunkte: $B_1\,(2;8)$, $B_2\,(-2;-8)$

5.24 $P_3(x) = 2x^3 - 2x^2$

5.25 a) $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$, $f'(-2) = -\dfrac{2}{9}$

b) $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 4x + 2}{(-x+2)^2}$, $f'(-2) = \dfrac{-10}{16}$

c) $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 1}{(x^2+1)^2}$, $f'(-2) = \dfrac{-3}{25}$

d) $f'(x) = \dfrac{-8x + 20}{(4x+2)^3}$, $f'(-2) = -\dfrac{1}{6}$

5.26 a) $f'(x) = \dfrac{a(d-b)}{(ax+d)^2}$ b) $g'(t) = \dfrac{8t}{(1+t^2)^2}$ c) $f'(x) = \dfrac{ax\,(x+2a)}{(x+a)^2}$

5.27 a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ b) $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ c) $f'(x) = \dfrac{-1}{3x\sqrt[3]{x}}$

d) $f'(x) = \dfrac{-1}{2\,(2x+2)\sqrt[4]{2x+2}}$ e) $f'(x) = \dfrac{-(6x+1)}{5\,(3x^2+x+1)\sqrt[5]{3x^2+x+1}}$

f) $f'(x) = \dfrac{-\sqrt{x}}{(x-\sqrt{x})^2}$ g) $f'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{x}\,(a-\sqrt{x})^2}$

h) $f'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt[4]{(ax+b)^2}}$ i) $f'(x) = 2a\,(ax+b)$

j) $f'(x) = \dfrac{16x}{3\sqrt[3]{4x^2+1}}$ k) $f'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{x\,(a+x)}\cdot(a+x)}$

5.28

5.17 a) $f'(2+0) = 1$, $f'(2-0) = -1$, nicht differenzierbar

b) $f'(-2) = 0$, differenzierbar c) für $x_0 = 0$ nicht definiert

5.18 $f'(1-0)=1$, $f'(1+0)=-4$, nicht differenzierbar

5.19 a) Lücke: nicht definiert b) Lücke: nicht definiert

c) Polstelle d) Polstelle

5.20 a) $f'(+0)=\infty$, $f'(-0)=-\infty$, nicht differenzierbar

b) $f'(-2+0)=\infty$, $f'(-2-0)=-\infty$, nicht differenzierbar

c) $f'(1+0)=1$, $f'(1-0)=-1$, nicht differenzierbar

5.29 a) $f'(x)=\cos x-\sin x$ b) $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\sin^2 x}$

c) $f'(x)=2\sin x\cdot\cos x$ d) $f'(x)=-3\sin(3x+1)$

e) $f'(x)=-6(3x+1)\sin(3x+1)^2$ f) $f'(x)=-6\cos(3x+1)\cdot\sin(3x+1)$

g) $f'(x)=\dfrac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}$ h) $f'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}$

5.30 a) $f'(x)=\dfrac{1+2\cos(2x)}{2\sqrt{x+\sin(2x)}}$ b) $f'(x)=\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

c) $f'(x)=\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$ d) $f'(x)=\dfrac{\tan x}{2\sqrt{\cos x}}$

e) $f'(x)=-\dfrac{1+\tan^2 x}{(1+\tan x)^2}$ f) $g'(t)=\omega\cos(\omega t+\varphi)$

5.31 a) $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ b) $f'(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

c) $f'(x)=\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ d) $f'(x)=\dfrac{b}{b^2+x^2}$

e) $f'(x)=\dfrac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ f) $f'(x)=2x\arccos\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

5.32 a) $f'(x)=\dfrac{1}{x+2}$ b) $f'(x)=\dfrac{2}{x+2}$ c) $f'(x)=\dfrac{2\ln(x+2)}{x+2}$

5.33 a) $f'(x)=\dfrac{4}{4x+5}\cdot\log_a \mathrm{e}$ b) $f'(x)=\dfrac{12x}{3x^2+1}\cdot\log_a \mathrm{e}$

c) $f'(x)=\dfrac{n}{x}\log_a \mathrm{e}$

5.34 a) $f'(x)=\dfrac{1+\tan^2 x}{\tan x}$ b) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

5.35 a) $f'(x)=\cot x$ b) $f'(x)=-\tan x$ c) $f'(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

5.36 a) $f'(x)=x^{\cos x}\left(-\sin x\ln x+\dfrac{\cos x}{x}\right)$

b) $f'(x)=x^{x\sin x}\left((\sin x+x\cos x)\ln x+\sin x\right)$

c) $f'(x)=2x^{\ln x}\cdot\dfrac{\ln x}{x}$

5.37 a) $f'(x) = 3\,e^{3x}$ b) $f'(x) = -2x\,e^{-x^2}$

c) $f'(x) = -2\sin(2x)\,e^{\cos(2x)}$

5.38 a) $f'(x) = \dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2}$ b) $f'(x) = \dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{-e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

5.39 a) $f'(x) = 2x\,e^{-x^2}(1-x^2)$ b) $f'(x) = \dfrac{2e^{x^2}(x^2-1)}{x^3}$

c) $f'(x) = \dfrac{2x\,e^{-x^2}}{(1+e^{-x^2})^2}$

5.40 a) $f'(x) = -2x \cdot \ln a \cdot 2^{-x^2}$ b) $f'(x) = \dfrac{\ln a \cdot 2^{\frac{1}{x}}}{x^2\left(1+2^{\frac{1}{x}}\right)^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{2 \cdot \ln a \cdot 2^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$

5.42 a) $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sinh^2\frac{x}{2}}$ b) $f'(x) = 2\coth(2x)$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{\sinh(2x)\cdot\cosh(2x)}$ d) $f'(x) = (\sinh x)\,e^{\cosh x}$

5.43 a) $f'(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$ b) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln\frac{1}{x}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)$

c) $f'(x) = \dfrac{\cos x}{2}\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$ d) $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{2(1+x^2)^2}\ln\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$

5.44 a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-3}{2x+2} = -\dfrac{1}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x-5}{4x^3-2} = \dfrac{1}{4}$, Regel von DE L'HOSPITAL mehrfach angewandt

5.45 a) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{-\sin x}{\cos x} = 0$ b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{1-\cos x} = \ldots = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{6x}{\cos x} = 0$ d) $\lim\limits_{x\to0+}\ln x\cdot\tan x = \lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln x}{\cot x} = 0$

5.46 a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^x} = 0$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{e^x} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 0$ e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+x} = 1$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$ g) $\lim\limits_{x\to+0}x^x = \lim\limits_{x\to+0}\left(e^{\ln x}\right)^x = \lim\limits_{x\to+0}e^{x\ln x} = 1$

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \mathrm{e}$

5.47 $x_{N_1} = 1\,,\ x_{N_2} = -2$

$T\left(-\frac{1}{2}; -4,5\right)$

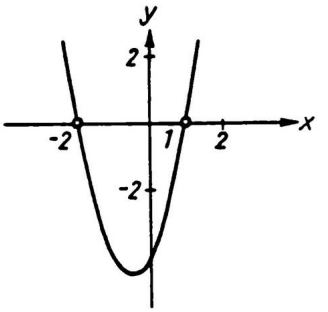


Bild L5.1

5.48

Scheitelpunkt: $S\,(1;2)$

$P_1\,(3;6)$

Tangente T_1: $y = 4x - 6$

Normale N_1: $y = -\frac{1}{4}x + 6,75$

$P_2\left(-\frac{5}{4}; 7\frac{1}{16}\right)$

Tangente T_2: $y = -4,5x + 1\frac{7}{16}$

$P_3\left(\frac{7}{8}; -2,5\right)$

$\gamma = 26,57°$

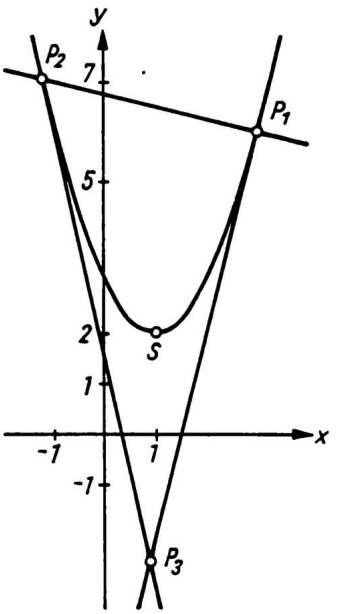


Bild L5.2

5.49 $y = 3x^2 - 2x$

5.50 $y = -\frac{h}{b^2}x^2 + h$

5.51

a) s. Bild L5.3

b) Berührpunkte: $B_1\left(\sqrt{3}; 6 - 2\sqrt{3}\right)$,

$B_2\left(-\sqrt{3}; 6 + 2\sqrt{3}\right)$

Steigungen: $m_1 = 2\sqrt{3} - 2\,,\ m_2 = -2\sqrt{3} - 2$

c) $\gamma = 44,71°$

d) $m_2 < m < m_1$

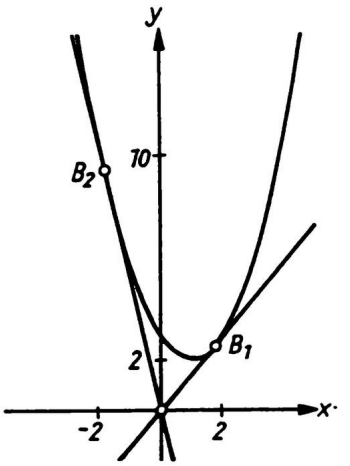


Bild L5.3

5.52 a) Punktsymmetrie bezüglich $P(0;0)$

$x_{N_1} = -2$, $x_{N_2} = 0$, $x_{N_3} = 2$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$T\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; -\frac{16}{3\sqrt{3}}\right)$, $H\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{16}{3\sqrt{3}}\right)$, $W(0;0)$

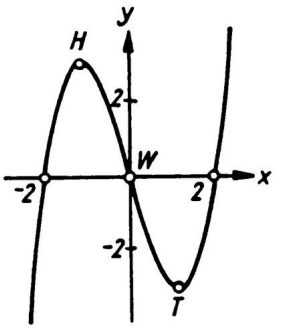


Bild L5.4a

b) Nullstellen: $x_{N_1} = 0$, $x_{N_2} = 2$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$H(0;0)$

$T\left(\frac{4}{3}; -\frac{32}{27}\right)$

$W\left(\frac{2}{3}; -\frac{16}{27}\right)$

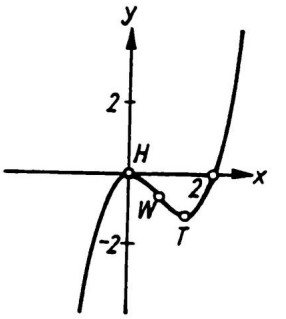


Bild L5.4b

c) $x_{N_1} = 0$, $x_{N_2} = 2$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$H\left(\frac{2}{3}; \frac{32}{27}\right)$

$T(2;0)$

$W\left(\frac{4}{3}; \frac{16}{27}\right)$

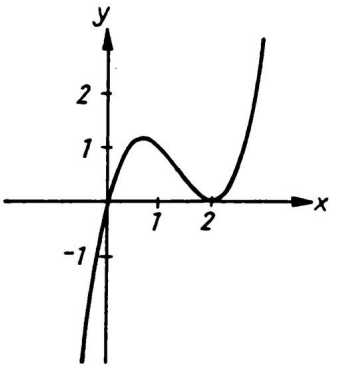


Bild L5.4c

d) $x_{N_1} = -2\,,\ x_{N_2} = 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty\,,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$H\,(-1,22;\,4,22)$

$T\,(0,55;\,-1,26)$

$W\,(-0,34;\,1,48)$

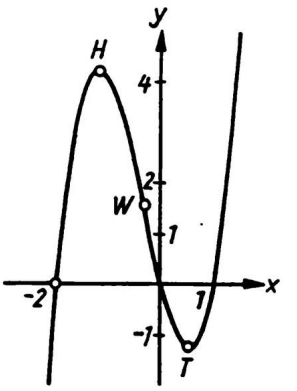


Bild L5.4d

e) Symmetrie bezüglich der y–Achse

$x_{N_1} = 1\,,\ x_{N_2} = -1$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$

$H\,(0;1)$

$T_1\,(1;0)\,,\ T_2\,(-1;0)$

$W_1\left(\sqrt{\frac{1}{3}};\frac{4}{9}\right)\,,\ W_2\left(-\sqrt{\frac{1}{3}};\frac{4}{9}\right)$

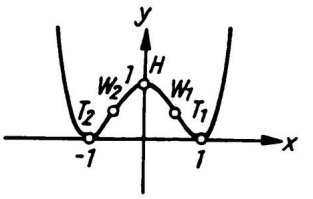


Bild L5.4e

f) $x_{N_1} = 0$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$

$H\,(0;0)$

$W_1\left(-1;-\frac{11}{6}\right)$

$W_2\,(-3;-4,5)$ als Sattelpunkt

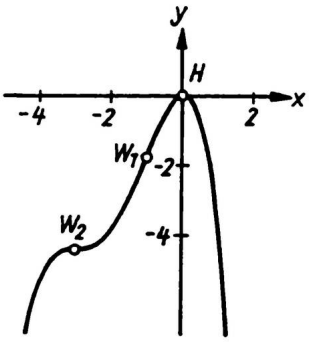


Bild L5.4f

g) $x_{N_1} = 0\,,\ x_{N_2} = -1$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty\,,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Fallunterscheidung

$\underline{\alpha)\ x^2 + x \geq 0 : x \geq 0 \vee x \leq -1}$

$f_1(x) = (x^2 + x)\,x = x^2\,(x+1)$

$H_1\left(-\frac{2}{3};\frac{4}{27}\right)$

$T_1\,(0;0)$

$W_1\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{27}\right)$

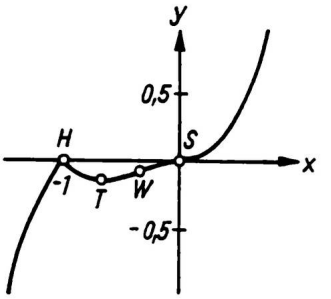


Bild L5.4g

Wegen des eingeschränkten Definitionsbereiches scheiden Kurvenpunkte für $-1 < x < 0$ aus.

$\beta)\ x^2 + x < 0 : \ -1 < x < 0$

$f_2(x) = -(x^2 + x)\,x$

$H_2(0;0)\ ,\ T_2\left(-\frac{2}{3};-\frac{4}{27}\right)\ ,\ W_2\left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{27}\right)$

In diesem Falle zählen alle Angaben für $-1 < x < 0$.

Der Gesamtgraph setzt sich aus zwei Teilgraphen zusammen.
Differenzierbarkeit an den Übergangsstellen:

$\alpha)$ Für $x_1 = 0$:
$f_1'(+0) = f_2'(-0) = 0$, d.h., f ist an der Stelle $x_{N_1} = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = 0$. Wegen des Überganges von einer Rechts- in eine Linkskrümmung ist der Punkt $P(0;0)$ zusammen mit $f'(0) = 0$ ein Sattelpunkt S.

$\beta)$ Für $x_2 = -1$:
$f_1'(-1-0) = 1$, $f_2'(-1+0) = -1 :$ f ist an der Stelle $x_{N_2} = -1$ nicht differenzierbar, jedoch stetig. Im Punkt $P_2(-1;0)$ liegt eine Spitze vor. P_2 ist ein lokaler Hochpunkt H.

h) Symmetrie bezüglich der y-Achse
$x_{N_1} = 2\ ,\ x_{N_2} = -2$
$H(0;-4)$
$T_1\left(\frac{2}{3};-4\frac{4}{27}\right)\ ,\ T_2\left(-\frac{2}{3};-4\frac{4}{27}\right)$
$W_1\left(\frac{1}{3};-4\frac{2}{27}\right)\ ,\ W_2\left(-\frac{1}{3};-4\frac{2}{27}\right)$

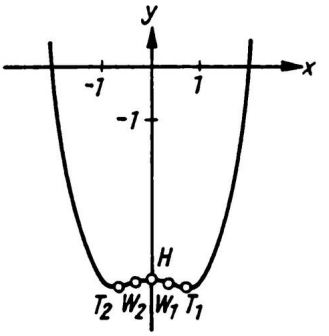


Bild 5.4h

5.53

a) Punktsymmetrie bezüglich $P(0;0)$
$H(-1;2)$, $T(1;-2)$, $W(0;0)$

b) $y = 24x - 54$

c) $P_2\left(-\frac{3}{2};\frac{9}{8}\right)$,
Tangente durch $P_2 :\ y = \frac{15}{4}x + \frac{27}{4}$

d) $\gamma = 12,55°$

e) $y = 6,57x - 1,71$

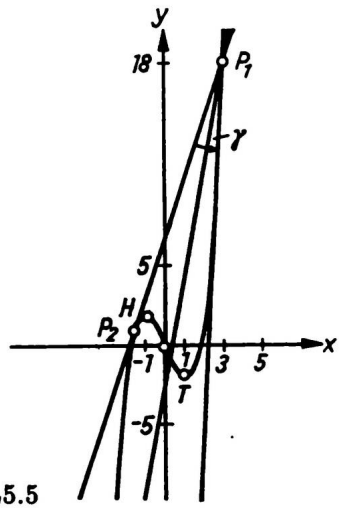


Bild L5.5

5.54 a) Die Ableitungsfunktion f' ist quadratisch, hat also höchstens zwei Nullstellen.

b) f'' ist linear. Wegen $f''(x_W) = 0$ mit Lösung x_W und $f'''(x_W) \neq 0$ ist x_W Wendestelle

c) Beweis durch Berechnen und Vergleich von x_H, x_T und x_W.

5.55 $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{15}{2}x + \frac{11}{2}$, Bild L5.6

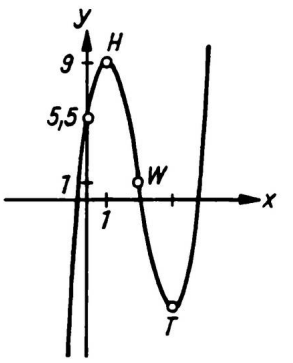


Bild L5.6

5.56 a) $x_{N_1} = 0$

$$x_{N_{2,3}} = -\frac{1}{2a} \pm \sqrt{\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2}}$$

b) $H\left(-\frac{1}{a}; \frac{1}{a^2}\right)$

$T\left(\frac{1}{3a}; -\frac{5}{27a^2}\right)$

c) $x_H = -\frac{1}{a}$

$y_H = \frac{1}{a^2} \Longrightarrow y_H = x_H^2$

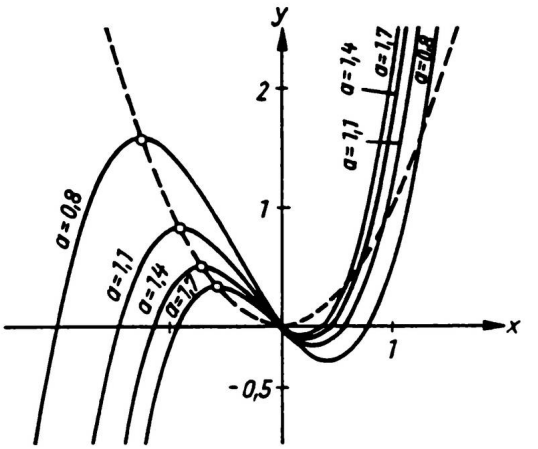


Bild L5.7

5.57 $y = -\frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^3$, Bild L5.8

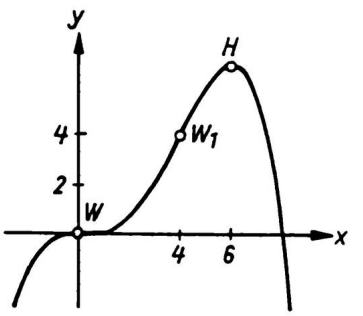


Bild L5.8

5.58 a) $X = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$

$\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = -\infty$:
Polstelle

$f'(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2} \neq 0 \Longrightarrow$ kein Extrempunkt

$f''(x) = \dfrac{2}{(x-2)^3} \neq 0 \Longrightarrow$ kein Wendepunkt

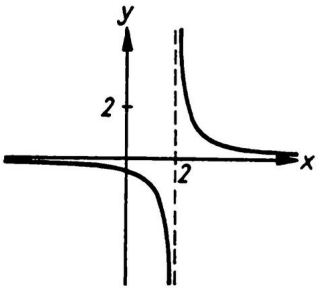


Bild L5.9a

b) $X = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{(x-2)^2} = 0$

$\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = \infty$:
Polstelle gerader Ordnung

$f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^3} \neq 0 \Longrightarrow$ kein Extrempunkt

$f''(x) = \dfrac{6}{(x-2)^4} \neq 0 \Longrightarrow$ kein Wendepunkt

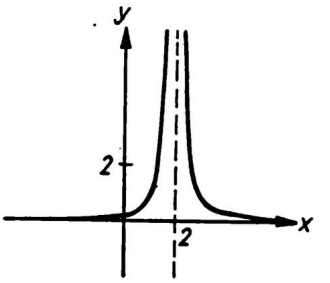


Bild L5.9b

c) $X = \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x(x+1)} = 0$

keine Nullstelle

$\lim\limits_{x \to +0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = -\infty$:
Polstelle 1. Ordnung

$\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = \infty$:
Polstelle 1. Ordnung

$f'(x) = -\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$

$f''(x) = \dfrac{6x^2+6x-2}{x^3(x+1)^3}$

$H\left(-\dfrac{1}{2}; -4\right)$

$f''(x) \neq 0 \Longrightarrow$ kein Wendepunkt

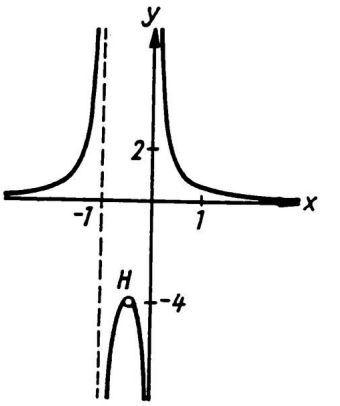


Bild L5.9c

d) $X = \mathbb{R}$, Symmetrie bezüglich y-Achse

keine Nullstellen

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^2+2} = 0$

$f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+2)^2}$, $f''(x) = \dfrac{6x^2-4}{(x^2+2)^3}$

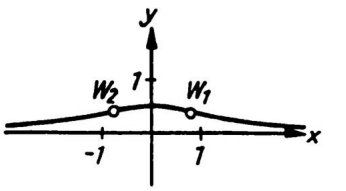


Bild L5.9d

$$H\left(0;\frac{1}{2}\right),\ W_1\left(\sqrt{\frac{2}{3}};\frac{3}{8}\right),\ W_2\left(-\sqrt{\frac{2}{3}};\frac{3}{8}\right)$$

e) $X=\mathbb{R}$, Punktsymmetrie bezüglich $P(0;0)$

$x_N=0$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2+2}=0$$

$$f'(x)=\frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2},\quad f''(x)=\frac{2x^3-12x}{(x^2+2)^3}$$

$$H\left(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{4}\right),\ T\left(-\sqrt{2};-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$W_1(0;0),\ W_2\left(\sqrt{6};\frac{\sqrt{6}}{8}\right),\ W_3\left(-\sqrt{6};-\frac{\sqrt{6}}{8}\right)$$

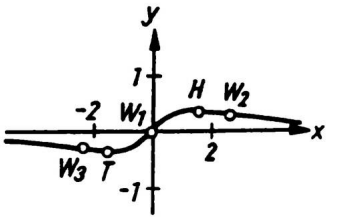


Bild L5.9e

f) $X=\mathbb{R}\setminus\{0,1,-1\}$,
Punktsymmetrie bezüglich $P(0;0)$

Nullstellen: keine

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^3-x}=0$$

$$\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to-0}f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to1+0}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to1-0}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1+0}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to-1-0}f(x)=-\infty$$

$$f'(x)=\frac{-3x^2+1}{(x^3-x)^2},\quad f''(x)=\frac{12x^4-6x^2+2}{(x^3-x)^3}$$

$$H\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right),\ T\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

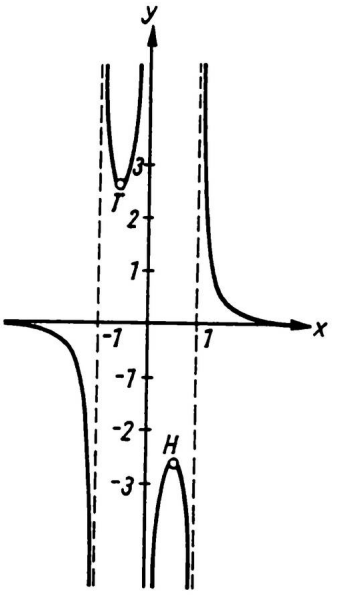


Bild L5.9f

g) $X=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$\lim_{x\to1}f(x)=2$: $x=1$ hebbare Lücke

$\Longrightarrow$ punktierte Gerade

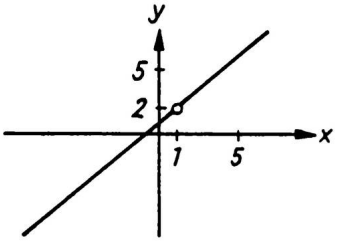


Bild L5.9g

h) $X = \mathbb{R} \setminus \{0, 2, -3\}$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{2}{5}$: $x = 2$ hebbare Lücke

$x_N = -2$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -3+0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -3-0} f(x) = -\infty$

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 4x + 6}{x^2 (x+3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2x^3 + 12x^2 + 36x + 36}{x^3 (x+3)^3}$$

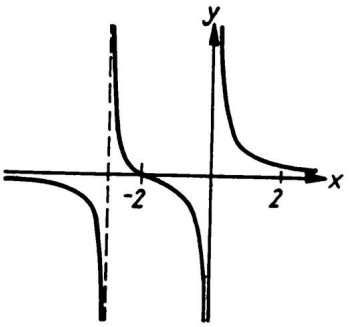


Bild L5.9h

$f'(x) \neq 0$: kein Extrempunkt,

$x_W = -1,6725$ mit $f''(x_W) = 0,00013$, $W(-1,6725; -0,148)$

i) $X = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $x_N = -2$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$, $y_A = 1$

$\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = -\infty$

$f'(x) = \frac{-4}{(x-2)^2} < 0$: kein Extrempunkt

$f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3} \neq 0$: kein Wendepunkt

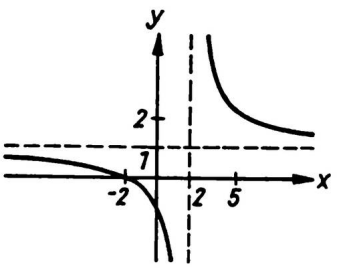


Bild L5.9i

j) $X = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$x_{N_1} = 1$, $x_{N_2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}$, $x_{N_3} = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{17}{4}}$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $y_A = x + 2$

Schnittpunkt zwischen Kurve und Asymptote: $S(4; 6)$

$\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = -\infty$

Hochpunkt (Berechnung näherungsweise): $H(0,2037; 1,027)$

$W\left(8; 10\frac{1}{9}\right)$

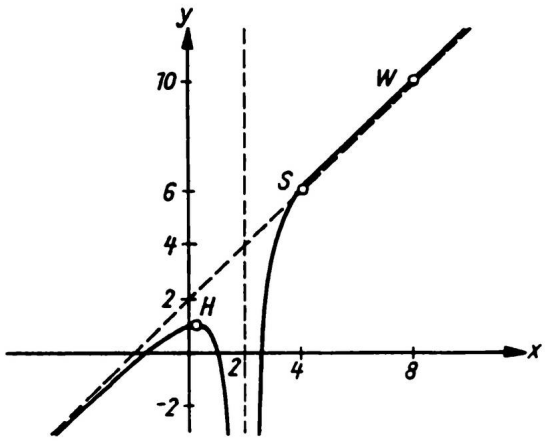


Bild L5.9j

5.59 $X = \mathbb{R}$ für $a > 0$, $X = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{-a}; -\sqrt{-a}\}$ für $a < 0$

Punktsymmetrie bezüglich $P(0;0)$ für alle a; $x_N = 0$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{(x^2+a)^2} = 0 \quad \text{für alle } a$$

$$f_a'(x) = \frac{-6x^2+2a}{(x^2+a)^3}, \quad f_a''(x) = \frac{24x^3-24ax}{(x^2+a)^4}, \quad f_a'''(x) = \frac{24\left(-5x^4+10x^2a-a^2\right)}{(x^2+a)^5}$$

$$H\left(\sqrt{\frac{a}{3}}; \frac{3\sqrt{3}}{8a^{\frac{1}{2}}}\right) \text{ für } a > 0, \quad T\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}; -\frac{3\sqrt{3}}{8a^{\frac{1}{2}}}\right) \text{ für } a > 0$$

$x_{W_1} = 0$ für alle a, $x_{W_2} = \sqrt{a}$ und $x_{W_3} = -\sqrt{a}$ für $a > 0$:

$$W_1(0;0), \; W_2\left(\sqrt{a}; \frac{\sqrt{a}}{2a^2}\right), \; W_3\left(-\sqrt{a}; -\frac{\sqrt{a}}{2a^2}\right) \text{ für } a > 0$$

$W_1(0;0)$ für $a < 0$

Für $a < 0$ Polstellen:

$$\lim_{x \to \sqrt{-a}+0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \sqrt{-a}-0} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\sqrt{-a}+0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\sqrt{-a}-0} f(x) = -\infty$$

Graph für $a = 4$

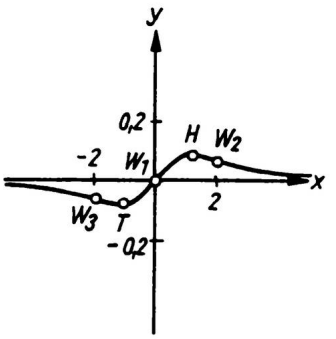


Bild L5.10a

Graph für $a = -4$

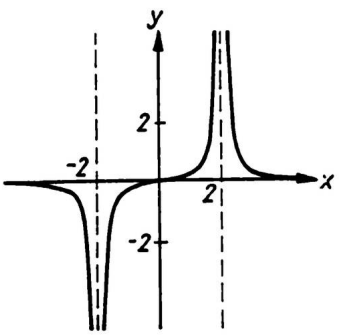


Bild L5.10b

5.60 a) $X = \mathbb{R}$, $x_N = -\dfrac{\ln 2}{2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2 - \mathrm{e}^{-2x}\right) = 2$, $y_A = 2$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2 - \mathrm{e}^{-2x}\right) = -\infty$

$f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{-2x} > 0$: f streng monoton steigend, kein Extrempunkt

$f''(x) = -4\,\mathrm{e}^{-2x} < 0$: kein Wendepunkt

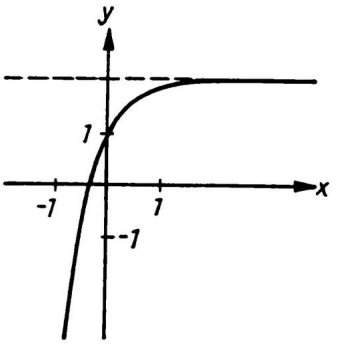


Bild L5.11a

b) $X = \mathbb{R}$, $x_N = \ln\sqrt{\dfrac{1}{3}} = -0{,}55$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(3\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-3x}\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}\left(3 - \mathrm{e}^{-2x}\right) = -\infty$

$f'(x) = -3\,\mathrm{e}^{-x} + 3\,\mathrm{e}^{-3x}$

$f''(x) = 3\,\mathrm{e}^{-x} - 9\,\mathrm{e}^{-3x}$

$H\,(0;2)$, $W\,(0{,}55;1{,}54)$

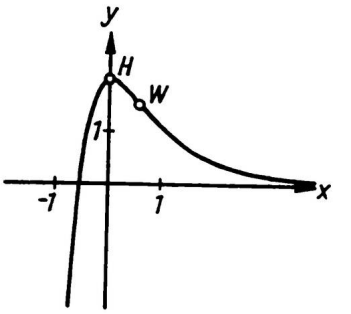


Bild L5.11b

c) $X = \mathbb{R}$, Nullstelle: $x_N = 1$

$\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)\,\mathrm{e}^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)\,\mathrm{e}^{-x} = -\infty$

$f'(x) = (2-x)\,\mathrm{e}^{-x}$, $f''(x) = (x-3)\,\mathrm{e}^{-x}$

$f'''(x) = (4-x)\,\mathrm{e}^{-x}$

$H\,(2;0{,}14)$, $W\,(3;0{,}10)$

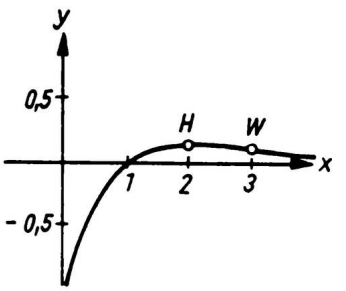


Bild L5.11c

d) $X = \mathbb{R}$, $x_{N_1} = 1$, $x_{N_2} = -1$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-1\right)\mathrm{e}^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)\mathrm{e}^{-x} = \infty$

$f'(x) = \left(-x^2+2x+1\right)\mathrm{e}^{-x}$

$f''(x) = \left(x^2-4x+1\right)\mathrm{e}^{-x}$

$f'''(x) = \left(-x^2+6x-5\right)\mathrm{e}^{-x}$

$H\,(2{,}41;0{,}43)$, $T\,(-0{,}41;-1{,}25)$

$W_1\,(3{,}73;0{,}31)$, $W_2\,(0{,}27;-0{,}71)$

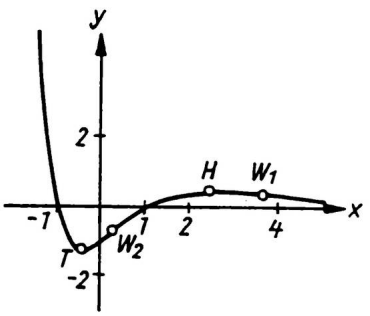


Bild L5.11d

e) $X = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, Nullstellen: keine

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x-1} = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to 1-0} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{(x-2)\,e^x}{(x-1)^2}, \quad f''(x) = \frac{(x^2-4x+5)\,e^x}{(x-1)^3}$$

$T\,(2;\, e^2)$, kein Wendepunkt

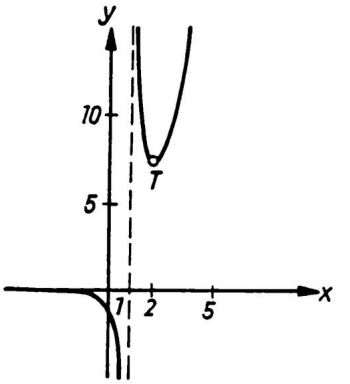


Bild L5.11e

f) $X = \mathbb{R}$, Nullstellen: keine

$$f(x) = 1 + \frac{1}{e^x + 1}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1, \quad y_{A_1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2, \quad y_{A_2} = 2$$

$$f'(x) = \frac{-e^x}{(e^x+1)^2}, \quad f''(x) = \frac{e^x\,(e^x-1)}{(e^x+1)^3}$$

$f'(x) < 0$: f streng monoton fallend
kein Extrempunkt

$W\,(0;\, 1,5)$

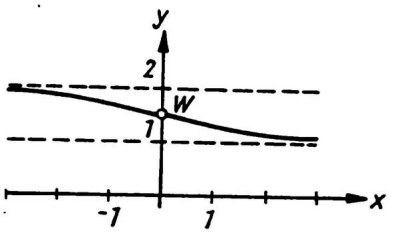


Bild L5.11f

g) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, Nullstellen: keine

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1, \quad y_{A_1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1, \quad y_{A_2} = -1$$

$$f'(x) \frac{-2\,e^x}{(e^x-1)^2}, \quad f''(x) = \frac{2\,e^x\,(e^x+1)}{(e^x-1)^3}$$

$f'(x) \neq 0$: kein Extrempunkt

$f''(x) \neq 0$: kein Wendepunkt

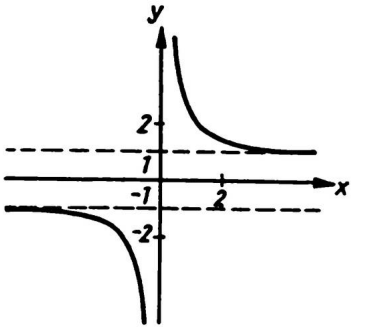


Bild L5.11g

h) $X = \{x \mid x > 0\}$, Nullstellen: $x_N = 1$

$$\lim_{x \to \infty} (\ln x)^2 = \infty, \quad \lim_{x \to +0} (\ln x)^2 = \infty$$

$$f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}, \quad f''(x) = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2}$$

$T\,(1;\, 0)$, $W\,(e;\, 1)$

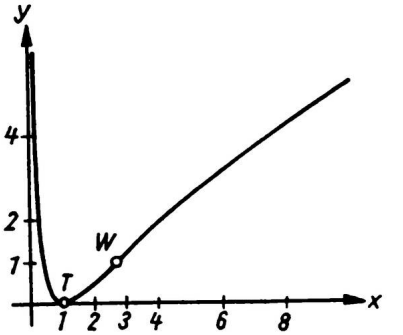


Bild L5.11h

i) vgl. k) für $x > 0$, Bild L5.11i

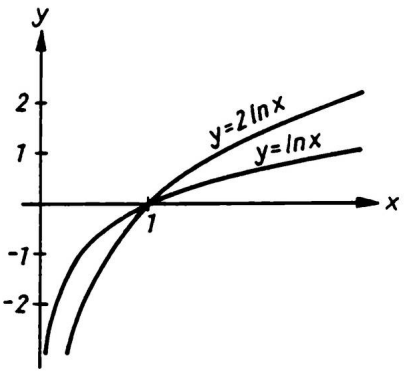


Bild L5.11i

j) $X = \mathbb{R}$, Symmetrie bezüglich y-Achse

$\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x^2+1) = \infty$

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, $f''(x) = \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

$T(0;0)$, $W_1(1;\ln 2)$

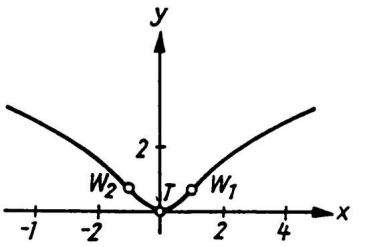


Bild L5.11j

k) $X = \{x \mid x > 0\}$, $x_N = 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$

$f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $f''(x) = \dfrac{-3+2\ln x}{x^3}$

$H\left(\mathrm{e}; \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$, $W\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}; \dfrac{\frac{3}{2}}{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}}\right)$

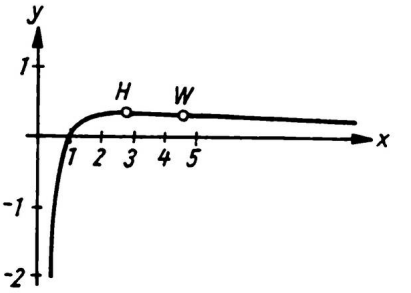


Bild L5.11k

5.61 $X = \mathbb{R}$, $x_N = \dfrac{\ln 2}{-a}$ für $a \neq 0$

$f(0) = 1$ für alle a

<u>Für $a > 0$</u>:

$\lim\limits_{x\to\infty} (2 - \mathrm{e}^{-ax}) = 2$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = -\infty$

<u>Für $a < 0$</u>:

$\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = 2$

$f_a'(x) = a\,\mathrm{e}^{-ax}$, $f_a''(x) = -a^2\,\mathrm{e}^{-ax}$

$f_a'(x) \neq 0$ für $a \neq 0$: kein Extrempunkt

$f_a''(x) \neq 0$ für $a \neq 0$: kein Wendepunkt

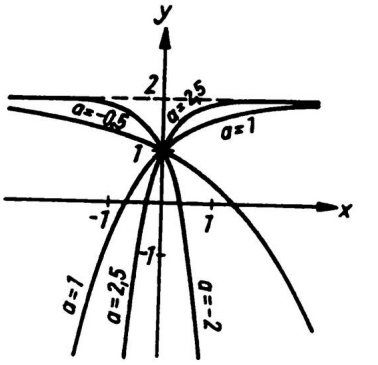


Bild L5.12

5.62 a) $X = \mathbb{R}$, Symmetrie bezüglich y-Achse

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{a} e^{-ax^2} = 0, \quad y_A = 0$$

$$f_a'(x) = -2x\, e^{-ax^2}$$

$$f''(x) = 2\left(2ax^2 - 1\right) e^{-ax^2}$$

$$f_a'''(x) = 4ax\left(3 - 2ax^2\right) e^{-ax^2}$$

$$H\left(0; \frac{1}{a}\right)$$

$$W_1\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}; \frac{1}{a\sqrt{e}}\right), \quad W_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2a}}; \frac{1}{a\sqrt{e}}\right)$$

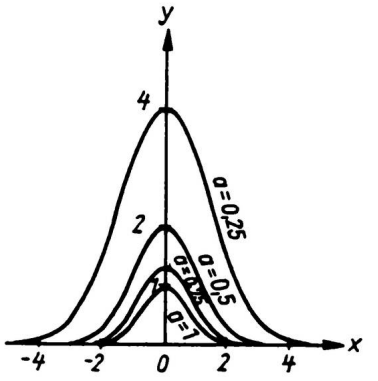


Bild L5.13a

b) $f_a'(x) = -2x\, e^{-ax^2}$

$X = \mathbb{R}$, Punktsymmetrie bezüglich $P(0;0)$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_a'(x) = 0$$

Ableitungen vgl. a)

$$H\left(-\frac{1}{\sqrt{2a}}; \sqrt{\frac{2}{ae}}\right), \quad T\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}; -\sqrt{\frac{2}{ae}}\right)$$

$$W_1(0;0), \quad W_2\left(\sqrt{\frac{3}{2a}}; -\sqrt{\frac{6}{a}} \cdot e^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$W_3\left(-\sqrt{\frac{3}{2a}}; \sqrt{\frac{6}{a}} \cdot e^{-\frac{3}{2}}\right)$$

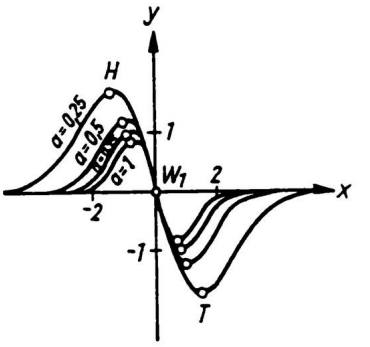


Bild L5.13b

Extremstellen von f_a' sind Wendestellen von f_a!

c) Schnittpunkte:

$f_a(x) = f_a'(x)$:

$$S_a\left(-\frac{1}{2a}; \frac{1}{a} \cdot e^{-\frac{1}{4a}}\right)$$

Gleichung der Kurve der Schnittpunkte:

Elimination von a ergibt

$$y = -2x \cdot e^{\frac{x}{2}}$$

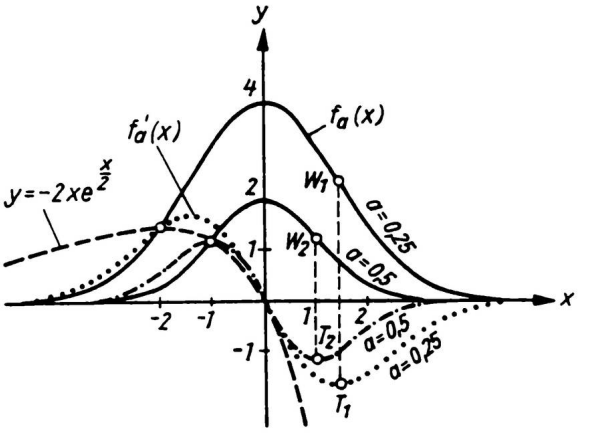


Bild L5.13c

e) $X = [0, 2\pi] \setminus \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi\right\}$

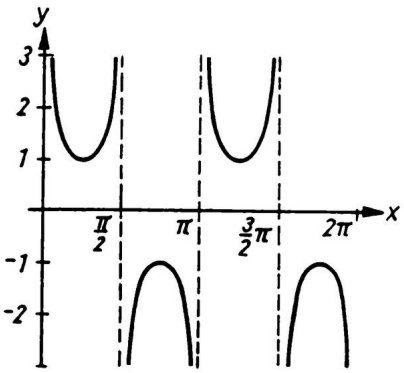


Bild L5.15e

Nullstellen: keine

$$f'(x) = \frac{-2\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$$

$$f''(x) = \frac{4\left(\sin^2(2x) + 4\cos^2(2x)\right)}{\sin^3(2x)}$$

$$T_1\left(\frac{\pi}{4}; 1\right), \; T_2\left(\frac{5}{4}\pi; 1\right)$$

$$H_1\left(\frac{3}{4}\pi; -1\right), \; H_2\left(\frac{7}{4}\pi; -1\right)$$

keine Wendepunkte, da $f''(x) \neq 0$.

$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{\sin(2x)} = \infty, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \frac{1}{\sin(2x)} = \infty, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} \frac{1}{\sin(2x)} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \pi - 0} \frac{1}{\sin(2x)} = -\infty$$

f) $X = [2, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right\}$

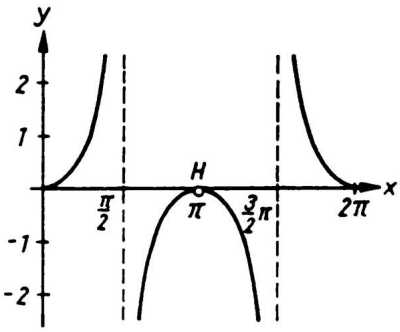


Bild L5.15f

x_N : 0, π, 2π

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \infty, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} \frac{\sin^2 x}{\cos x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}\pi - 0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \frac{3}{2}\pi + 0} f(x) = \infty$$

$$f'(x) = \frac{\sin x\left(\cos^2 x + 1\right)}{\cos^2 x}$$

$$f''(x) = \frac{\cos^4 x + \sin^2 x + 1}{\cos^3 x}$$

$T_1(0; 0)$, $T_2(2\pi; 0)$, $H(\pi; 0)$, $f''(x) \neq 0$: keine Wendepunkte

g) $X = [0, 2\pi] \setminus \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi\right\}$

$x_{N_1} = \frac{3}{4}\pi\,,\ x_{N_2} = \frac{7}{4}\pi$

$\lim\limits_{x \to +0} \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right) = \infty$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} f(x) = \infty\,,\ \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} f(x) = -\infty\,,$

$\lim\limits_{x \to \pi - 0} f(x) = \infty\,,\ \lim\limits_{x \to \pi + 0} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}\pi - 0} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}\pi + 0} f(x) = \infty\,,\ \lim\limits_{x \to 2\pi - 0} f(x) = -\infty$

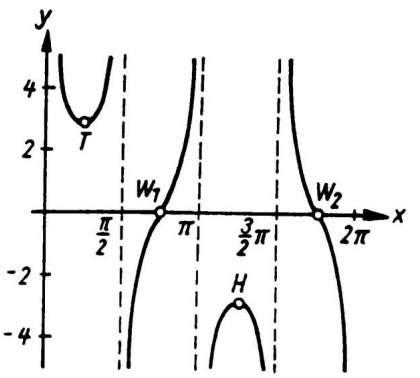


Bild L5.15g

$f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,,\ f''(x) = \frac{1 + \cos^2 x}{\sin^3 x} + \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^3 x}$

$T\left(\frac{\pi}{4}; 2{,}83\right)\,,\ H\left(\frac{5}{4}\pi; -2{,}83\right)$

$f''(x_W) = 0$ für $\sin x_W = -\cos x_W\,,\ W_1\left(\frac{3}{4}\pi; 0\right)\,,\ W_2\left(\frac{7}{4}\pi; 0\right)$

h) $X = [0; 2\pi] \setminus \left\{\frac{3}{2}\pi\right\}\,,\quad x_N = \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}\pi - 0} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \lim\limits_{x \to \frac{3}{2}\pi - 0} \frac{-\sin x}{\cos x}$

$= \lim\limits_{x \to \frac{3}{2}\pi - 0} (-\tan x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}\pi + 0} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \infty$

$f'(x) = \frac{-1}{1 + \sin x}\,,\ f''(x) = \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2}$

$f'(x) < 0$ für $x \in X$: f über $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right)$

und $\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$ jeweils streng monoton fallend,

kein Extrempunkt im Innern,

Hochpunkt am Rand: $H(0; 1)$,

Tiefpunkt am Rand: $T(2\pi; 1)$; $W\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$

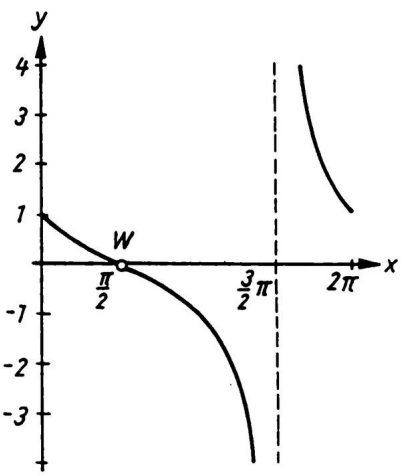


Bild L5.15h

i) $X = [0, 2\pi]$, $x_{N_1} = 0$, $x_{N_2} = \pi$, $x_{N_3} = 2\pi$

$f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin(2x)$

$f''(x) = 2\cos(2x)$, $f'''(x) = -4\sin(2x)$

$H_1\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$, $H_2\left(\frac{3}{2}\pi; 1\right)$

$T_1(0; 0)$, $T_2(\pi; 0)$, $T_3(2\pi; 0)$

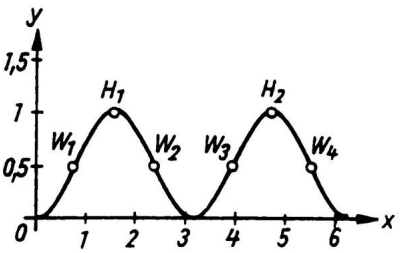


Bild L5.15i

$W_1\left(\frac{\pi}{4}; 0,5\right)$, $W_2\left(\frac{3}{4}\pi; 0,5\right)$, $W_3\left(\frac{5}{4}\pi; 0,5\right)$, $W_4\left(\frac{7}{4}\pi; 0,5\right)$

j) $X = [0, 2\pi]$,

$x_{N_k} = \sqrt{k\pi}$ mit $k = 0, 1, 2, \ldots, 12$

$f'(x) = 2x\cos(x^2)$, $f''(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$

$f'(x_E) = 0$: $x_E = 0$, $x_{E_k} = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots, 12$

$T_1(0; 0)$, $T_2\left(\sqrt{\frac{3}{2}\pi}; -1\right)$, $T_3\left(\sqrt{\frac{7}{2}\pi}; -1\right)$, ...

$H_1\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}; 1\right)$, $H_2\left(\sqrt{\frac{5}{2}\pi}; 1\right)$, $H_3\left(\sqrt{\frac{9}{2}\pi}; 1\right)$, ...

Die Wendestellen können mit Hilfe von Näherungsverfahren ermittelt werden. Hierauf wird hier nicht eingegangen.

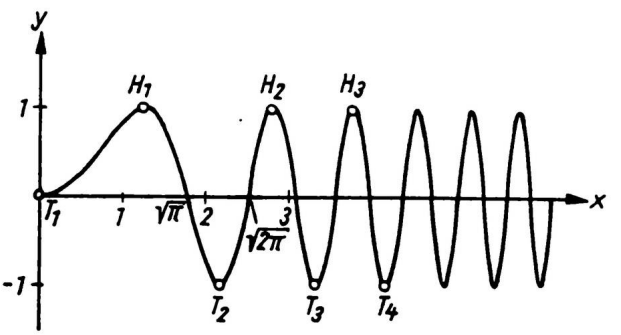


Bild L5.15j

5.65 a) $X = \mathbb{R}$,

Punktsymmetrie bezüglich P(0;0):
Beschränkung der Diskussion auf den Bereich für $x \geq 0$.

$f'(x) = 1 + \cos x$, $f''(x) = -\sin x$
$f'''(x) = -\cos x$

$f'(x_E) = 0$:

$x_{E_k} = \pi + 2k\pi$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$

$f''(x_{E_k}) = 0$, $f'''(x_{E_k}) \neq 0$: kein Extrempunkt

Sattelpunkte: $S_0\,(\pi;\pi)$, $S_1\,(3\pi;3\pi)$, ...

$W_1\,(0;0)$, $W_2\,(2\pi;2\pi)$, ...

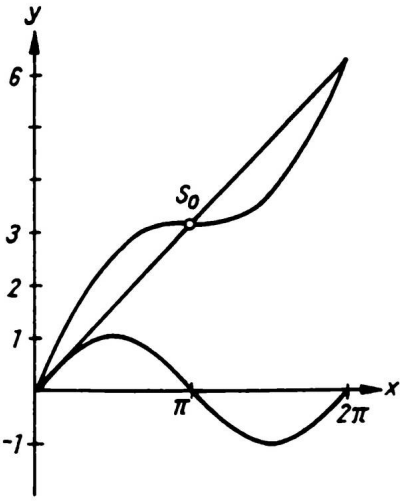


Bild L5.16a

b) $X = \mathbb{R}$

x_N : $-\frac{3}{2}\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, ...

$\lim\limits_{x\to\infty} e^{-0,1x}\cos x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{n-0,1x}\,|\cos x| = \infty$

$f'(x) = -e^{-0,1x}\,(0,1\cos x + \sin x)$

$f''(x) = e^{-0,1x}\,(-0,99\cos x + 0,2\sin x)$

$f'''(x) = e^{-0,1x}\,(0,299\cos x + 0,97\sin x)$

$T_1\,(-1,03\pi; -1,38)$, $T_2\,(0,97\pi; -0,73)$, ...

$H_1\,(-2,03\pi; 1,88)$,
$H_2\,(-0,03\pi; 1,01)$,
$H_3\,(1,97\pi; 0,54)$, ...
$W_1\,(-1,56\pi; 0,32)$
$W_2\,(-0,56\pi; -0,23)$
$W_3\,(0,44\pi; 0,17)$
$W_4\,(1,44\pi; -0,13)$
$W_5\,(2,44\pi; 0,09)$

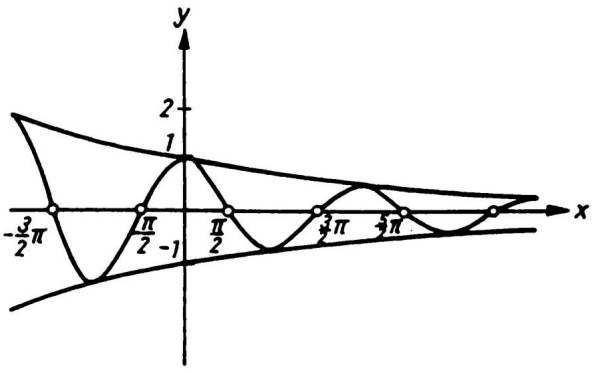


Bild L5.16b

c) $X = \mathbb{R} \setminus \{x \,|\, x = k\pi \text{ und } k \in \mathbb{Z}\}$

Symmetrie bezüglich der y–Achse, keine Nullstellen

$$\lim_{x \to +0} \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to +0} \frac{\sin x}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \to \pi - 0} f(x) = \infty\,, \quad \lim_{x \to \pi + 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2\pi - 0} f(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x \to 2\pi + 0} f(x) = \infty\,, \ \ldots$$

$$f'(x) = \frac{\sin x - x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

$$f''(x) = \frac{x\left(1 + \cos^2 x\right) - \sin(2x)}{\sin^3 x}$$

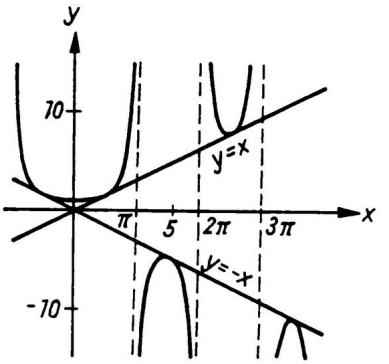


Bild L5.16c

$f'(x_E) = 0$: $x_{E_1} = 0$, $x_E = \tan x_E$: $x_{E_1} = 1{,}43\pi$
(vgl. Iterationsverfahren von NEWTON)

$f''(x) \neq 0$: kein Wendepunkt

5.66 Zielfunktion: $V = f(h) = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 - (h - R)^2\right)$

maximal für $h = \frac{4}{3}R$ und $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$

5.67 a) Zielfunktion: $A = f(b) = b\sqrt{4R^2 - b^2}$

maximal für $h = b$ mit $h = \sqrt{2}R$

b) Zielfunktion: $W = f(b) = \frac{1}{6}b\left(4R^2 - b^2\right)$

maximal für $b = \frac{2}{\sqrt{3}}R$ und $h = \frac{2R}{3}\sqrt{6}$

c) Zielfunktion: $I = f(h) = \frac{1}{12}h^3\sqrt{4R^2 - h^2}$

maximal für $h = \sqrt{3}R$ und $b = R$

5.68 Zielfunktion: $A = f(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{-b}{a}} + x\right)\left(ax^2 + b\right)$

maximal für $x = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{-b}{a}}$ und $y = \frac{8}{9}b$ sowie $m = \frac{2}{3}\frac{b}{\sqrt{\frac{-b}{a}}}$

5.69 Zielfunktion: $V = f(h) = \frac{\pi}{4}h\left(\mathrm{e}^2 - \frac{h^2}{4}\right)$

maximal für $h = \frac{2\,\mathrm{e}}{\sqrt{3}}$ und $d = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \mathrm{e}$ mit $\frac{d}{h} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

5.70 K_1 bzw. K_2 Kosten pro m Leitung zu Wasser bzw. über Land.
Gesamtkosten: $K = K_1 + K_2 = 3K_2\sqrt{x^2 + 400^2} + K_2\,(1800 - x) = f(x)$
minimal für $x = 141,42\,\text{m}$.

5.71 Zielfunktion: $d^2 = f(t) = (a - v_1 t)^2 + (b - v_2 t)^2 - 2\,(a - v_1 t) \cdot (b - v_2 t) \cdot \cos\alpha$
Minimaler Abstand für $t = 2\,\text{min}\ 45\,\text{s}$ bei $\alpha = 90°$ und $t = 2\,\text{min}\ 48\,\text{s}$ bei $\alpha = 60°$.

5.72 Zielfunktion: $U = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{2A}}{\sin\alpha} = f(\alpha)$ minimal für $\alpha = 90°$.

5.73 Zielfunktion: $l = f(\alpha) = \dfrac{a}{\cos\alpha} + \dfrac{b}{\sin\alpha}$ maximal für $\alpha = \arctan\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$.
Für $b = 1,5\,\text{m}$ und $a = 2\,\text{m}$ folgt $l = 4,933\,\text{m}$ für $\alpha = 42,26°$.

6.1 $\dfrac{x^6}{6} - x^3 + 7x + C$

6.2 $\dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + C$

6.3 $\dfrac{5}{3}\sqrt[5]{x^3} + C$

6.4 $\dfrac{1}{5}t^2\sqrt{t} - \dfrac{12}{5}\sqrt[6]{t^5} - \dfrac{8}{3}\dfrac{\sqrt{t}}{t^2} + C$

6.5 $\dfrac{1}{4}s^4 + \dfrac{12}{7}s^3\sqrt{s} + 4s^3 + \dfrac{16}{5}s^2\sqrt{s} + C$

6.6 $\dfrac{6}{11}u\sqrt[6]{u^5} + C$

6.7 $\dfrac{3}{4}\sqrt{v}\,u\sqrt[3]{u} + C$

6.8 $\dfrac{r^3}{3} + \dfrac{2^r}{\ln 2} + C$

6.9 $\dfrac{m^2}{2} - \ln|m| + C$

6.10 $au\cos^2 x + C$

6.11 $I(t) = \tan t - 1$

6.12 $I(x) = \dfrac{x^4}{4} + 2x^3 - x^2 + 7x - \dfrac{33}{4}$

6.13 $I(s) = \ln|s| - \ln 2$

6.14 $I(y) = \dfrac{\pi}{2}y + \arcsin y - \dfrac{5\pi}{12}$

6.15 $I(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{5x^2}{2} - 4x + 2$

6.16 12

6.17 $2 - 5\pi \approx -13,708$

6.18 $\operatorname{artanh} 0,5 = \frac{1}{2}\ln 3 \approx 0,549$

6.19 $\operatorname{arcoth} 4 - \operatorname{arcoth} 2 = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{9} \approx -0,294$

6.20 Das Integrationsintervall $[0,5;2]$ enthält bei $x = 1$ eine Unendlichkeitsstelle des Integranden, über die hinweg nicht integriert werden darf.

6.21 $\dfrac{3}{2}\cos\varphi$

6.22 $\operatorname{arsinh} 5 \approx 2,312$

6.23 $ab\pi\,(x_2 - x_1)$

6.24 $\displaystyle\int_1^4 (1 - x^2)\,\mathrm{d}x = -18$

6.25 $\frac{\pi}{4} + 1 \approx 1,785$

6.26 $3\,\mathrm{e}^a - 3$

6.27 $\ln 0,1 = -\ln 10 \approx -2,303$

6.28 2 (Integrationsvariable ist x^2, also gelten auch die Grenzen für x^2)

6.29 $f(\xi) = \frac{1}{a}\left(\mathrm{e}^{a} - a - 1\right)$

6.30 $f(\xi) = 0$

6.31 $f(\xi) = \frac{3}{2\pi} \approx 0,477$

6.32 $\frac{2}{15}(5x+3)\sqrt{5x+3} + C$

6.33 $\frac{1}{2}\ln|2t+3| + C$

6.34 $-\frac{3^{2-r}}{\ln 3} + C$

6.35 $\frac{1}{2}\sin(2\varphi + 0,5) + C$

6.36 $\frac{1}{3}\operatorname{arcosh} 3x + C$

6.37 $3\left(\sqrt[6]{2u-7}\right)^{5} + C$

6.38 $\frac{3}{4}\tan(4x-2) + C$

6.39 $\frac{1}{a}\arctan(au) + C$

6.40 $\frac{37}{12} \approx 3,08$

6.41 $\frac{1}{2}$

6.42 $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \approx 0,285$

6.43 $-\frac{1}{4}\cos^{4} x + C$

6.44 $\sin^{5} x - \sin^{3} x + \sin^{2} x + 4\sin x + C$

6.45 $\frac{1}{27}\left(6x^{3}-5\right)\sqrt{6x^{3}-5} + C$

6.46 $-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + C$

6.47 $\mathrm{e}^{\sin x} + C$

6.48 $\frac{1}{8}(\operatorname{arsinh} 4x)^{2} + C$

6.49 $0,574$

6.50 $1,395$

6.51 1

6.52 $\ln|\sin x| + C$

6.53 $2,187$

6.54 $-\frac{\sqrt{4-x^{2}}}{4x} + C$

6.55 $\arcsin\frac{u}{\sqrt{5}} + C$

6.56 $-\frac{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}{x} - \arcsin\frac{x}{a} + C$

6.57 $\frac{3}{2}\arcsin\frac{4+y}{\sqrt{3}} + \frac{4+y}{2}\sqrt{3-(4+y)^{2}} + C$

6.58 $x\sqrt{a^{2}-x^{2}} + C$

6.59 $-\frac{\pi}{4} \approx -0,785$

6.60 $\frac{x}{2}\sqrt{4+x^{2}} + 2\operatorname{arsinh}\frac{x}{2} + C$

6.61 $\frac{1}{3}\left(x^{2}-2\right)\sqrt{1+x^{2}} + C$

6.62 $\frac{1}{3}\left(x^{2}+x+23\right)\sqrt{x^{2}+4x+29} - 25\operatorname{arsinh}\frac{x+2}{5} + C$

6.63 $\frac{1}{3}\ln\left|3x+1+\sqrt{9x^{2}+6x+5}\right| + C$

6.64 $\frac{1}{2}\operatorname{arcosh}(x-1) + C$

6.65 $2\operatorname{artanh}\left(\tan\frac{x}{2}\right) + C$

6.66 $\tan\frac{x}{2} + C$

6.67 $-x^{2}\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C$

6.68 $\frac{x^{2}}{4} - \frac{x}{2}\sin x\cos x + \frac{\sin^{2} x}{4} + C$

6.69 $-\frac{1}{2}\cos\left(x^{2}\right) + C$

6.70 $\sin(3-x) + x\cos(3-x) + C$

6.71 $1,80$

6.72 $\frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,571$

6.73 2

6.74 $-\dfrac{\cos x + \sin x}{2\,\mathrm{e}^x} + C$

6.75 $-\dfrac{1}{4\,\mathrm{e}^{4x}}\left(x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{3}{8}x + \dfrac{3}{32}\right) + C$

6.76 $a\left(\sinh\dfrac{x}{a}\left(x^2 + 2a^2\right) - 2ax\cosh\dfrac{x}{a}\right) + C$

6.77 $x\arctan x - \dfrac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right) + C$

6.78 $\dfrac{1}{2}\left(x^2 + 1\right)\arctan x - \dfrac{x}{2} + C$

6.79 $x\,\mathrm{arsinh}\,x - \sqrt{1 + x^2} + C$

6.80 $\dfrac{x^2}{4}(2\ln x + 1) + C$

6.81 $\dfrac{1}{2}(1 - \ln 2) \approx 0,1534$

6.82 $3\ln|x - 5| - 2\ln|x + 1| + C$

6.83 $\dfrac{11}{5 - x} + 2\ln|x - 5| + C$

6.84 $\dfrac{3}{x - 1} - \ln|x - 1| + C$

6.85 $\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 + 1\right) - 3\arctan x + C$

6.86 $\dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{5}{2}\ln|x - 4| + \dfrac{3}{2}\ln|x + 2| + C$

6.87 $\dfrac{1}{3(x + 2)} - \dfrac{1}{9}\ln|x + 2| + \dfrac{1}{9}\ln|x - 1| + C$

6.88 $2\ln|x + 1| + 3\ln|x - 4| - \dfrac{1}{x - 4} + C$

6.89 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\dfrac{3}{8}\pi - \dfrac{x}{2}\right)\right| + C$

6.90 $I = 0,086896$

6.91 $I = 0,183493$

6.92 $I = 0,787672$

6.93 $I = 0,904064$

6.94 $I = 0,292$

6.95 $I = 1,02$

6.96 $A = 94,66$

6.97 a) $A = 10,40$

b) $A = \dfrac{102,3}{\ln 2} \approx 147,59$

c) $x_{N_1} = 1;\ x_{N_2} = 4;\ A = 15$

d) $x_{N_1} = \dfrac{\pi}{4};\ x_{N_2} = \dfrac{5\pi}{4};\ A = 4\sqrt{2} \approx 5,657$

e) $x_1 = \dfrac{\pi}{2};\ x_2 = \dfrac{3\pi}{2};\ A = 2$

6.98 $A = 2\sqrt{2} \approx 2,828$

6.99 $A = 2\lim\limits_{\omega\to\infty}\arctan\omega = \pi$

6.100 $A = 12\pi \approx 37,70$

6.101 Grenzen: $x_1 = 0;\ x_2 = \dfrac{\pi}{4}$ $A \approx 0,0306$

6.102 $A = \dfrac{1}{2b}\ln\left|\dfrac{a + b^3}{a(1 + ab)}\right|$

6.103 $A = 3,53$

6.104 $\arccos\dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 1,1941$

6.105 $V_x = 2\pi\tanh 2 = 1,928\pi \approx 6,057$

6.106 $V_y = \pi\ln 9 \approx 6,903$

6.107 $V_x = V_{Paraboloid} - V_{Halbkugel} = 100\pi - 18\pi = 82\pi \approx 257,6$

6.108 $x \in [-5,5]$, Schnittstelle zwischen Parabel und Kreis: $x = 3$

$$V_x = V_{Paraboloid} + V_{Kugelabschnitt} = 64\pi + \frac{52}{3}\pi = \frac{244}{3}\pi \approx 255,5$$

6.109 $V_x = \frac{4}{3}\pi ab^2$; $V_y = \frac{4}{3}\pi a^2 b$

6.110 $A = 3,872$; $V_x = 10,445\pi \approx 32,814$ **6.111** $A = 6$; $V_x = \frac{27}{2}\pi \approx 42,411$

6.112 $\begin{cases} V_x = \frac{\pi^2}{2} \approx 4,935 \\ A_M = 2\pi\left(\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right) \approx 14,423 \end{cases}$

6.113 $A_M = 36,517\pi \approx 114,72$ **6.114** $A_M = 2,46$

6.115 $A_M = 0,422$ **6.116** $s = \sqrt{c}\sqrt{a+4c} + \frac{a}{2}\operatorname{arsinh}\frac{2\sqrt{ac}}{a}$

6.117 $s = 33,64$ **6.118** $s = \frac{14}{3} \approx 4,67$

6.119 $s = \frac{1}{2}\pi r$ **6.120** $s = 27,712$

6.121 $s = 2,004$ **6.122** $x_s \approx 2,69$; $y_s \approx 5,95$

6.123 $x_s = 1,5$; $y_s = 0,9$ **6.124** $x_s = \frac{e-2}{2e-2}$; $y_s = \frac{e+1}{4e}$

6.125 $x_s = \frac{4r}{3\pi}$; $y_s = 0$ **6.126** $x_s = \frac{9}{20} = 0,45$; $y_s = \frac{9}{20} = 0,45$

6.127 $x_s = 1$; $y_s = -1$ (Grenzen: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$)

6.128 $x_s = \frac{12}{7}$; $y_s = 0$ **6.129** $x_s = \frac{9}{16}$; $y_s = 0$ $z_s = 0$

6.130 $x_s = \frac{e^2-1}{4(e-2)}$; $y_s = 0$; $z_s = 0$ **6.131** $s \approx 65,97$; $x_s \approx 2,92$; $y_s \approx 31,1$

6.132 $A_M = 4\pi^2 rR$ **6.133** $I_x \approx 53,95$; $I_y \approx 14,93$

6.134 $I_x \approx 59,63$; $I_y \approx 85,18$; $I_p \approx 144,81$

6.135 $I_x = \frac{1}{72}\left(e^6 - 1\right) \approx 5,589$; $I_y = e^2 - 1 \approx 6,389$

6.136 $I_x = \frac{2}{3}(\ln 2)^3 - 2(\ln 2)^2 + 4\ln 2 - 2 \approx 0,033$; $I_y = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9} \approx 1,071$

6.137 $I_g = \frac{gh^3}{12}$; $I_s = \frac{gh^3}{36}$

ntegraltafel

Integrale, die $ax^2 + bx + c$ enthalten

$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	Bemerkungen
$\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$	$\dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$	$4ac-b^2>0$
	$-\dfrac{2}{2ax+b}$	$4ac-b^2=0$
	$-\dfrac{2}{\sqrt{b^2-4ac}}\operatorname{artanh}\dfrac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$	$\begin{cases}4ac-b^2<0\\ \lvert 2ax+b\rvert<\sqrt{b^2-4ac}\end{cases}$
	$-\dfrac{2}{\sqrt{b^2-4ac}}\operatorname{arcoth}\dfrac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$	$\begin{cases}4ac-b^2<0\\ \lvert 2ax+b\rvert>\sqrt{b^2-4ac}\end{cases}$
$\dfrac{1}{(ax^2+bx+c)^n}$	$\dfrac{1}{(n-1)(4ac-b^2)}\left(\dfrac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\right.$	$n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ $4ac-b^2\neq 0$
	$\left.+2a(2n-3)\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\right)$	
$\dfrac{x}{ax^2+bx+c}$	$\dfrac{1}{2a}\ln\lvert ax^2+bx+c\rvert$	$4ac-b^2\neq 0;\ a\neq 0$
	$-\dfrac{b}{2a}\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$	
$\dfrac{x}{(ax^2+bx+c)^n}$	$-\dfrac{1}{(n-1)(4ac-b^2)}$	$n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ $4ac-b^2\neq 0$
	$\times\left(\dfrac{bx+2c}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+b(2n-3)\right.$	
	$\left.\times\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\right)$	

Integrale, die $\sqrt{ax^2+bx+c}$ enthalten

$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	Bemerkungen
$\dfrac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arsinh}\dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$	$4ac-b^2>0;\ a>0$
	$\dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln\lvert 2ax+b\rvert$	$4ac-b^2=0;\ a>0$
	$\dfrac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arcosh}\dfrac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$	$4ac-b^2<0;\ a>0;\ 2ax+b\geq\sqrt{b^2-4ac}$
	$-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arcosh}\dfrac{-(2ax+b)}{\sqrt{b^2-4ac}}$	$4ac-b^2<0;\ a>0;\ 2ax+b\leq-\sqrt{b^2-4ac}$
	$-\dfrac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\dfrac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$	$4ac-b^2<0;\ a<0$
$\sqrt{ax^2+bx+c}$	$\dfrac{(2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}}{4a}$ $+\dfrac{4ac-b^2}{8a}\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	$a\neq 0$
$\dfrac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	$\dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{a}$ $-\dfrac{b}{2a}\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	$a\neq 0$
$\dfrac{x^2}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	$\dfrac{2ax-3b}{4a^2}\sqrt{ax^2+bx+c}$ $+\dfrac{3b^2-4ac}{8a^2}\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	$a\neq 0$
$x\sqrt{ax^2+bx+c}$	$\dfrac{\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)^3}{3a}$ $-\dfrac{b\,(2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}}{8a^2}$ $-\dfrac{b\,(4ac-b^2)}{16a^2}\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	$a\neq 0$
$x^2\sqrt{ax^2+bx+c}$	$\dfrac{(6ax-5b)\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)^3}{24a^2}$ $+\dfrac{5b^2-4ac}{16a^2}\displaystyle\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$	$a\neq 0$

Integrale, die trigonometrische Funktionen enthalten

$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	Bemerkungen
$\sin^n \omega x$	$-\frac{\sin^{n-1}\omega x \cos \omega x}{n\omega} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}\omega x\,\mathrm{d}x$	$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
$\cos^n \omega x$	$\frac{\cos^{n-1}\omega x \sin \omega x}{n\omega} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}\omega x\,\mathrm{d}x$	$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
$\frac{1}{\sin \omega x}$	$\frac{1}{\omega}\ln\left\lvert\tan\frac{\omega x}{2}\right\rvert$	
$\frac{1}{\cos \omega x}$	$\frac{1}{\omega}\ln\left\lvert\tan\left(\frac{\omega x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	
$\frac{1}{\sin^n \omega x}$	$-\frac{1}{\omega(n-1)}\frac{\cos \omega x}{\sin^{n-1}\omega x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{n-2}\omega x}$	$n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$
$\frac{1}{\cos^n \omega x}$	$\frac{1}{\omega(n-1)}\frac{\sin \omega x}{\cos^{n-1}\omega x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{n-2}\omega x}$	$n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$
$\sin \omega x \sin(\omega x+\varphi)$	$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega x+\varphi)+x\cos\varphi\right)$	
$\cos \omega x \cos(\omega x+\varphi)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega x+\varphi)+x\cos\varphi\right)$	
$\sin \omega x \cos(\omega x+\varphi)$	$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2\omega}\cos(2\omega x+\varphi)-x\sin\varphi\right)$	
0 $\cos \omega x \sin(\omega x+\varphi)$	$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2\omega}\cos(2\omega x+\varphi)+x\sin\varphi\right)$	

4 Integrale, die Exponentialfunktionen enthalten

	$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	Bemerkungen
4.1	$x^n \mathrm{e}^{ax}$	$\frac{1}{a}x^n \mathrm{e}^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$	$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
4.2	$\mathrm{e}^{ax}\sin \omega x$	$\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+\omega^2}(a\sin \omega x - \omega \cos \omega x)$	$\lvert a\rvert \neq \lvert\omega\rvert$
4.3	$\mathrm{e}^{ax}\cos \omega x$	$\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+\omega^2}(a\cos \omega x + \omega \sin \omega x)$	$\lvert a\rvert \neq \lvert\omega\rvert$

5 Integrale, die logarithmische Funktionen enthalten

	$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	Bemerkungen
5.1	$(\ln x)^n$	$x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$	$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
5.2	$x^m \ln x$	$x^{m+1}\left(\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right)$	$m \neq -1$
5.3	$\frac{\ln x}{x^m}$	$-\frac{\ln x}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)^2 x^{m-1}}$	$m \neq 1$

Sachwortverzeichnis

Abbildung 58
–, eindeutige 58
–, eineindeutige 58
–, Definitionsbereich 58
–, lineare 251 f.
–, Wertebereich 58
Abhängigkeit, lineare 233
Ableitung, äußere 357
– der Arcusfunktionen 360 ff.
– – Areafunktion 370
– – Exponentialfunktion 365
– – hyperbolischen Funktionen 366
– – Logarithmusfunktion 363
– – Potenzfunktion 366
– – trigonometrischen Funktionen 359 f.
– – Umkehrfunktion 354 f.
– einer Summe 352
– eines Produktes 352
– – Quotienten 353
–, höhere 359
–, innere 357
–, links- und rechtsseitige 350
–, logarithmische 364
Ableitungs-funktion 345
– -regeln 351
Abschnittsform der Geradengleichung 175
absoluter Betrag 52
Absolutglieder 221
Abstandsformel 174, 194
Abszisse 150
Addition 31
– von Vektoren 155
Additionstheoreme 91
Adjunkte 260
algebraische Funktion 65
– Gleichung 44
allgemeine Form der Geradengleichung 176
– Sinusfunktion 94
Alternative 16
Anstieg einer Geraden 175
– – Strecke 174
– (Steigung) einer Kurve 344, 346
äquivalente Umformungen 44
Äquivalenz 18
Arbeit 514 ff.
Arcusfunktionen 86, 360
Areafunktionen 368
Argument 59
– einer komplexen Zahl 126
arithmetische Form komplexer Zahlen 119
Asymptote 399
Asymptoten der Hyperbel 191
asymptotische Kurve 399
Auflagerkraft 511
Aussage 13
Aussagenform 14
–, definierende 22
Aussagenfunktionen 14
Austausch-regeln 225
– -verfahren 222, 282

Basis 159, 235
Basisvektoren 159
Belastungs-fläche 511
– -kurve 511
Bernoullische Ungleichung 308
Betrag 52
– des Vektors 155, 161, 165
– einer komplexen Zahl 122, 126
Beweis, direkter
– durch vollständige Induktion 21
–, indirekter 20
Bilanztabelle 291
Bild 58
Bildmenge 58
Binärsystem 30
Binomialkoeffizient 40
binomische Formeln 39
– Gleichungen 132
binomischer Satz 40
Blockmatrix 255
Bogenlänge 495
Bogenmaß 81
Brennpunkt der Parabel 181
Brennpunkte der Ellipse 185
– – Hyperbel 189
Brennstrahl 181
Brüche 31
Bruchgleichung 48

charakteristische Gleichung 287
charakteristisches Polynom 287
Cosinussatz 101
Cramersche Regel 267, 282

Definitionsbereich der Abbildung 58
– – Funktion 59
– – Gleichung 43
dekadischer Logarithmus 37
Determinante 258, 260
Dezimalsystem 30
Diagonalmatrix 241
Differential 349, 433
Differentialquotient 349
Differenz von Mengen 26
Differenzenquotient 344
differenzierbare Funktion 345
Differenzierbarkeit 350
Disjunktion 16
divergent, bestimmt 312
–, unbestimmt 312
divergente Folge 311
Division 31
Drehung des Koordinatensystems 153
Dreieck, rechtwinkliges 96
–, schiefwinkliges 101
Dreiecksungleichung 53
Durchsatz 291
Durchschnitt von Mengen 26

Ebene, Achsenabschnitts-gleichung 202
–, Parameterdarstellung 200
–, parameterfreie Gleichung 201
echt gebrochenrationale Funktion 398
Effektivwert 519
e-Funktion 365
Eigen-gleichung 286
– -vektor 285, 288
Eigenwert 285
– -problem 285
Einermenge 22
Einheits-kreis 84
– -matrix 241
– -vektoren 158, 235 f.
Einsatzvektor 293
Ellipse 158
Ellipsenkonstruktion 187
Ellipsoid 208
elliptisches Paraboloid 209
elliptischer Zylinder 210
Entwicklungssatz 261
Eulersche Formel 134
– Zahl e 322 ff.
Exponentialform komplexer Zahlen 134
Exponentialfunktion 77
–, Ableitung der 365
Exponentialgleichung 49
Extremum 371
Extremwert 371
–, Definition 371
–, hinreichendes Kriterium 386
–, lokaler 371
–, notwendiges Kriterium 371
–, Extremwertproblem 414 ff.

Fadenkonstruktion der Ellipse 185
Fakultät 33
Falksches Schema 247 f.
Feinheitsmaß 439
Fixgerade 286
Flächen 2. Ordnung 207
Flächen-element 491
– -funktion 444, 491
– -inhalt 484 f., 487
– -trägheitsmoment 507 f.
Folge, alternierende 301
–, arithmetische 300
–, beschränkte 303
–, divergente 311
–, geometrische 301, 316 ff.
–, Glied einer 299
–, Grenzwert einer 308 ff.
–, konvergente 311
–, monoton fallende 301
–, monoton steigende 301
Format 238
Fundamentalsatz der Algebra 45
Fundamentalsystem 280
Funktion
–, Ableitung einer 344
–, algebraische 65
–, algebraisch-irrationale 65
–, analytische Darstellung 62
–, Definitionsbereich 59
–, Differential einer 349
–, Differentiation einer 345
–, ganzrationale 65, 71, 392
–, gebrochenrationale 65, 75, 398
–, gerade 67, 487
–, Grenzwert einer 331 ff., 338 ff.
–, inverse 68
–, lineare 220
–, monotone 66
–, monoton fallende 381
–, steigende 381
–, periodische 68
–, stetige 340
–, transzendente 65
–, trigonometrische 82
–, ungerade 67, 487
–, unstetige 340
–, Wertebereich 59
–, zyklometrische 86
Funktionensystem, lineares 220, 223
Funktionsbild 60
Funktionsgleichung 43, 62
–, explizite Form 62
–, implizite Form 62
–, Parameterdarstellung 63

ganze Zahlen 28
ganzrationale Funktion 59, 65, 71, 226, 282
Gaußscher Algorithmus 226, 282
Gaußsche Zahlenebene 121
gebrochenrationale Funktion 65, 75
gemischtes Vektorprodukt 170
Gerade, Parameter-darstellung 174
gerade Funktion 67
Geradengleichung, Abschnittsform 175
–, allgemeine Form 176
–, Normalform 175
–, Punktrichtungsform 175, 194
–, Zweipunkteform 175, 195
Gleichheit von Mengen 23
Gleichung 43
–, algebraische 44
–, charakteristische 287
–, Definitionsbereich 43
–, gebrochenrationale 48
–, goniometrische 50
–, identische 43
–, irrationale 48
–, kubische 46
–, lineare 220
–, logarithmische 50
–, n-ten Grades 45
–, Produktdarstellung 45
–, quadratische 46
–, transzendente 49
gleichseitige Hyperbel 191
Gleichungssystem, lineares 221
–, homogenes 234, 278, 280
–, inhomogenes 267, 277,280
Grad 81
Graph 60
Grenze, obere 439
–, untere 439
Grenzwert einer Funktion 331 ff., 338 ff.
– – –, linksseitiger 334
– – –, rechtsseitiger 334
– – –, uneigentlicher 312, 376
– Folge 308 ff.
Grenzwertsätze 314
Grundaufgaben der Dreiecksberechnung 102
Grundbereich der Gleichung 42
Grundintegral 434
Guldinsche Regel 506

Halbachsen der Ellipse 187
Halbparameter 181

Haupt-achse der Ellipse 186
– -diagonale 239
– -satz 446
Hauptscheitel-kreis 187
– -punkte der Ellipse 187
– – – Hyperbel 190
Hauptwert, Cauchyscher 452
Heronsche Formel 107
Hexagesimalsystem 30
hinreichende Bedingung 17
höhere Ableitung 359
Hornerschema 72
Hyperbel 189
Hyperbelfunktion 366 ff.
hyperbolisches Paraboloid 210
hyperbolischer Zylinder 210
Hyperboloid 208 f.

imaginäre Einheit 29, 118
– Halbachsen der Hyperbel 190
– Zahlen 29, 118
Imaginärteil 119
Implikation 16
Induktion 304
–, vollständige 21
inhomogenes lineares Gleichungssystem 266, 277, 280
Integral, bestimmtes 438 f., 447
– mit variabler oberer Grenze 444
–, partikuläres 444, 446
–, Riemannsches 439
–, unbestimmtes 432 f., 446
–, uneigentliches 451
Integraltafel 468, 477, 571
Integration durch Substitution 453 f., 462
– nach Partialbruchzerlegung 453 f., 469
–, numerische 453, 478
–, partielle 453, 465
Integrations-grenzen 441
– -intervall 442
– -konstante 433
– -variable 433, 441
Integrierbarkeit 439 f.
Intervall 54
–, abgeschlossenes 54
–, offenes 54
inverse Funktion 68
Inversion 259
– von Ortskurven 142
Inversionskreis 144
Inversionssätze 142 ff.
irrationale Zahlen 28
Iterationsverfahren nach Newton 417 ff.

Kegel 209
Kegelschnitt 178
Kehrmatrix 253
Kellerzeile 224
Keplersche Faßregel 481
Kettenregel 356 f.
Koeffizientenmatrix 276
–, erweiterte 276
Komplementärmenge 27
komplexe Funktion einer reellen Variablen 137
– Zahl, 29, 119
– –, arithmetische Form 119
– –, Exponentialform 134
– –, goniometrische Form 125
Komponenten eines Vektors 159
Kondition 284
konjugiert komplexe Zahl 120
Konjunktion 15
konkav 383
Konstante 42
konstanter Faktor 436
Kontraposition 17
Konvergenz einer Folge 311
konvex 383
Koordinaten des Vektors 159
Koordinatensystem, dreiachsiges cartesisches 150
–, ebenes cartesisches 150
Koordinatentransformation 151
Kopplungsmatrix 292
Kreis 178
Kreisgleichung, allgemeine 178
– in Polarkoordinaten 180
kubische Gleichung 46
Kugel 208
Kurve, Steigung einer 344, 346
–, Tangente an eine 347
Kurven 2. Ordnung 178
Kurven-diskussion 391 ff.
– -gleichung, explizite Form 171
–, implizite Form 171
– – in Polarkoordinaten 172
–, 2. Grades 178
– -schar 394, 403 f., 406, f.

Längskraft 511
leere Menge 22
Leistungsmatrix 293
Leistungsvektor 293
Leitlinie 181
Leitstrahl 181
lineare Abhängigkeit 233
– Exzentrizität 185, 189
– Gleichung 46
– Unabhängigkeit 233
Linearität 230
Linearkombination 162, 232
–, nichttriviale 232
–, triviale 232
Linienelement 496
Linkskrümmung 383
linksseitige Ableitung 350
Linkssystem 150
ln-Funktion, Ableitung der 363
Logarithmengesetze 36
Logarithmensysteme 37
logarithmische Ableitung 364
– Gleichung 50
Logarithmus 35
–, binärer 38
–, dekadischer 37
–, natürlicher 37
Logarithmusfunktion 79
Lösbarkeit 222, 275, 277
Lösung, allgemeine 222, 280
–, numerische 282
–, partikuläre 222, 280
–, spezielle 222, 280
–, triviale 278
Lücke 341, 399

Mantelfläche 497
Matrix 238
–, adjungierte 244
–, antisymmetrische 240, 243
–, entgegengesetzte 240
–, inverse 253, 268

, komplexe 244
–, konjugiert komplexe 244
–, orthogonale
–, quadratische 239
–, Rang 272
–, reguläre 253, 270
–, reziproke 253
–, schiefsymmetrische 240
–, singuläre 253
–, symmetrische 240, 243
–, transponierte 239
Matrixnorm 284
Matrixprodukt 247
Matrizen, Differenz 243
–, Gleichheit 242
–, Potenzen von 251
–, Produkt 247
–, Summe 243
– -eigenwert 285
– -gleichung 255
– -inversion 252
Maximum, lokales 371
– einer Funktion 371
Maximumnorm 284
Menge 22
– der ganzen Zahlen 28
– – komplexen Zahlen 29
– – natürlichen Zahlen 28
– – rationalen Zahlen 28
– – reellen Zahlen 29
Mengen-differenz 26
– -durchschnitt 26
– -vereinigung 25
Minimum einer Funktion 371
–, lokales 371
Mittelpunktsgleichung der Ellipse 186
– – Hyperbel 190
– des Kreises 179
Mittelwert, arithmetischer 443, 517
–, linearer 443, 517
–, quadratischer 444, 519
Mittelwertsatz 374, 375
– der Integralrechnung 443
Moivre, Satz von 130
Moment, statisches 500, 502 f.
monotone Folge, Funktion 301
Monotoniebogen 66
Multiplikation 31
– von Vektoren 164

n-Tupel 221, 230
natürliche Logarithmen 37
– Zahlen 28
Nebenachse der Ellipse 186
Nebenscheitel-kreis der Ellipse 187
– -punkte der Ellipse 187
Negation 14
Neigungswinkel 207
Nennerdeterminante 267
Newtonsches Interpolations-polynom 74
– Iterationsverfahren 329, 417 ff.
Normale, Gleichung der 347
Normalenvektor 200
Normalform der Geraden-gleichung 175
– – Gleichung *n*-ten Grades 45
notwendige Bedingung 17
Null-matrix 240
– -stelle 391
– -stellen einer Funktion 73
– -teiler 250
– -vektor 156
numerische Exzentrizität 185, 189
Ordinate 150
orthogonale Geraden 178
Ortskurven 140
Ortsvektor 155, 229

Parabel 181
– *n*-ten Grades 72
– -achsen 181
– -gleichungen 183
parabolischer Zylinder 211
Paraboloid 209 f.
Parallelverschiebung des Koordinatensystems 152
Parameter 63, 171
Parameterdarstellung der Ebene 200
– – Ellipse 188
– – Funktion 63
– – Geraden 174
– – Kurve 171
– des Kreises 180
Pascalsches Dreieck 39
Periode 68
–, primitive 68
periodische Funktion 68
Permutation 259
Pivotelement 224
Polargleichung der Kegelschnitte 193
Polarkoordinatensystem 150
Polstelle 399
Polynom 65, 392,
–, charakteristisches 287
Potenz 33
Potenzfunktion 366
Produkt, vektorielles 270
– -darstellung der Gleichung 45
– -regel 314, 352
– -zeichen 33
Punkt-Richtungsform 175, 195

Quadrantenrelationen 88
quadratische Gleichung 46
Querkraft 511
Querschnitt, gefährdeter 513
Quotientenregel 314, 353

Radiant 81
Rang einer Matrix 272
Rangabfall 288
rationale Zahlen 28
Rauminhalt 492
Realteil 119
Rechtskrümmung 383
rechtsseitige Ableitung 350
Rechtssystem 150
reelle Halbachse der Hyperbel 190
– Zahlen 29
Regel von Cramer 267, 282
– – Guldin 506
– – Sarrus 258
Regeln von Bernoulli - de l'Hospital 376 f.
Reihe, geometrische 319
Rektifizierbarkeit 496
Rekursionsformel 468
relatives Maximum 371
– Minimum 371
Richtung des Vektors 155
Richtungscosinus 161
Rolle, Satz von 373
Rotations-ellipsoid 208
– -körper 492

Sattelpunkt 388
Satz der Zweiwertigkeit 13

– von Moivre 130
Schachbrettregel 260
Scheitel-gleichung der Parabel 182
– -punkt der Parabel 181
– -tangente 181
Schnitt-gerade zweier Ebenen 202
– -punkt zweier Geraden 176, 197
– zwischen Gerade und Ebene 206
– -winkel zweier Geraden 177, 198
Schwerpunkt 501, 503 f.
Simpsonsche Formel 481
Sinus-funktion 359 f., 408
– -satz 101
Skalar 154
Skalarprodukt 164, 246 f.
Spaltenmatrix 239
Spatprodukt 170
Spektrum 285
Sphäroid 208
Spur 239, 287
Stammfunktion 432 f.
statisches Moment 500, 502 ff.
Steigung 344
Stetigkeit 340, 350
Substitution 454
–, lineare 251
Subtraktion 31
– von Vektoren 157
Summen-regel 314, 352
-vektor 155
-zeichen 32
System, homogenes 221
–, inhomogenes 221
–, inverses 223

Tangente, Gleichung der 347
Tangentenformel 103
Teilmenge 24
Teilnormentabelle 291
Term 42
Tiefpunkt 371
Trägheitsmoment 507, 509
Transformation, lineare 251
transzendente Funktionen 65
– Gleichung 49
Trapezformel 479
trigonometrische Funktionen 82, 359 f., 408
– , Additionstheoreme 91
– –, Definition 82
– –, Periodizität 83
– –, Quadrantenrelationen 88
– –, Zusammenhang 89
Typ 238

Übermatrix 255
Umkehrabbildung 59
Umkehrfunktion 68
–, Ableitung der 354 f.
Unabhängigkeit, lineare 233
unbestimmt divergent 312
ungerade Funktion 67
Ungleichung 55
unstetig 24, 340
Unterdeterminante 260
Untermatrix 255
Urbild 58
Urbildmenge 58

Variable 42
–, abhängige 59
–, unabhängige 59
Vektor 154, 230
–, Betrag 155, 161, 165
–, freier 155
–, liniengebundener 155
–, ortsgebundener 155
–, Richtungscosinus 161
Vektoren, Addition 155, 160
–, Gleichheit 155, 160
–, kollineare 163
–, komplanare 163
–, Multiplikation mit Skalar 157, 160
–, Subtraktion 157, 160
vektorielles Produkt 270
Vektorprodukt 167
Vektorraum, linearer 229, 231
Verflechtungsbilanz 290
Verflechtungsmodell 293
Verkettbarkeit 247
vollständige Induktion 21
Volumen 492

Wahrheitswerttabelle 15
Weierstraß, Satz von 373
Wendepunkt 388
Wertebereich 58 f.
Wertetabelle 60
Winkel 80
– zwischen Ebene und Gerade 207
– – zwei Ebenen 204
– – – Geraden 198
Wurzel
Wurzelfunktion 76
–, Berechnung 325 ff.
Wurzelgleichung 48
Wurzelsätze von Vieta 46

Zahlen, imaginäre 118
–, komplexe 119
Zahlenfolge 298 f.
Zählerdeterminante 267
Zeilenmatrix 239
Zinseszinsrechnung 307,325
Zweipunkteform der Geradengleichung 175, 195
Zweipunktegleichung 271
zweiwertige Logik 13
zyklometrische Funktionen 86
Zylinder 210 f.

Inhaltsübersicht zu Band 2

7 Unendliche Reihen

Reihen mit konstanten Gliedern - Potenzreihen - Fourierreihen

8 Differentialgleichungen

Aufstellen von Dgln. - Dgln. 1. Ordnung -
Lineare Dgln. 2. und höherer Ordnung - Ausgewählte Dgln. -
Angenäherte Lösung von Dgln. - Systeme linearer Dgln.

9 Laplace-Transformation

Transformationssätze - Anwendung der Laplace-Transformation für das Lösen linearer Dgln.

10 Differential- und Integralrechnung für mehrere Variable

Differential- und Integralrechnung für mehrere Variable -
Differential- und Integraloperationen in Feldern

11 Differentialgeometrie

Ebene Kurven - Raumkurven - Flächen

12 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik

Zufällige Ereignisse und Zufallsgrößen - Wahrscheinlichkeiten - Diskrete und stetige Zufallsgrößen - Statistische Schätz- und Prüfverfahren - Anwendungen in der Zufallstheorie

Dieses Mathematik-Buch

- ist ein Lehrbuch für Ingenieurstudenten an Fachhochschulen.
- erleichtert durch zahlreiche Beispiele das Verstehen des Lehrstoffes.
- ist praxisorientiert durch viele technische Anwendungsbeispiele.
- festigt den Vorlesungsstoff durch eine Fülle von Aufgaben mit Lösungen.
- ist besonders anschaulich durch die Vielzahl der Abbildungen.
- kann aufgrund seiner methodisch-didaktischen Konzeption auch für das Selbststudium genutzt werden.

Band 1

Grundlagen – Komplexe Zahlen – Vektorrechnung und analytische Geometrie – Lineare Algebra – Differential- und Integralrechnung für Funktionen mit einer Variablen

Band 2

Unendliche Reihen – Differentialgleichungen – Laplace-Transformation – Differential- und Integralrechnung für mehrere Variablen – Differentialgeometrie – Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik

ISBN 3-343-00870-2